Math. U. 91m Geschenk des Verfassers

R

Systematische Anfangsgründe der mathematischen und physicalischen Wissenschaften, von K. M. Koumas aus Lorissa. Bd. 1–8.

Wien. 1807.

ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΣΥΛΛΕΧΘΕΙΣΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Περιέχων τὴν Ἀριθμητικὴν, καὶ τοῦ Συμβολικοῦ Λογισμοῦ τὰς ἀρχοειδεστέρας πράξεις, καὶ τὰ περὶ τῶν Ἀναλογιῶν μέχρι τῶν Λογαρίθμων.

MONACENSIS

Οὐδὲ γὰρ Γεωμετρίας οὐδ᾽ Ἀστρονομίας ἀφίσταται (ἄνθρωπος)· ἀλλὰ καὶ τὰ τῆς γῆς νέρθεν καὶ τὰ ὕπερθε τοῦ οὐρανοῦ, κατὰ Πίνδαρον, ἐπισκοπεῖ.
Γαληνὸς Προτρ. πρὸς τὰς τέχνας Κεφ. α΄.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΩΤΟΥ.

͵ΑΩΖ.

1807

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

ΤΟΙΣ

ΕΞ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΑΔΕΛΦΟΙΣ

ΖΩΣΙΜΑΔΑΙΣ

Α. Ν. Ζ. Μ.

ΟΤΙ ΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΔΙΑΤΕΛΟΥΣΙΝ ΕΥΕΡΓΕΤΟΥΝΤΕΣ

Ο ΕΚΔΟΤΗΣ

ΤΗΝ ΒΙΒΛΟΝ ΤΑΥΤΗΝ

ΕΥΓΝΩΜΟΣΥΝΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

ΑΝΑΤΙΘΗΣΙ

ΤΟΙΣ ΑΝΑΓΙΝΩΣΚΟΥΣΙ.

Τῶν πολλῶν, ὧν ἐνήνοχεν ὁ καθ' ἡμᾶς χρόνος βιβλίων, ἔντι ϗ τόδε, ὦ παῖδες Ἑλλήνων, ᾧ νῦν ἐντυγχάνετε, ἀνδράσι μὲν ἀνὰ πᾶσαν τὴν Εὐρώπην περιωνύμοις ἀποτεχθὲν, ἐμοὶ δ', ἐρωτικῶς περὶ τὰς μαθηματικὰς ἔχοντι μελέτας, εἰσποιηθὲν, τόν τε Ἕλληνα λόγον, κἂν ἄλλως ἐυτελῆ ϗ τραυλίζοντα, προΐεσθαι παιδευθὲν, ὡς ἂν ἔχοι ϗ ὑμῖν συγγίγνεσθαι, ϗ τῶν ἰδίων αὐτȣ̃ ἀγαθῶν ἐπ' ἀδείας μεταδιδόναι. Ἐπεὶ δὲ πρόθεσις αὐτῷ τῶν Μαθηματικῶν ὅσα τε καθαρὰ ϗ ὅσα φυσικώτερα, ὡς ἂν φαίη ὁ Σταγειρίτης (1), ὡς οἷόν τε σαφῶς τε ϗ ἐν ἐπιτομῇ ἐκδιδάξαι, φέρε, διὰ βραχέων τὴν ἐνίων πραγματειῶν, τῶν ἐν αὐτῷ, ἀρχήν τε ϗ πρόοδον ἱςορικώτερον σκεψάμενοι, ὅθεν ταύτας συνελεξάμεθα, ἀποδῶμεν τελευταῖον τὸν λόγον.

Τȣ̀ς μὲν ȣ̃ν πάντων ἐν σοφίᾳ διενεγκόντας Ἕλληνας, ἐξ Αἰγυπτίων ϗ Χαλδαίων τὰ τῆς Γεωμετρίας παραλαβόντας ἐναύσματα (2), εἰς πυρσὸν μέγαν ἐξάραι,

(1) Φυσ. Ἀρχ. ἐν Β'. Κεφ. Β'.

(2) "Περὶ Αἴγυπτον αἱ Μαθηματικαὶ πρῶτον τέχναι συνέςησαν· ἐκεῖ γὰρ ἠφείθη σχολάζειν τὸ τῶν ἱερέων ἔθνος. Ἀριςοτ. Μεταφ. Μειζ. Α'. Κεφ. Α'. "Μαρτυρȣ̃σι δὲ καὶ τῶν Ἑλλήνων οἱ σοφώτατοι, Σόλων, Θαλῆς, Πλάτων, Εὔδοξος, Πυθαγόρας (ὡς δ' ἔνιοί φασι, ϗ Λυκȣ̃ργος) εἰς Αἴγυπτον ἀφικόμενοι καὶ συγγενόμενοι τοῖς ἱερεῦσι„ Πλȣτ. περὶ Ἴσιδ. ϗ Ὀσίρ.

μυρία οἴκοθεν προσεπινοήσαντες, ὁμολογοῦσι μὲν πάντες μονονουχὶ, ἐπιμαρτυροῦσι δὲ τούτοις λαμπρῶς καὶ τὰ ἐκ τοῦ τῆς Ἑλλάδος ναυαγίου περισωθέντα συγγράμματα, ὡς ἀξίως ἑαυτῶν ἐκεῖνοι περὶ τὰ γεωμετρικὰ πονήσαντες ζητήματα διετέλεσαν· τῆς μέντοι γενικωτέρας Ἀριθμητικῆς, ἥτις ἡμῖν Συμβολικὸς ἐκλήθη λογισμὸς, δι' οὗ ἐποίσομεν ὕστερον λόγους, οὐδένα ἴσμεν τῶν πάλαι συγγραφέα, ἀλλ' ἢ Διόφαντον τὸν Ἀλεξανδρέα, περὶ τὴν τετάρτην ἀπὸ θεογονίας ἑκατονταετηρίδα γενόμενον, οὗ πολλὰ καὶ ἄλλα γεγραφότος, ὡς πολλοὶ διατείνονται, εἰς ἡμᾶς ἓξ μόνον διεσώθη βιβλία, τὸ μὲν πρῶτον, εἰς τὴν τῶν Ῥωμαίων ἑρμηνευθέντα φωνὴν, ἐν Βασιλείᾳ ὑπὸ Γ. Ξυλάνδρου τῷ 1576 ἔτει τύποις ἐκδοθέντα, εἶτα δὲ πολλαχοῦ ὑπὸ διαφόρων Ῥωμαϊστὶ ἅμα καὶ Ἑλληνιστὶ τοῦ τυπικοῦ τυχόντα φωτός. Ἀλλ' ἔστιν ἐν τούτοις ἀληθῶς ἰδεῖν τέλειον οὐδὲν, ὅτι μὴ ἴχνε' ἅττα τοῦ νῦν τελειοτάτου Συμβολικοῦ λογισμοῦ ἀμυδρὰ καὶ βραχέα, καὶ μόνον δεικνῦντα, ὡς ἄρα καὶ τοῖς πάλαι τὸ θεσπέσιον τόδε χρῆμα οὐ πάμπαν ἦν ἄδηλον.

Ἀλλὰ γὰρ πρὶν ἢ δημοσιευθῆναι κατὰ τὴν Εὐρώπην τὰ Διοφάντῳ συγγραφέντα, τὸ Ἀράβων ἔθνος, θαυμαστῶς τοῖς ὅπλοις διευδοκιμηκότες, καὶ πᾶσαν μὲν τὴν Λιβύην, πᾶσαν δὲ μονονοὺ τὴν Ἰβήρων χώραν, ὑφ' ἑαυτοὺς ποιησάμενοι, τὴν Φιλοσοφίαν μὲν ἐν γένει, τὴν δὲ Μαθηματικὴν ἐν εἴδει, περὶ πολλοῦ ποιούμενοι, τῇ τε ὁμόρῳ Γαλλίᾳ, καὶ δὴ καὶ τοῖς λοιποῖς Εὐρωπαίοις ἔθνεσι, τούτων μετέδωκαν. ἐντεῦθεν ἄρα καὶ τὴν γενικωτέραν Ἀριθμητικὴν, ἣν αὐτοὶ μὲν τῇ ἰδίᾳ φωνῇ Ἄλγεβραν ἐκάλουν, καὶ εὐ

ρεταῖς Μωάμεθ τῷ Μωσέως υἱῷ καὶ Μωάμεθ ἑτέρῳ τῷ Βαγδαδηνῷ ἀπένεμον, εἰκὸς δὲ εἰς τὴν αὐτῶν φωνὴν ἐξ Ἑλληνικῶν συγγραμμάτων σὺν ἄλλοις ὀκ εὐαρίθμοις μετηνέχθαι (1), τοῖς τὴν Εὐρώπην οἰκᴕσιν ἐκοίνωσαν· καὶ γὰρ Φ. Λᴕκᾶς Πακκίολος πρῶτος ἐξέδοτο βίβλον περὶ τοιᴕ̃το ςρεφομένην ὑποκείμενον, ἧς ἦν ἐπιγραφὴ Σύνοψις Ἀριθμητικῆς καὶ Γεωμετρίας, ἀναλογιῶν τε καὶ ἀναλογικῶν, τυπωθεῖσαν, εἰ χρὴ Οὐάλεντι πιςεύειν, Ἐνετίῃσι κατὰ τὸ 1494 ἔτος· ἀλλ' ἐν ταύτῃ, ἱκανῶς ἄλλως περίτε τῆς ἐν εἴδει Ἀριθμητικῆς ϗ δὴ ϗ τῆς γενικωτέρας πραγματευομένῃ, εἰς τὰς δευτεροβαθμίᴕς τῶν ἐξισώσεων αἱ ςῆλαι πήγνυνται, οἷ δηλονότι ϗ τοῖς Ἄραψιν ἀφικέσθαι ἐξεγένετο. Οὐ μὴν ἀλλ' ᴕ̓δ' οἱ ἐκ τᴕ́τᴕ ἀναφανέντες Μαθηματικοὶ ἐφ' ἱκανὸν χρόνον ἴσχυσάντι οἴκοθεν συνεισενεγκεῖν τῷ πράγματι μέχρι τᴕ̃ 1545 σωτηρίᴕ ἔτᴕς.

Ἐν τᴕ́τῳ δὲ ἐξέλαμψε βίβλος, Μεγάλη τέχνη ἐπιγραφὴν φέρᴕσα, Ἱερωνύμῳ Καρδάνῳ τῷ ἐκ Μεδιολάνων πονηθεῖσα, ἐν ᾗ πρὸς ταῖς τετραγωνικαῖς ἐπιλύονται ϗ αἱ κυβικαὶ ἐξισώσεις· ἐκ τᴕ́τᴕ ἄρα ϗ τᴕ̀ς γενικᴕ̀ς τύπᴕς, καθ' ᴕ̓̀ς τριτοβάθμιος ἐξίσωσις ἐπιλύεται, Καρδανείᴕς ὀνομάζεσθαι ἐξενίκησε, ὡς Καρδάνᴕ, καίτοι ϗ ἄλλων εἰς τᴕ̃το προμοχθησάντων, ϗ τετελειωκότος ϗ δεδειχότος ϗ δὴ ϗ τᴕ̃ κοινᴕ̃ τὸ χρῆμα ποιήσαντος, ᴕ̓μὴν ἀλλὰ ϗ μέθοδον καινὴν ἄλλην ἐν τῇ ῥηθείσῃ βίβλῳ πάρεσιν ἰδεῖν θαυμα-

(1) Ἴδε Βᴕδδ. ἐν Ἱςορ. Φιλοσ. Κεφ. Ε'. §. γ'.

σιωτέραν παρὰ πολύ· ἣν, τοῦ αὐτοῦ Γεωμέτρου μαρτυροῦντος, Λουδοβίκος ὁ ἐκ Φερραρίων, ἀκροατὴς αὐτοῦ γενόμενος, εὕρατο, ἐκτεθεισομένην καὶ ἡμῖν ἐν τῇ τῶν τεταρτοβαθμίων ἐξισώσεων ἐπιλύσει· ἐκ τούτου δὲ οὐδὲν ἐπιεικῶς, ὃ καὶ λόγου τινὸς εἴη ἄξιον, ἐπὶ τῆς τῶν ἐξισώσεων ἐπιλύσεως ἐπινενόηται· ἐνδεῖ γὰρ ἡμῖν εἰς δεῦρο, καὶ ἐπὶ πολὺν ἀναμφηρίστως ἐνδεήσει χρόνον, μεθόδου γενικῆς πρὸς ἐπίλυσιν τῶν τὸν τέταρτον βαθμὸν ὑπερεχουσῶν ἐξισώσεων· ἣν δὲ Βικέντιος Ῥικάτιος εὕρατο, μερικήτις ὑπάρχει, τὰς παντὸς βαθμοῦ ἐξισώσεις ἐν ῥηταῖς τισι θέσεσιν εἰς τύπον ἀδελφὸν τῷ Καρδανείῳ φέρουσα.

Ἀλλὰ γὰρ, τέως μὲν οὐδὲ τοῖς τοῦ Ἀλφαβήτου γράμμασιν, ὅτι μὴ εἰς ἔνδειξιν τῶς ἀγνώσων ποσῶν, ἀριθμοῖς δὲ πάντες, οἱ περὶ τοῦτο ἔχοντες τῆς Ἀριθμητικῆς τὸ εἶδος, ἐχρῶντο· ὅθεν αἵτε λύσεις μερικώτεραι καθίσαντο, καὶ τῶν θέσεων ἐν προβλήματι ὁμοειδεῖ μεταβαλλουσῶν, ἐνστήσασθαι ἐξ ὑπαρχῆς ἐχρῆν τὰ τῆς πράξεως, πρὶν ἐξέλαμψεν ὁ ἐκ Γαλλίας ὁρμώμενος Οὐϊέτος, ὃν εἴτις εἴποι τοῦ Συμβολικοῦ λογισμοῦ πατέρα οὐκ ἂν ἁμάρτοι, πρῶτος ἀντὶ μὲν ἀριθμῶν τοῖς τῶν γραμμάτων στοιχείοις χρησάμενος, συμβόλοις δὲ τῶν ποσῶν τάτε γνωστὰ καὶ τὰ ἄγνωστα διακρίνας· ἥδεγε λυσιτελεστάτη αὕτη μεταβολὴ, ἡ τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων εὐμαρεστέρας τε καὶ ἁπλουστέρας καὶ καθολικωτέρας ἀναδείξασα, τόν τε περικλεῆ Οὐϊέτον ἀπαθανατίσασα, μικρῷ πρόσθεν τοῦ 1600 ἔτους ἐγένετο.

Μετὰ δὲ Οὐϊέτον ἀνεφάνη Γυλιέλμου Οὐγρήδου Ἄγγλου

τὸ Μαθηματικὸν, ϗ Θωμᾶ Ἀριότȣ, Ἄγγλȣ ϗ αὐτȣ͂, τὰ συγγράμματα κατὰ τὸ 1631 ἔτος· ἐν δὲ τῷ 1637 ὁ μέγας τῆς Γαλλίας φωςὴρ Καρτέσιος ἐξέδοτο τὴν αὐτȣ͂ περίπυςον Γεωμετρίαν, ἣν ἄντις δικαιότερον προσείποι Συμβολικὸν λογισμόν. Κοινῇ μὲν ȣ͂ν οἱ Γεωμέτραι ȣ͂τοι ἐξέφηναν μὲν τὸν σχηματισμὸν τῶν συνθέτων ἐξισώσεων, διεῖλον δὲ τὰς ῥίζας εἰς λειπτικάς τε ϗ ὑπαρκτικὰς, εἰς ῥητὰς ϗ ἀῤῥήτȣς, ϗ τελευταῖον εἰς πραγματικὰς ϗ ἐπιπλάςȣς, πλήθει τε ἐφευρέσεων ϗ χρήσεων τὸν Συμβολικὸν λογισμὸν κατεπλȣ́τισαν· ὁδέγε κλεινὸς Καρτέσιος, τὸ ἀναλυτικὸν τȣ́τȣ μέρος ταῖς καμπύλαις ἐφαρμόσας, ἔργον ὑπέρμεγα ἀληθῶς, ȣ͂ ȣ̓δ' ἂν ὁ πᾶς αἰὼν ἐπιλάθοιτο, ἀξίως τῆς μεγαλοφυΐας αὐτȣ͂ ἐξετέλεσε, πολλὰ μὲν ἐπιλύσας αὐτὸς ȣ̔́τω προβλήματα, ἐφ' οἷς ἐπόνȣν διακενῆς οἱ πάλαι, πολλὰ δὲ καὶ τῶν Γεωμετρῶν τοῖς μεθ' ἑαυτὸν ἀφορμὴν δȣ̀ς ἐπιλύσασθαι, ϗ πολλὰς μεθόδȣς εἰς τὸ ἀκριβέςερον ἐξεργάσασθαι.

Τοιγαρȣ͂ν ȣ̔́τω τὸν Συμβολικὸν λογισμὸν, ȣ͂ Ἑλλὰς μὲν τὰς πρώτας γονὰς ἐκυοφόρησεν, Ἄραβες δὲ βρέφος μάλα νήπιον εἰς Εὐρώπην μετήνεγκαν, μέχρι Καρτεσίȣ γαλακτοτροφȣ́μενον, ἐξ ἐκείνȣ ȣ̓χ ὅπως εἰς ἄνδρας παραγγεῖλαι συνέβη, ἀλλ' ἐξαίσιόν τι κραιταωθῆναι, Ἡρακλῆν ἄλλον ἀτεχνῶς ἀναδειχθέντα, ῥοπάλῳ οἱονεὶ ὑπερφυεῖ πρὸς πάντα ἆθλον γενναίως ἀναδυόμενον· ἵνα γὰρ αὐτȣ͂ τὸ μέρος παραλίπω τὸ ὑψηλότερον, περὶ ȣ͂ λελέξεται προϊȣ͂σι, τοσαῦτα μετὰ Καρτέσιον ϗ τοιαῦτα προῆλθε τȣ͂ γένȣς τȣ́τȣ συγγράμματα, ὅσα, Ὅμηρος ἂν εἴποι,

φύλλα καὶ ἄνθεα γίνεται ὥρῃ· Ἐκ τούτου γὰρ Νεύτωνες καὶ Βάκωνες καὶ Λεϊβνίτιοι ὤφθησαν, οἱ ἐν τοῖς ἄθλοις τοῖς δε περικλεῶς ἀγωνισάμενοι· Οὐόλφιός τε ὁ Γερμενὸς, καὶ Μαρία Ἀγνησία ἡ μεγάλη τῆς Ἰταλίας φιλόσοφος, ὁ Γάλλος τε Καΐλλος, καὶ Μάριος καὶ Βεζούτιος καὶ Βοσσύτιος, ἐνδόξως ἐπόνησαν περὶ τοῦτο τὸ εἶδος τῆς Μαθηματικῆς, καὶ τὰ θαυμάσια ἡμῖν κατέλιπον αὐτῶν συγγράμματα. Τούτων δ᾽ ἁπάντων μακρῷ διήνεγκεν ὁ πολὺς τὴν δόξαν Εὔλερος ὁ Γερμανὸς, οὗ τὸ πολύκροτον σύγγραμμα ἐκ τοῦ λατινικοῦ ἰδιώματος εἰς τὴν Γαλλικὴν ἑρμηνευθὲν φωνὴν, ἐτυπώθη ἐν ἔτει 1773· τῷ δ᾽ ἐφεξῆς ἐν Παρισίοις ἐκδέδοται καὶ Σαυρίου (Sauri) ἡ πεντάτομος μαθηματικὴ σειρὰ, ἐξ ἧς κἀμοὶ τὰ πλείω τῶν τῇ ἀνὰ χεῖρας βίβλῳ ἐπεισαχθέντων ἀπήνθισται. Ἀρτίως δὲ καὶ Λακροΐου, τοῦ νῦν περιφήμου ἐν Παρισίοις διδασκάλου τῆς Μαθηματικῆς, καὶ ἄλλων παντὸς λόγου ἄξια συγγράμματα ἐδημοσιεύθησαν. Περὶ μὲν οὖν τοῦ Συμβολικοῦ λογισμοῦ ἅλις.

Τῆς δὲ Γεωμετρίας χαλεπὸν μὲν ἐπιεικῶς ἐξευρεῖν τὰ πρῶτα γενέθλια, καίτοι συχνοὶ (1) τοῖς περὶ τὸν Νεῖλον οἰκοῦσι τὴν τῆς ἐπιστήμης ἀπονέμουσιν εὕρεσιν, ὡς ἀνάγκης αὐτοὺς εἰς τοῦτ᾽ ἐναγούσης, ἵν᾽ εὐμαρῶς διακρίνειν ἔχοιεν τοὺς τῶν ἀγρῶν αὐτοῖς ὅρους, συγχεομένους ὑ-

(1) Ἡρόδ. Βιβλ. Β΄. Διόδωρ. Σικελ. βιβλ. Α΄. Μέτιθι δὲ καὶ Ἰώσηπ. Ἀρχαιολ. Βιβλ. Α΄. Κεφ. Θ΄. τὴν παρὰ τοῖς Αἰγυπτίοις μαθηματικὴν εἴδησιν διεξερχόμενον.

πὸ τῆς ἐτησίας τῦ ποταμῦ ἐπικλύσεως· Ἐκεῖνο μέντοι ἀμφιβολίας ἐκτός ἐςι πάσης μὴ ἐχὶ ἀρχαιότατόν τι πεφυκέναι τὸ χρῆμα· ἐπειδὴ γὰρ ἀρχῆθεν ἄνθρωποι χωρία σφίσιν ἤρξαντο νέμεσθαι, ἐδέησε δήπε ϗ τὰ εἰς τὴν τέτων καταμέτρησιν αὐτὲς προσευρεῖν. Ὅθεν ὁρμηθέντες ϗ μεθόδες ἄλλας ἐζήτησαν, δι' ὧν ἂν γνοῖεν ποταμῶν μὲν ἀδιαβάτων πλάτη, ὀρέων δ' ἀνεπιβάτων ϗ πύργων ὕψη, τειχέων δὲ πάχη ϗ τὰ τέτοις παραπλήσια· εἰκὸς δ' αὐτὲς, τὰ μὲν πρῶτα τῦ σκοπῦ ἀτευκτῆσαν, μετὰ δὲ πολλῶν ϗ ἀτρύτων πόνων ἀνευρεῖν τὲς κανόνας πρὸς τὴν τῦ σκοπεμένε ἐπίτευξιν. Πρῶτος μὲν ἐν Εὐκλείδης, ἒ ἄδηλός ἐςιν ἡ πατρὶς, πρὸ δύω περίπε ἐνιαυτῶν χιλιάδων τὰς εἰς ἑαυτὸν γνωσθείσας Γεωμετρικὰς ἀρχὰς εἰς ἓν συλλέξας, τὰ θρυλλέμενα ςοιχεῖα ἡμῖν τῆς ἐπιςήμης ταύτης προκατέβαλε, δι' ἃν ἁπανταχῦ γῆς ςοιχειῦν εἰώθασι τὲς μαθητιῶντας.

Εὐκλείδει δὲ μεθ' ὅλην σχεδὸν ἑκατονταετηρίδα Ἐρατοσθένης ἐπεγένετο, ϗ ὁ Γεωμετρῶν ἁπάντων νοός τε ὀξύτητι ϗ ἐφευρέσεων πλήθει ἅπασι μονενὲκ ἐξυμνέμενος ὕπατος Ἀρχιμήδης, ἒ πολλὰ μὲν ὁ πανδαμάτωρ ἐξηφάνισε χρόνος συγγράμματα, πολλὰ δὲ ϗ εἰς ἡμᾶς διεσώθησαν. Μετὰ δὲ Ἀρχιμήδην ἐ πολλῷ ὕςερον χρόνῳ Ἀπολλώνιος ἤκμασεν ὁ Περγαῖος, μέγας ἐπονομασθεὶς Γεωμέτρης· δεῖγμα δὲ τῆς τῦ ἀνδρὸς μεγαλοφυΐας τὰ σωζόμενα περὶ τῶν τομῶν τῦ Κώνε ἑπτὰ βιβλία· Καὶ Θεοδόσιος δὲ ὁ Τριπολίτης βιβλία τρία περὶ Σφαίρας ἡμῖν κατέλιπεν, ἀρίγνωτα τοῖς πᾶσι, ϗ τοῖς καθ' ἡμᾶς φροντιςηρίοις τοῖς

μαθητιῶσι προβαλλόμενα· Ἑξῆς δὲ Πτολεμαίȣ Κλαυδίȣ ἀκμάσαντος, Εὐτοκίȣτε τȣ͂ Ἀσκαλωνίτȣ, ϗ Φίλωνος, ϗ Νικομήδȣ, ϗ Σπόρȣ, ϗ Ἥρωνος, ἔσχατος μὲν Ἑλλήνων Γεωμετρῶν τῷ χρόνῳ, εἰς ἄκρον δ᾽ ἐληλακὼς τῆς περὶ τὰ Μαθηματικὰ παιδείας, ϗ τοῖς πρώτοις ἐγκαταριθμεῖσθαι δίκαιος, Πάππος ἐγένετο ὁ Ἀλεξανδρεὺς, ὁ περὶ τὴν α΄. ἀπὸ Χριςȣ͂ ἑκατονταετηρίδα βιώσας.

Τῶν μὲν ȣ͂ν Ἑλλήνων Γεωμετρῶν, ὧντε ἐμνήσθημεν, ϗ ὧν σιγῇ παρεδράμομεν, τȣ͂ λόγȣ σπεύδοντος, οἱ μὲν περὶ τὴν Γεωμετρίαν μαθηματικῶς ἠχολήθησαν, οἱ δὲ ϗ τῶν φυσικωτέρων ȣ̓κ ὤκνησαν ἅψασθαι, Ἀςρονομίας ἀμέλει, ϗ τῆς περὶ τὴν κατασκευὴν τῶν μηχανῶν ἀναςρεφομένης ἐπιςήμης, ϗ τῶν ἄλλων, ὧν ἤδη ἠγηόχοι εἰς φῶς ὁ χρόνος· ϗ οἱ μὲν μόνῃ τῇ ςοιχειώδει, οἱ δὲ ϗ τῇ ὑψηλοτέρᾳ, ἧς ἔργον ἡ τῶν καμπύλων γραμμῶν ἐξέτασις, προσέχον τὸν νȣ͂ν, ᾗ δῆλον καθίσαται τῷ μετὰ προσοχῆς μετιόντι τάτε περὶ αὐτῶν καθιςορȣ́μενα (1), ȣ̓ μὴν ἀλλὰ ϗ τὰ διασωθέντα ἡμῖν ἐκείνων συγγράμματα, ἐξ ὧν πᾶς ἄντις συνίδοι ὅσον ὀξυνοίας περιῆν τοῖς Ἀνδράσιν ἐκείνοις, ϗ ὅπως ἐπιμελῶς, ϗ εὐτυχῶς νὴ Δία, περὶ πολλὰ πεπονηκότες ἐγένοντο· ἀλλ᾽ ἦν ἀτεχνῶς, ᾗ ἐχρῶντο, ἡ μέθοδος πόνȣ τε πολλȣ͂ δεομένη, ϗ ἡμιτελής πως ἅτε δὴ πολλῶν μὴ ἐφικνȣμένη θεωρημάτων, διὰ τὸ συν-

(1) Ὅρα Βαλάνȣ τȣ͂ ἐξ Ἰωαννίνων τὸν πρόλογον τῆς τριτόμȣ Μαθηματικῆς αὐτȣ͂ ὁδȣ͂, ϗ Εὐγενίȣ τȣ͂ Βȣλγάρεως τὴν ἱςορικὴν ἀφήγησιν τὴν τῶν κατὰ Τακȣέτιον Γεωμετρικῶν ςοιχείων προταχθεῖσαν.

θετικῶς βαίνειν, καίτοι Ἀρχιμήδην τὴν τῶν νεωτέρων ἀναλυτικὴν μέθοδον, αὐτὸν μὲν ἐπίϛασθαι, τῶν ἄλλων δὲ ἐδενὶ ἔκπυσον ποιῆσαι, συχνοὶ παρέδωκαν.

Ἐκ δὲ τῶν ἡμετέρων παραδεξάμενοι οἱ τὴν Εὐρώπην οἰκῦντες τὰ τῆς Γεωμετρίας ἐναύσματα, καὶ φιλοτίμως περὶ τὴν αὐτῶν ἔχοντες περίθαλψιν, ἐδὲν ὅ,τι λαμπρὸν, ἢ δόξης παρασκευαϛικὸν ἐξετέλεσαν, εἰ ἢ λίαν πεπονηκότες ἢ ἐκ ἀγενῆ καταβεβληκότες τὴν σπεδὴν ἐφάνησαν· πρὶν ὁ πολὺς τὴν δόξαν Καρτέσιος τὸν Συμβολικὸν αὐτῇ, ὡς εἴρηται, ἐφαρμόσας λογισμὸν, ἢ ταύτην ἐκείνῳ, ἔτω φάναι, συγκαθολικεύσας, τῆ μὲν τὸ κράτος ὅσον, λαμπρῶς ἀπέδειξε· τῆς δὲ ἐχ ὅπως τὰ χαλεπὰ ἐξευμάρισεν, ἀλλὰ ἢ τὰ ὀλίγα ἐπλήθυνε, ἢ πολλὰ, τὸ πρὶν ἀνεπίλυτα δοκῦντα, τάχιϛα ἅμα ἢ εὐμαρέϛατα λυτὰ ἡμῖν πρῦθηκε, ἢ εἰς μέγαν ἔτω πυρσὸν τὸ τῆς Γεωμετρίας ἀνῆψε φεγγάριον· Οὐ μὴν ἀλλὰ ἢ τοῖς ἐπιγινομένοις ὑποθέσεις παραχὼν, τὸν ὑψηλότερον λογισμὸν ἀναφανῆναι, περὶ ἒ ἢ δὴ ἐρῦμεν, αὐτὸς κατέϛη παράιτιος.

Τῦτε τοίνυν τῦ καινοφανῦς δοκῦντος ὑψηλῦ λογισμῦ διμερῦς ὄντος, τὸ μὲν Λογισμὸς τῶν Ἀπειροϛῶν, θάτερον δὲ τῶν Ὁλοκλήρων ἡμῖν ὠνόμαϛαι· ἢ πατέρες μὲν αὐτῶν παρὰ μὲν Ἄγγλοις Νεύτων, Γερμανοῖς δὲ Λεϊβνίτιος γεραίρονται. ὅτι δὲ ἢ τοῖς παλαι, αἱ γῦν αὐτῦ βασιμώταται ἀρχαὶ ἐκ ἠγνοῦντο αὐτοὶ ἡμῖν εἰσι μαρτυρῦντες τῶν νεωτέρων οἱ ὕπατοι (1)· αὐτίκα Εὐκλείδης ἐν

(1) Σαύριος ἐν τῷ προοιμίῳ τῦ λογισμῦ τῶν Ἀπειροϛῶν, ἢ Λακροΐος (Lacroix) καὶ ἄλλοι συχνοὶ τὰ αὐτὰ μονονῦ συμφθέγγονται.

Προτάσει β΄. τοῦ ιβ΄. βιβλίου τοὺς τῶν κύκλων λόγους τοῖς τῶν ἐγγεγραμμένων τοῖς κύκλοις πολυγώνων τοὺς αὐτοὺς εἶναι δεικνὺς τῇ τῶν πλευρῶν ἐπαλλήλῳ διχοτομήσει, ἐπὶ τοσοῦτον τὸ πολύγωνον τῷ κύκλῳ ἐγγὺς φησὶ γίνεσθαι, ὡς τοῦτον διαφέρειν ἐκείνου ποσότητι ἁπάσης δεδομένης ἐλάσσονι· καίτοι ποσότης ἡ ἁπάσης δοθείσης ἐλάσσων, καὶ ποσότης ἀπειράκις μικρὰ, εἴτ' οὖν ἀπειροστὴ, τίνι ἂν ἀλλήλων διαφέροιεν; ἢ ψιλοῖς τοῖς τῶν ὀνομάτων ἀπηχήμασι, πράγματος τοῦ αὐτοῦ ἑκατέρωθι ἐμφαινομένου· ἀλλ' ἀδελφὰ τῷ Εὐκλείδῃ ἴδοι τις ἂν ἐπιστήσας τὸν νοῦν καὶ Ἀρχιμήδην, καὶ Ἀπολλώνιον, καὶ Πάππον καὶ ἄλλους τῶν παλαιῶν Γεωμετρῶν, πολλαχοῦ τῶν καθ' ἑαυτοὺς συγγραμμάτων φρονήσαντάς τε καὶ γράψαντας. Ταύτης οὖν τῆς ὑψηλῆς ἐπιστήμης, ἧς ἴχνε' ἄττα καὶ ἀμυδρὰς ἐννοίας, καὶ ψιλὰς ὡς εἰπεῖν τὰς ἀρχὰς οἱ πάλαι κατεῖχον, ὁ μέγας Νεύτων ὑπὸ Καρτερίου διὰ τοῦ Συμβολικοῦ λογισμοῦ τὰς καμπύλας τῶν γραμμῶν ἀνασκοπεῖν ἐναχθεὶς, νοὸς ὕψει ὑπερφυεῖ καὶ πόνοις ἀτρύτοις χρησάμενος, πατὴρ ἀνεδείχθη περικλεέστατος, τὸν δίδυμον ἡμῖν προβαλὼν τοκετὸν, εἴτ' οὖν, ὡς αὐτὸς ὁ τεκὼν ἔχαιρεν ὀνομάζειν, τὸν λογισμὸν τῶν ῥοῶν, καὶ τὸν τῶν ῥεόντων· ἀλλὰ γὰρ ἐκείνου κυοφοροῦντος ἐν Ἀγγλίᾳ, καὶ περὶ τὰς ὠδῖνας ἔχοντος, ὁ ἐν Γερμανίᾳ Λεϊβνίτιος, μέγας καὶ οὗτος ἀνὴρ τήν τε Μαθηματικὴν, καὶ τ' ἄλλα εἴδη τῆς Φιλοσοφίας, φιλοτίμως πρὸς τὸν Ἄγγλον φιλόσοφον ἔχων, καὶ περὶ καλλίστων τῶν τῆς φιλοσοφίας σπουδασμάτων ἐν ἐκείνοις τοῖς χρόνοις φιλονεικῶν, ἀντίγραφά τινα τῆς Νευτωνείου σπουδῆς ὑφαρπάσαι, φίλων

πρὸς τῶν ὑπουργησάντων, δεδύνηται. Ταῦτα τοίνυν ὁ Γερμανὸς φιλόσοφος περισκοπήσας ἀτενῶς, καὶ ὅσον τῷ Ἄγγλῳ δόξης ἐκ ταύτης τῆς ἐπινοίας παρέψεσθαι ἔμελλε, κατανοήσας, ἵν᾽ αὐτὸς τῆς δόξης ταύτης τύχῃ, φιλοτιμωτάτην τὴν ἅμιλλαν περὶ τούτου ὤφθη ποιησάμενος· καὶ δὴ ἐν οὐ βραχεῖ μὲν ἀλλήλων ἀπέχουσι χώροις, ἐν χρόνῳ δὲ τῷ αὐτῷ δυοῖν πολλῶν καὶ μεγάλων τὴν σοφίαν ἀνδρῶν Νεύτωνος, καὶ Λεϊβνιτίου ἡ τοῦ Λογισμοῦ τῶν ἀπειροστῶν, καὶ ἡ τῶν ὁλοκλήρων ἐπιστήμη προῆλθεν· εἰσὶν οὖν οἳ διατείνονται, καὶ τυχὸν οὐκ ἀλόγως, ἄδικον φεύγειν τὴν κλοπῆς γραφὴν τὸν Γερμανὸν φιλόσοφον. ἀλλ᾽ ἅμα ἑκάτερον ἰδίᾳ περὶ τὰ αὐτὰ πράγματα ἀσχοληθέντας, καὶ τὴν αὐτὴν ἀλήθειαν παρατετηρηκότας ἐξενεγκεῖν οἵους τε γενέσθαι τὴν θαυμαζομένην ταύτην ἐπιστήμην, ἣν ἐν διαφόροις ἐσήμαναν τοῖς ὀνόμασι· ὃ μὲν γὰρ ἐκείνῳ προσείρηται ῥοὴ (fluxion), τῷ Λεϊβνιτίῳ κέκληται διαφορά· ὃ δ᾽ ἐκείνῳ ῥέον (fluente) τούτῳ (integral) ὁλόκληρον. ἀλλ᾽ ὅπως ἂν ἔχοι τὰ περὶ τούτων, ἐκεῖνο μέντοι παντὸς ἀληθέστερον παρὰ πάντων καθομολογεῖται· διὰ ταύτην γὰρ τὴν ἐπιστήμην πλήρης μὲν ἐγένετο ἡ Ἀστρονομία καινῶν ἐφευρέσεων, πλήρης δὲ ἡ μηχανική, πλήρης δὲ γενικῶς εἰπεῖν ἅπασα ἡ περὶ τὴν φύσιν στρεφομένη πραγματεία. Διὸ δὴ ὑπὲρ ταύτης Νεύτωνι καὶ Λεϊβνιτίῳ ἀθάνατον περιέσαι τὸ κλέος

Οἱ μὲν οὖν περὶ τοῦ λογιστικοῦ τούτου εἴδους μετ᾽ αὐτοὺς γεγραφότες πολλοὶ ἐγένοντο καὶ ἀγαθοὶ δι᾽ ὅλης τῆς παρελθούσης ἑκατονταετηρίδος, οἳ καὶ ἐπὶ τὸ τελειώτερον αὐτὴν ἤγαγον, οἱ μὲν ἐν ταῖς καθ᾽ ἑαυτοὺς μαθηματικαῖς σει-

ραῖς ϗ περὶ ταύτης διαλαβόντες τῆς ἐπιςήμης, οἱ δὲ ταύτην μόνην ποιησάμενοι πρόθεσιν, ὧν ἐςὶν εἷς ὁ καθ' ἡμᾶς ἐν Παρισίοις κλεϊζόμενος Λακρόϊος, πάνθ' ὅσα τοῖς πρότερον περὶ τȣ́τȣ τȣ̃ λογισμȣ̃ ἀνεύρηται εἰς ἓν ἀθροίσας, ϗ ȣ̓δενὶ τῶν νῦν ὑπερβολὴν ἐν τȣ́τῳ καταλιπὼν, ὡς ἐπιμαρτυρȣ̃σι πάντες, ϗ ἑκάςῳ πάρεσιν ἰδεῖν μετελθόντι τὴν δίτομον αὐτȣ̃ πραγματείαν τȣ̃ τῶν Ἀπειροςῶν, ϗ Ὁλοκλήρων λογισμȣ̃, τὴν ἐν ἔτει 1797 ἐκδοθεῖσαν, ἣ ϗ τρίτον προσέθετο τόμον περὶ σειρῶν ἐκδοθέντα κατὰ τὸ 1800 ἔτος. ϗ ȣ̓́τω μὲν τὸ τῆς καθαρᾶς Μαθηματικῆς χρῆμα, ὡς διὰ βραχέων εἰρήκαμεν, ἐκ παλαιοτάτων χρόνων ἀρξάμενον τοῖς ἐκ τῶν κατὰ τὴν Εὐρώπην ἐθνῶν προήχθη τε εἰς μέγα, ϗ ȣ̓́τως ἐξείργασαι, ὡς μεδένα διαμφισβητεῖν μὴ ȣ̓χὶ ταύτην μόνην ὑπάρχειν ἐπιςήμην, βεβαίαν δήπȣ γνῶσιν ϗ ἀναμφήριςον, ϗ διὰ μόνην ταύτην πολλαῖς ϗ ὠφελιμωτάταις καταπλȣτισθῆναι τὸν βίον εἰδήσεσιν.

Ἡ δὲ φυσικωτέρα, ϗ ὡς τοῖς νεωτέροις φίλον ὀνομάζειν, ἡ μικτὴ Μαθηματικὴ, ἔςι μὲν, ἦ δῆλον παντὶ, ἐκείνης πρεσβυτέρα, ϗ ȣ̓́τω φάναι μήτηρ αὐτῆς ϗ τροφός. Γεωμετρεῖν γὰρ πρακτικῶς ϗ Ἀςρονομεῖν ἀρξάμενοι ἄνθρωποι τὴν γενικὴν ϗ ἀφῃρημένην ἐξήνεγκαν θεωρίαν τῆς τȣ̃ διαςήματος ἐκμετρήσεως· τετελείωται δὲ ϗ ἐξηκρίβωται ἡ γραῦς ὑπὸ τῆς παιδὸς, ϗ οἱονεὶ θρέπτρα ἀπέχει ταῦτα, τὸ ἐμπλῆσαι πᾶσαν τὴν φυσικὴν ἐπιςήμην τῶν θεωρημάτων ἑαυτῆς, μᾶλλον δὲ ἐκείνην τρέψαι ϗ, ȣ̓́τω φάναι, μετȣσιῶσαι εἰς ἑαυτήν· καίγε εἰκότως· ἐπεὶ γὰρ τοῖς σώμασιν ἀναγκαίως συνῆπται ἔκτασις, ϗ

βάρος, ϗ κίνησις, ϗ ἐφέλκυσις κτλ. ταῦτα δὲ ὡς ποσὰ θεωρούμενα μαθηματικῶν θεωρημάτων ὑπόθεσις γίνεται, ὁ τῆς Φυσικῆς ἐπιςήμης τὴν Μαθηματικὴν ἀποσπάσαι ϗ ἀπαλλοτριῶσαι, πειρώμενος, ὐδὲν ἔλαττον, εἰ μὴ ϗ μᾶλλον, ἔςαι καταγέλαςος, ἢ εἴτις τῶν σωμάτων τὰς εἰρημένας ἰδιότητας ἀποςερεῖν ἀνηνύτως καταναγκάζοιτο. Ταῦτ' ἄρα τοῖς τε πάλαι ϗ τοῖς καθ' ἡμᾶς, εἴπερ ἄλλοτε, ὐδὲν ἐγένετο τῆς ἀφῃρημένης Μαθηματικῆς σπόυδασμα, ὃ μὴ παρέχοιτο τῷ κοινωνικῷ βίῳ τινὰ ξυντέλειαν· διὸ Ἀςρονομία τε, δι' ἣν αἰνεῖται κατὰ τὸν ψαλμῳδὸν ὁ Κύριος (1), ϗ Ναυτιλία, ϗ Μηχανικὴ, ϗ Ἀρχιτεκτονικὴ, ϗ Ἀεροςατικὴ, ϗ Ὑδραυλικὴ, ϗ ἡ τῶν ὅπλων ἐπιςήμη, ϗ μυρίαι ἄλλαι, αἳ τὐς καθ' ἡμᾶς κλεΐσασαι χρόνυς, ϗ ἀγαθῶν ἀγαθίδας, τὸ τῦ λόγυ, ἀνθρώπῳ δωρησάμεναι, ἐκ τῆς τῶν Μαθηματικῶν ἐπήγασαν ἐπιςήμης· τὰ γὰρ τοῖς πάλαι ἐξευρημένα παραλαβόντες οἱ ὕςερον Γαλιλαῖοι, ϗ Καρτέσιοι, ϗ Νεύτωνες, ϗ Λεϊβνίτιοι, ϗ Οὐόλφιοι, Καΐλλοίτε ϗ Εὔλεροι, ἄλλος ἄλλο ἐπινοῦντες, ϗ ἐφευρίσκοντες, ϗ τάξιν τοῖς προευρημένοις ἀποδιδόντες, τῶν Φυσικομαθηματικῶν καλυμένων πραγματειῶν τὴν χρυσῆν ἡμῖν ἔπλεξαν σειρὰν, ᾗ τὰ σοφὰ τῶν νῦν Εὐρωπαίων ἔθνη (2) περιφανῶς ἐγκοσμεῖται ϗ ἐναβρύνεται.

(1) Δαβίδ ψαλμ. ρμή.

(2) Τὰ περὶ ἑκάςης μαθηματικῆς ἐπιςήμης ἱςορύμενα περίτε ἀρχῆς ϗ προόδυ αὐτῆς εὑρήσει ὁ βυλόμενος ἐν τῷ τῆς Ἐγκυκλοπαιδείας λεξικῷ· βραχέα γὰρ ἄττα ἡμῖν ἐνταῦ-

Ἀλλ' ἡ Ἑλλὰς ἡ τοὺς Φιλοσόφους ἐνεγκαμένη, καὶ θρέψασα, ἡ τὴν Εὐρώπην πᾶσαν παιδεύσασα, δι' ἣν τοσαῦτα καὶ τοιαῦτα ἀγαθὰ τοῖς νῦν εὐνομουμένοις περίεστιν ἔθνεσι, δουλείας καθυπαχθεῖσα ἀπηνεστάτῳ ζυγῷ, ἀπεστέρηται μὲν τῶν προτέρων τῆς σοφίας αὐτῆς θησαυρῶν, γεγύμνωται δὲ τῶν περικλεῶν ὡραϊσμῶν, καὶ Καρτεσίων καὶ Νευτώνων ἐν τῇ εὐεργετηθείσῃ Εὐρώπῃ ἀκμαζόντων, ἡ δὲ ἔκειτο πένης καὶ κατηφὴς, καὶ ταύτην

Κατ' ὀφθαλμῶν ἐρεβεννὴ νὺξ ἐκάλυψεν
Ἤριπε δ' ἐξοπίσω, ἀπὸ δὲ ψυχὴν ἐκάπυσσε,
Τῆλε δ' ἀπὸ κρατὸς χέε δέσματα σιγαλόεντα.

Ἐφ' οἷς ἀνυποίστοις ὑπέστη δεινοῖς· καὶ ἐν τοσούτῳ πλήθει κακῶν οὐδὲν περισκοποῦσα ἡ τάλαινα ἦν, ἢ ὅπως τῇ τῶν ὀρφανῶν αὐτῆς τέκνων ἐπαρκέσει πενίᾳ τε καὶ γυμνότητι. τὴν δὲ τῶν εὖ παθόντων ἐπισταμένη ἀγνωμοσύνην, παρὰ τῶν ἰδίων ἑαυτῆς τέκνων ᾐτεῖτο, τῶν ἀλγηδόνων τε θεραπείαν, καὶ τῶν πόνων ἀνάπαυλαν, εἰδυῖα δὲ μόνην τὴν φιλοσοφίαν τἀγαθὰ πάντα ἐξευρίσκουσαν, καὶ κατασκευάζουσαν, καὶ πρὸς τὰς πράξεις ἀνθρώπους παιδεύουσαν, καὶ πρὸς ἀλλήλους πραΰνουσαν, καὶ τῶν συμφορῶν τάς τε δι' ἀμαθίαν, καὶ τὰς ἐξ ἀνάγκης γιγνομένας, διαιροῦσαν, ἐπὶ ταύτην παρεκάλει τὰ τέκνα αὐτῆς, ὀδυρομένη καὶ κλαίουσα· Πρῶτοι τοίνυν, εἰδήτινες καὶ ἄλλοι, οὓς ἐνταῦθα καθιστορῆ-

θα παρατέθειται, ἃ κυριώτερα ἔδοξεν, ἵν' εἰδέναι ἔχοιεν τῶν Μαθηματικῶν οἱ θιασῶται, οἷου χρήματος οὔσης τῆς Μαθηματικῆς, σφᾶς αὐτοὺς τῇ περὶ αὐτὴν σπουδῇ παρέξεσθαι μέλλουσι.

σαι τοῦ παρόντος καιροῦ οὐκ ἔστιν, ἀκηκοότες τῆς παρακλήσεως ἐγένοντο, Μεθόδιος ὁ Ἀνθρακίτης ὁ ἐξ Ἰταλίας εἰς τὴν Ἑλλάδα σὺν ἄλλοις παιδεύμασι ϗ τὰ Μαθηματικὰ μετακομίσας ὄργια, ϗ ὁ τούτου ἀκουστὴς γενόμενος ἐξ Ἰωαννίνων Βαλάνος, ὁ τὴν ἅπασι γνωρίμην τρίτομον ὁδὸν τῆς Μαθηματικῆς ἐκδοὺς, ϗ ἐπιμελῶς ϗ φιλοπόνως τοῖς αὐτοῦ φοιτηταῖς παραδούς· μετὰ δὲ τούτους πληρέστερόν τε ϗ ἀκριβέστερον κατέβαλον τὰ τῆς σοφίας σπέρματα ταῖς τῶν δυστυχῶν Ἑλλήνων ψυχαῖς, ὁ μέγας τὴν σοφίαν ϗ τὸ κλέος ὁ Ἀοίδιμος Εὐγένιος ὁ Βούλγαρις, δι' ὅλης πενταετείας κατὰ τὴν Ἀθωνιάδα σχολὴν διδάξας, ϗ Νικηφόρος ὁ Θεοτόκης, εὐεργέται ἀναδειχθέντες ἀμφότεροι τῆς Ἑλλάδος. Τούτοις οὖν τῶν συγγραφέντων, ϗ τύποις ἐκδοθέντων, συχνοὶ ἀπολαύσαντες, τὰς πρὶν ἐπιπολαζούσας σχολαστικὰς ἐρεσχελείας τῶν φροντιστηρίων ἐξώσαντες, διὰ τῶν ὑγιῶν ἐκείνων λόγων τοὺς σφίσι προσφοιτῶντας στοιχειοῦν ἐπειρῶντο· οὐ μὴν ἀλλὰ ϗ τοῦ σκοποῦ τούτου οὐκ ὀλίγοι εὐτυχῶς πάνυ κατεστοχάσαντο, πνεύματος ἀγχινοίᾳ, ϗ πόνοις γενναίοις χρησάμενοι (1)· ϗ οὕτως ἄρα συνάμα τοῖς

(1) Ἑνὸς ἐξέστω μοι ἐπιμνησθῆναι ἐνταῦθα, Ἰωάννου τοῦ οἰκονόμου ϗ διδασκάλου τῆς ἐν Θετταλίᾳ Τυρνάβου, ἀνδρὸς ταχύτητι νοὸς ϗ ἀκαμάτῳ διαπρέψαντος φιλοπονίᾳ, ϗ Σωκρατικὸν μὲν ἐν τοῖς ἤθεσι τρόπον ἐπιδειξαμένου, τὸν δ' ἅπαντα αὐτοῦ βίον ἀγῶνα μέγιστον ὑπὲρ τῶν λόγων ἐνστησαμένου· οὐ γὰρ ἦν μᾶλλον διδάσκαλος, ἢ πατὴρ τῶν ἑαυτοῦ ὁμιλητῶν. Τούτου τοίνυν μετὰ τὰ γραμματικὰ πολλῶν ἀκουσάντων τὴν Εὐγενίου Λογικὴν ϗ Μεταφυσικὴν, τὰ κατ' Εὐκλείδην Γεωμε-

διαλεκτικοῖς, ϗ ἃ τοῖς εἰρημένοις Ἀνδράσι συγγέγραπτο, ἐν πᾶσι μονονὲ τοῖς ἐν τῇ Ἑλλάδι φροντιςηρίοις τοῖς φοιτῶσιν ἐδιδάσκοντο· ϗ ἐκ ἀμυδρὸν μὲν ἦν ἐντεῦθεν τὸ διαδιδόμενον φῶς, διακαὴς δ' ἀνέφλεγε τὰς καρδίας τῶν ἀκθόντων ταῦτα ὁ ζῆλος τὲ ϗ πλείω, ϗ τελειότερα τέτων, εἴπερ εἴη, προσκτήσασθαι· διὸ οἱ μὲν παρὰ τὰς ἐν σοφίᾳ ὑμνεμένας τῶν εὐρωπαίων πόλεων ἀπεδήμεν, ἵν' ἄρα τὰ τῆς σοφίας ἀγαθὰ, ὡς οἱ πατέρες ἡμῶν ἀπ' Αἰγύπτε, εἰς τὴν Ἑλλάδα μετενέγκοιεν· οἱ δὲ ϗ τῶν ἐν Ἑλλάδι τὰς διατριβὰς ποιεμένων Εὐρωπαίων σοφῶν, ὅσοι ἂν εἶεν ἀγαθὰ ϗ φίλα φρονεντες τοῖς Ἕλλησιν, ἀναποσπάσως περιείχοντο, ἵνατι ϗ μετάσχοιεν τῶν τῆς Εὐρώπης παιδευμάτων. Ἀλλ' ἐν τέτοις γενομένε τὲ λόγε, ἐθ' ὅσιον ἔτε δίκαιον ἂν εἴη σιγῇ παραδραμεῖν τὸν ἐκ Κεφαλληνίας δαιμόνιον Σπυρίδωνα τὸν Ἀσάνην, τὸν ἰατρὸν ϗ φιλόσοφον, ὃς ἐν Θεσσαλονίκῃ πολλῶν ἀντάξιος ἄλλων ἰατρὸς ὑπάρχων, τόντε κατὰ Καΐλλον τὸν Γάλλον Συμβολικὸν λογισμὸν, ϗ Γεΐδωνος Γράνδε τὴν τῶν κωνικῶν τομῶν σύνοψιν, εἰς τὴν Ἑλλάδα φωνὴν, Ἀνδρὸς φιλομαθὲς, ϗ τὰ εἰρημένα ἀκηκοότος μαθήματα πρὸς τὲτο αὐτὸν ἐποτρύναντος, μετήνεγκεν· ἐμὴν ἀλλὰ ϗ ἡρμήνευσε τοῖς ἐκεῖθι ἐσιν· ὕστερον δὲ ϗ

τρικὰ ςοιχεῖα, τὴν κατὰ Νικηφόρον τὸν Θεοτόκην Φυσικὴν, ϗ ἄλλα συχνὰ, αὐτὸς εἰμὶ πάντων ἐλάχιςος· ἀλλὰ φεῦ τῆς δυςυχίας! πέρυσι τῆς ἐν τέτῳ καυχωμένης Θετταλίας κὴρ μέλαινα ἀφήρπασε τὸν κλεινὸν Ἰωάννην, τῆς πρὶν δόξης αὐτὴν ςερήσασα· αἰωνία σε ἡ μνήμη Ἰωάννη ἀοίδιμε, πάτερ κοινὲ, ϗ εὐεργέτα τὲ ἔθνες σε!

εἰς Θετταλίαν ἐπὶ σωτηρίᾳ τῶν καμνόντων κληθεὶς, διὰ πολλῶν μὲν ϗ ἄλλων ἐποίησεν εὖ τὰ καθ' ἡμᾶς φροντιςήρια· μάλιςα δὲ τὰ εἰρημένα Γεωμετρικὰ σπȣδάσματα ἀναπτύξας πολλοῖς τῶν διδάσκειν λαχόντων· ἀλλ' ἴσασι μονονȣ πάντες, ὅσον Ἀσάνης ἀξίως ἑαυτȣ ἐπόνησε, ὅπως τȣς ὁμογενεῖς αὐτȣ τὸν προγονικὸν τῶν ἀγαθῶν ζῆλον ἀναλαβόντας κατόψεται, τȣτο μόνον σκοπῶν. Ταῦτα ζηλωτέον ϗ τοῖς ἄλλοις τῶν ὁμογενῶν Ἰατρῶν, ἵν' αὐτοίτε ϗ φήμην ϗ μνημην ϗ δόξαν ϗ ζῶντες ἄρωσι ϗ τελευτήσαντες καταλίπωσιν ἀθάνατον, ϗ τὴν φίλην Ἑλλάδα τȣ δεινȣ πτώματος ἐξεγείρωσιν.

Οὕτως ȣν ἡ Ἑλλὰς τῷ περὶ τὴν φιλοσοφίαν διεγερθεῖσα ἔρωτι, ϗ ȣτω τὰς ἀφορμὰς δεξαμένη τῶν λόγων, διατρέχει προθύμως ἤδη τὸ θαυμάσιον ςάδιον· ἀλεῖπται δὲ αὐτῆς ἐφεςήκασιν ἄοκνοι οἱ σοφοὶ τῶν νῦν ἑλληνικῶν φροντιςηρίων καθηγεμόνες ϗ διδάσκαλοι, ἀποβαλόντες μὲν τὰς ματαίας, ȣ μὴν ἀλλὰ ϗ ὀλεθρίȣς, γραμματικὰς συζητήσεις ϗ ἔριδας, ἐκ δὲ τῶν ἐν Εὐρώπῃ Ἀκαδημιῶν μετακομίσαντες τὸν ὑγιᾶ τȣ φιλοσοφεῖν τρόπον, ϗ πρὸ πάντων τὰ Μαθηματικὰ ὄργια· νῦν ἐν Βȣκȣρεςίοις Κωνςαντῖνος ὁ Βαρδαλάχος· ἐν Βυζαντίῳ Δωρόθεος ὁ Πρώϊος· ἐν Χίῳ Ἰωάννης ὁ Σελεπῆς· ἐν Κυδωνίαις Βενιαμὶν ὁ Λέσβιος, ϗ ἄλλοι ἀλλαχȣ, Ἄνδρες ἀληθῶς Ἕλληνες, φιλόσοφοι πάντες, πάντες δεινοὶ τὴν Μαθηματικὴν, τοῖς σφίσι προσφοιτῶσι περιτιθέασι τὸν τῆς σοφίας ςέφανον· νῦν ὁ πλȣτος συνεφάπτεται τȣ ἔργȣ τοῖς ὑπὲρ τῆς Ἑλλάδος πονȣσι· τίς ἀγνοεῖ τὰς μεγαλοδώρȣς χάριτας τῶν γνησίων τῆς

Ἑλλάδος τέκνων, τῶν ἐκ Ζωσιμᾶ φημὶ τετραδέλφων, τῶν Ἰωαννίνων τὴν δόξαν; τίς οὐχ᾽ ὁμολογεῖ μὴ οὐχὶ τὰς θεσπεσίας αὐτῶν ψυχὰς ἐν τοῖς νῦν καιροῖς ἐπ᾽ αὐτὸ τοῦτο καταπεμφθῆναι ἡμῖν, ἐφ᾽ ᾧ κοινὸν ἀγαθὸν τῆς Ἑλλάδος γενέσθαι; ἀλλὰ γὰρ Ζωσιμαδῶν τὸ κλέος ὀλεῖται οὐδέποτε· νῦν οἱ ἀληθεῖς τοῦ Χριστοῦ ποιμένες, τοὺς θείους τῆς ἐκκλησίας ἱεράρχας ζηλοῦντες, αὐτοίτε τὴν σοφίαν ἀγαγέσθαι ἑαυτοῖς νύμφην, κατὰ τὸ Σολομώντειον, σπεύδουσι, καὶ τὰς λογικὰς αὐτῶν ποίμνας εἰς τὰς τῶν λόγων ποδηγετοῦσι νομάς· οὐ γὰρ λέληθεν αὐτοὺς τὸ τοῖς Γενάρχαις ἐπιταχθὲν „ἀπὸ παντὸς ξύλου τοῦ ἐν τῷ παραδείσῳ βρώσει φαγῇ" ὃ τὴν ἁπάσης θεωρίας καὶ γνώσεως ἄνετον μέθεξιν ἐμφαίνειν πολλοῖς καὶ ἄλλοις τῶν θείων Πατέρων ἡρμήνευται καὶ δὴ καὶ τῷ ἐκ Δαμασκοῦ Ἰωάννῃ (1)· Πολλοὺς ἐγὼ οἶδα μουσεῖα καθιδρύοντας, μισθοὺς τοῖς ἐν αὐτοῖς καθηγηταῖς τελοῦντας, καὶ πάντα πράττοντας ἐνθουσιωδῶς, ἵν᾽ ἡμῖν ἀνακαλέσωσι τὴν φιλοσοφίαν, καὶ τὰ ἐκ ταύτης ἀγαθὰ, κἂν διαῤῥαγῶσιν οἱ ἡμῖν ἐπιβασκαίνοντες, ἀμαθίαν καὶ μῖσος τῆς παιδείας τοῖς καθ᾽ ἡμᾶς ἐπεγκαλοῦντες Ἱεράρχαις (2

(1) Ὀρθοδ. Πίστ. Κεφ. ΚΕ΄.

(2) Μετὰ Παΰϊον καὶ Βεϊκάρδον τοὺς Γερμανοὺς, καὶ πολλοὺς ἄλλους, ἀμαθίαν καὶ κακίαν ἅπασαν τῷ τῶν Γραικῶν ἔθνει προσάψαντας, ἀρτίως αὐτῷ ἐπενέβη ὁ κατὰ τὸ 1803 —1804 ἔτος τὴν Ἑλλάδα περιελθὼν Βορούσος, ὃς ἐν τῷ πέρυσιν αὐτοῦ ἐκδοθέντι βιβλίῳ, οὗ ἐπιγραφὴ, Bruchstücke zur nähern Kenntniß des heutigen Griechenlands gesammelt von J. L. P. Bartholdy, ἐν πολλοῖς, οἷς τῶν Γραικῶν πικρῶς καὶ

συνελόντι δὲ φάναι, νῦν ἅπαντες συνεωράκασιν, ὃ περὶ Ἀθηνῶν Ἰσοκράτει εἴρηται ἐν τῷ Πανηγυρικῷ λόγῳ, περὶ μὲν τὰς ἄλλας πράξεις οὕτω ταραχώδεις οὔσας τὰς τύχας, ὥστε πολλάκις ἐν αὐταῖς καὶ τοὺς φρονίμους ἀτυχεῖν,

δυσμενῶς καταφέρεται, καὶ ταῦτα προστίθησι „Ein unwissender und abergläubischer Clerus herrscht überall etc.. εἴτ' οὖν ἀμαθὴς καὶ δεισιδαίμων κλῆρος πανταχοῦ (τῆς Ἑλλάδος) ἔτι ἐπικρατεῖ, ὅς τις (φησὶν ὁ συκοφάντης) κωλύει τὴν ἐπὶ τὴν παιδείαν τῶν Γραικῶν πρόοδον· ἀλλὰ πῶς ἁπανταχοῦ τοὺς ὀφθαλμοὺς ἔμυσεν ἡμῖν ὁ Ἀνήρ; οἱ μὲν γὰρ ἀμβλυωποῦντες, ἵνα μὴ εἴπω τυφλώττοντες, πρὸς τὸ φῶς τῆς παιδείας εἰσὶν ἔτι κακῇ τύχῃ τινὲς ἐν τῇ Ἑλλάδι· τοὺς δὲ ἀγαθοὺς ποιμένας, τοὺς φιλολόγους καὶ φιλοσόφους ἱεράρχας, οὐδαμοῦ τῆς Ἑλλάδος ἑώρακεν, ὁ πᾶσαν περιελθὼν τὴν Ἑλλάδα; ἐγὼ δὲ τὸν μὲν τῆς Οὐγκροβλαχίας φιλόσοφον ἱεράρχην παρίημι, ὃν πάντες οἱ εἰδότες τὸ φιλογενὲς καὶ μιλόμουσον ἦθος ἀξίως γεραίρουσιν· ὧν δὲ οἶδα πολλῶν νὴ Δία καὶ ἐνθουσιωδῶς ἐχόντων περὶ τὰς Μούσας, δυοῖν ἐνταῦθα μνησθήσομαι· τοῦ πρὶν μὲν Λάρισσαν τὴν ἐμὴν πατρίδα κοσμήσαντος, καὶ μουσείοις αὐτὴν καταπλουτίσαντος, νῦν δὲ τῆς Ἐφέσου τὸν ἀρχιερατικὸν θρόνον σεμνύνοντος, Διονυσίου Βυζαντίου τοῦ Καλλιάρχου, καὶ τοῦ τῆς Ἐλασσῶνος ἀγαθοῦ Ἀρχιερέως Ἰωαννικίου· τούτων τὸν μὲν τιμᾷ μὲν καὶ ἐγκωμιάζει ἡ εὐεργετηθεῖσα Λάρισσα, ἀγαπᾷ δὲ καὶ ἐκθειάζει ἡ εὐεργετουμένη Ἔφεσος, ἣ κατὰ θείαν προμήθειαν αὐτοῦ λαχοῦσα, ἵνα κηδεμὼν ᾖ καὶ προστάτης τῆς ἐν Κυδωνίαις ἀρτισυστάτου ἑλληνικῆς σχολῆς· θατέρῳ δ' ἐγκαλλωπίζεται ἡ Ἐλασσών, ἀπολαύουσα αὐτοῦ τῆς φιλοσόφου προνοίας, ἧς ἔργον ἐγένετο ἡ στερέωσις τοῦ ἐν Σαρισάνῃ ἑλληνικοῦ φροντιστηρίου. Ἀλλὰ ζώητε ἱεράρχαι ἀληθεῖς ἐπιμήκιστον, καὶ μὴ κάμοιτε τήν τε Ἑλλάδα εὐεργετοῦντες, καὶ τοὺς ἄλλους τῷ ἰδίῳ ὑμῶν ὑποδείγματι ἐπὶ τ' ἀγαθὰ παροτρύνοντες!

ϗ τὲς ἀνοήτες κατορθȣ̃ν, τῶν δὲ λόγων ὀ μετὸν τοῖς φαύλοις, ἀλλὰ ψυχῆς εὖ φρονέσης ἔργον ὄντας, τὲς τε σοφὲς, ϗ τὲς ἀμαθεῖς δοκȣ̃ντας, ταύτῃ πλεῖςον ἀλλήλων διαφέροντας· διὸ δὴ μȣσείων ἐν βραχεῖ χρόνῳ ἐμπέπλησαι ἡ Ἑλλὰς, ϗ βίβλοις παντοίαις πεπλȣ́τισαι, ϗ διδασκάλων εὐμοίρησε πλȣσίᾳ χειρὶ καταβαλλόντων τῆς σοφίας τὰ σπέρματα· ϗ πάντων ταῖς ψυχαῖς ἀνῆπται τὸ ἔνθεον τῆς Παιδείας πῦρ. παντοίως σπευδόντων, ϗ ἑκάςȣ τὸν παρ ἑαυτȣ̃ συνεισφερόντων ἔρανον, εἴπως αὐτοῖς γένοιτο ἀποσκεδάσαι τὸν τῆς ἀμαθίας ζόφον σὺν αὐτῇ τῇ αἰχύνῃ, ὑπὲρ ὧν ἐκ τῶν νῦν ἐθνῶν τῆς Εὐρώπης ὑφιςάμεθα ἐλέγχων· καί μοι δοκȣ̃σιν ἐν τῇ ἀγαθῇ ταύτῃ ἁμίλλῃ παροτρύνειν ἀλλήλȣς διὰ τῶν ὁμηρικῶν ἐκείνων ἐπῶν

> Ὦ φίλοι, ἀνέρες ἐςὲ, ϗ αἰδῶ θέσθ' ἐνὶ θυμῷ
> ἄλλων ἀνθρώπων· ἐπὶ δὲ μνήσασθε ἕκαςος
> παίδων ἠδ' ἀλόχων, ϗ κτήσιος, ἠδὲ τοκήων,
> τῶν ὕπερ ἐνθάδ' ἐγὼ γȣνάζομαι. . . .
> ἑςάμεναι κρατερῶς, μηδὲ τρωπάασθαι φόβονδε

Τοιαύταις ȣ̃ν διανοίαις χρωμένων πάντων μονονȣ̀ τῶν καθ' ἡμᾶς, πῶς ȣ̓ νεμεσητὸν, εἰ μήτις τὸν δυνατὸν, κἂν μὴ τὸν δίκαιον, συνεισφέροι τῇ ἁμίλλῃ ταύτῃ ἔρανον; πῶς δ' ȣ̓κ ἂν ἀγνωμοσύνης, ϗ δειλίας δεινῆς φύγοι δίκην, εἰ πάντων τῶν ἄλλων περὶ τὴν λαμπρὰν μοχθȣ́ντων εὐωχίαν, ἧς οἱ μεθέξοντες ἄνδρες ἔσονται ἀγαθόι, ὁ δὲ καθεδεῖται ἀργὸς, ὅτε παρατεθείη τὰ βρώματα, παραφυλάττων, ἵν', εἴπερ εἴη, τῶν μοχθησάντων πρῶτος ἀνακλιθείη αὐτός; διὰ ταῦτ' ȣ̃ν ἐγὼ ἐπὶ ταύτην προήχθην τῶν, ὧν ἐν χερσὶ φέρετε, φίλοι Πατέρες ϗ Ἀδελφοὶ, Μαθη-

ματικῶν ϗ Φυσικῶν Πραγματειῶν τῆς σειρᾶς τὴν εἰς τὸν ἕλληνα λόγον μεθερμήνευσιν, οὐ μὰ Δία τοῦτο σκοπήσας ἀρχῆθεν, ἵνα δὴ κοινῇ παράθωμαι ταύτην τὴν λιτὴν ϗ εὐτελῆ εἰς ἑστίασιν τῶν φαγεῖν δεομένων· πῶς γὰρ ὁ πεινῶν, ϗ τῶν τῇ ἐμῇ γαστρὶ ἐπαρκούντων ἐνδεῶς ἔχων; ἐμαυτῷ οὖν εὐτρέπιζον τὸ πειναλέον τουτὶ δειπνάριον, ἵν᾽ ἀμέλει τὴν ἔνδειαν τὴν ἐμαυτοῦ, εἴπως εἴη, ἀναπληρώσω, ϗ τοῦ καταπιέζοντος λιμοῦ τὸ φλεγμαῖνον κατακορέσω· ὡς εἴποτε κἀγὼ τοῖς λαμπροῖς συγκατακλιθείην δαιτυμόσιν ἐν τῇ κοινῇ εὐωχίᾳ, μὴ πάμπαν ἔχοιμι ἀγροίκως ϗ ἀηδῶς, ἀδδηφάγως ἀφαρπάζων τὰ ὄψα, ϗ τοὺς παρακαθημένους ἀεὶ παραγκωνιζόμενος· ἀλλὰ πρὶν ἢ ἐγχειρῆσαι τῷ ἔργῳ, ἐκεῖνο ἐσκόπουν οὐκ ὀλιγώρως· ἠβουλόμην γὰρ περιτυχεῖν τῶν νεωτέρων τινὶ μαθημάτων συγγραφεῖ, ὃς ἂν ἔχοι ϗ τὸ πλῆρες, ϗ τὸ Μαθηματικὸν, ἢ τοιοῦτο, ϗ τοῦ Μαθηματικοῦ ὅσον ἐστὶ φυσικώτερον· διὸ τῷ ἐπὶ τῆς ἐν Βιέννῃ Ἀκαδημίας τὰ Μαθηματικὰ ἐξ ἐπαγγέλματος διδάσκοντι, τῷ σοφῷ φημὶ Δαιτλέρῳ, συμβούλῳ χρησάμενος πρὸς τοῦτο, οἷον ἐζήτουν σύγγραμμα, πρὸς αὐτοῦ ἐνεχειριζόμην τὸ ἐν Βιέννῃ κατὰ τὸ 1800 ἔτος ἐκτυπωθὲν ὀκτάτομον σύγγραμμα ὑπὸ τοῦ ἐν Τυρίνῳ πρὸ τῆς γενομένης ἐκεῖθι τῶν πραγμάτων μεταβολῆς διδασκάλου ὑπάρξαντος τῆς Μαθηματικῆς ϗ Φυσικῆς Φονταίνου (Fontaine), ὃς διὰ τὰς τηνικαῦτα συμβάσας ταραχὰς ἐκεῖθεν μεταναστεύσας, εἰς Βουκουρέστιον ἀφικόμενος, τέως μὲν ἐκεῖ ἐποιεῖτο τὰς διατριβάς· εἶτα δὲ εἰς Βίενναν ἐλθὼν τύποις ἐξέδοτο τὸ εἰρημένον σύγγραμμα· κἀντεῦθεν εἰς Ῥωσσίαν ἀπῆρεν, ἔν-

θα ἐς δεῦρο διάγει τὸν βίον· τοῦτο τοίνυν, ὡς εἶχε, κατ' ἀρχὰς εἰς τὴν ἑλλάδα μετέφερον φωνὴν, ἐν δὴ τοῦτο σκοπῶν, ὅπως τὸν νοῦν τοῦ συγγραφέως ἀνελιξάμενος τοῖς ἑλληνικοῖς ἐκφήνω σημείοις· καὶ ἦν ἐπιεικῶς τὸ σύγραμμα παντοίας ἰδέας μαθηματικῆς καὶ φυσικῆς ἔμπλεων, καὶ κατὰ σειρὰν, ὡς ἐκ κρίκου εἰς κρίκον, εἰς ἐπιστήμην μεταβαῖνον ἐξ ἐπιστήμης· ἐπεὶ μέντοι πρόθεσις ἦν αὐτῷ αὕτη, μόνα τὰ στοιχεῖα ἀποδοῦναι τούτων τῶν γνώσεων, εἴτ' οὖν τὰς ἁπλουστέρας καὶ εὐχερεστέρας ἀρχὰς ἐν τοῖς Μαθηματικοῖς, οὐδὲν δὲ τῶν ὑψηλοτέρων, ὅτι μὴ πάρεργον, ἐκδιδάξαι· ἐν δὲ τοῖς φυσικοῖς ἐν πολλοῖς ἔοικε τῶν ἐνδοξοτέρων συγγραφέων παραλλάττων τῇ τάξει, οὐμὴν ἀλλὰ καὶ ταῖς δόξαις ἐνιαχοῦ, διὰ ταῦτα ἀπὸ τῶν Μαθηματικῶν ἀρξάμενος ἐπὶ τὸ μεταβάλλειν, καὶ μετακινεῖν ὥρμησα τὰ ἐν αὐτοῖς· οὐ γὰρ ἐμοὶ βούλησις ἦν τὰ Φονταίνῳ φρονούμενα ἑρμηνεῦσαι, ἀλλὰ συλλογὴν μαθηματικῶν θεωρημάτων, καὶ φυσικῶν δὲ τῶν τῷ λόγῳ καὶ τῇ πείρᾳ μᾶλλον συναδόντων, ποιήσασθαι, ἵν', ὧν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ ἠκροασάμην, ἔχοιμι ἐν τῇ κατ' ἐμαυτὸν μελέτῃ καὶ θεωρίᾳ οἷον ἐναύσματα· διὸ πολλὰ νεωτέρων ἀθροίσας συγγράμματα, τὰ πλείω ἐν τῇ Γάλλων γεγραμμένα φωνῇ, ἐξ αὐτῶν, ὑπὸ τοῦ χρηστοῦ Δαιτλέρου τὰ πολλὰ ποδηγετούμενος, τῇ τῶν μεθερμηνευομένων ἐνεχείρησα μεταβολῇ. καὶ δὴ πολλὰ μὲν τῶν ἐν αὐτοῖς περιττῶς σχολιαζομένων (ἦν γὰρ τἀληθὲς εἰπεῖν ἐν πολλοῖς ὑπὲρ τὸ δέον ἑρμηνεῦσαι βουλόμενος τὸν προκείμενον νοῦν, ὥστε καὶ Μελιτίδας καὶ Μαμμακούθους τῆς τοιᾶσδε μὴ ἀνέχεσθαι ἑρμηνεύσεως) περιεῖλον, πολλὰ δὲ ἐν-

δέοντα ἀνεπλήρωσα· πολλῶν δὲ ϗ τάξιν μετήλλαξα, ἔνθα παρὰ πολὺ τῶν ἐνδοξοτέρων συγγραφέων ὐδὲν δέον διεφώνει, ϗ παρήλλαττε· συνελόντι δὲ εἰπεῖν, ὅσαι μὲν τῇ Φονταίνȣ βίβλῳ ὑπῆρχον αἱ πραγματεῖαι, αἱ αὐταὶ κἀν τῇ ἀνὰ χεῖρας ὑπάρχȣσιν, οἷαι δ' ἐν ἐκείνῃ, τοιάς δε κἀν ταύτῃ χολῇ ἄντις εὑρεῖν ἐλπίσειεν, ὡς τοῖς τὴν Γάλλων ἐπαΐȣσι φωνὴν δῆλον γενήσεται ταῦτα πρὸς ἐκεῖνα παραθεμένοις. Διὰ ταῦτα τὴν βίβλον ὐ Φονταίνῳ, ὅπερ ὐκ ἔςιν, ἐπέγραψα, συλλογὴν δ' ἐκ πολλῶν, ὅπερ ἐςὶ τἀληθὲς, συνερανισθεῖσαν προσεῖπον.

Ταύτην ὖν τὴν βίβλον, ἣν εἰς ἐμαυτȣ̃ μελέτην ϗ γύμνασιν, ὡς εἴρηται, συνελεξάμην, συχνοὶ τῶν εὐνοϊκῶς πρὸς ἐμὲ ἐχόντων ἦσαν οἱ ἐπικείμενοι, ϗ τύποις ἐκδȣ̃ναι παρακαλȣ̃ντες, μὴ δεῖν κρύπτεσθαι τοῖς γȣ̃ν Ἕλλησι φάσκοντες τȣ̀ς Φονταίνȣ, ϗ Σαυρίȣ, ϗ Βεζȣτίȣ, ϗ Λακροΐȣ, ϗ ἄλλων εὐκλεῶν σοφῶν πόνȣς· κἀν γὰρ εἶεν οἱ κρείττω τὴν συλλογὴν ταύτην ποιήσασθαι δυνάμενοι, ἀλλὰ τȣ́τοις διδασκαλικὰς κοσμȣ̃σι καθέδρας ἀγαπητὸν εἶναι τόγε νῦν ἔχον, εἴτις αὐτȣ́ς τε τῶν τȣ̃ μεθερμηνεύειν ϗ μεταφράζειν πόνων, ϗ τȣ̀ς ὑπ' αὐτῶν διδασκομένȣς τῶν τῆς ἀντιγραφῆς, ἀπαλλάξειεν· εἴξαμεν ὖν αὐτῶν ταῖς φιλικαῖς προτροπαῖς, ϗ ἃ ἡμῖν αὐτοῖς ἐχεδίασαι, προτίθεμεν ἤδη πᾶσι τοῖς ὁμογενέσι, κἀν ὡς ἐκ τȣ̃ ἐκδιδόντος ἄμορφα κομιδῇ ϗ ἀκατέργασα, ὐ μέντοι παρὰ τȣ̃το ἀπόβλητα, ὡς ἐμαυτὸν πείθω, ϗ πάμπαν ἐσόμενα ἄχρησα· εἰσὶν ὖν, ἃς ἡ σύμπασα περιενήνοχε βίβλος, πραγματεῖαι αἱ ἐφεξῆς.

α΄. Πραγματεία Ἀριθμητικῆς, ὡς οἷόν τε πλήρης

ἐφαρμοζομένη ὑποδείγμασι τοῖς ἐκ τοῦ κοινωνικοῦ βίου τὸ πλεῖστον εἰλημμένοις, ἵν' εἴπερ τινὲς περαιτέρω χωρῆσαι ὀκνήσειαν, τῶν γοῦν Ἀριθμητικῶν στοιχείων, ἀναγκαίων ὑπαρχόντων ἐν τοῖς πρὸς ἀλλήλους συναλλάγμασι, μὴ ὦσι πάντη ἀμύητοι.

β΄. Πραγματεία τοῦ Συμβολικοῦ λογισμοῦ, ὃν οὕτω καλέσαι προήχθην, ἐπεὶ τὸ ποσὸν ἐν αὐτῷ συμβόλοις τισὶν ἐξεικονίζεται, οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ ἃς ὑφίσταται πράξεις ἤτε σύναψις, φημὶ, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς, καὶ τ' ἄλλα καὶ δὴ καὶ ἡ τελουμένη δι' αὐτοῦ πολυθρύλλητος ἀνάλυσις, διὰ τῶν προταττομένων συμβόλων περαίνονται· ὡς εἴπερ ἀντὶ γραμμάτων εἰσαχθεῖεν ποτὲ ταῖς πράξεσιν ἀριθμητικοὶ χαρακτῆρες, οὐδὲν ἧττον ἔσται συμβολικὸς ὁ λογισμὸς, εἰ μόνον αὐτοῖς ἐνυπάρχοι τὰ τοῖς συνάψεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιάσεως, διαιρέσεως, ἰσότητος, καὶ τῶν ἄλλων τὰ πασίδηλα σύμβολα.

γ΄. Γεωμετρίας πραγματεία πλήρης.

δ΄. Πραγματεία τῆς ἐπιπέδου Τριγωνομετρίας.

ε΄. Πρακτικὴ Γεωμετρία, εἴτ' οὖν τῶν προδειχθέντων ἔντε τῇ Γεωμετρίᾳ καὶ τῇ Τριγωνομετρίᾳ θεωρημάτων προσεφαρμογὴ ἐπὶ καταμετρήσει παντοίων φυσικῶν διαστάσεων.

ς΄. Σύνοψις τῆς Ἐχυροποιΐας, εἴτ' οὖν τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἄντις χωρία ἐχυρὰ καὶ ἀσφαλῆ ἀπεργάσαιτο·

ζ΄. Πραγματεία τῶν τοῦ Κώνου Τομῶν, αἷς κατ' ἐπιτομὴν προσετέθησαν καὶ αἱ τῶν ὑπερτέρων βαθμῶν κωνικαὶ τομαί.

ή. Σύνοψις τῆς τῶν Καμπύλων γραμμῶν θεωρίας, εἴτ᾽ οὖν περὶ τῶν καμπύλων ἐν γένει, καὶ περὶ τῶν καλουμένων Γεωμετρικῶν καμπύλων, καὶ δὴ καὶ τῶν καλουμένων καμπύλων Υ῾περβατικῶν.

θ'. Πραγματεία τοῦ λογισμοῦ τῆς ὡς ἀπείρου θεωρουμένης ποσότητος, εἴτ᾽ οὖν τοῦ τῶν ἀπειροσῶν καὶ τῶν ὁλοκλήρων, περὶ οὗ βραχέα μὲν πάνυ ἦν εἰρηκὼς ὁ Φονταῖνος· ἐμοὶ δὲ τὰ πλείω συνείλεκται ἐκ τῶν τοῦ Βεζουτίου καὶ Σαυρίου καὶ Λακροΐου συγγραμμάτων.

ί. Γενικὴ φυσικὴ, εἴτ᾽ οὖν ἡ ἐν γένει τὰς τοῖς σώμασι προσούσας ἰδιότητας ἀναπτύσσουσαν ἐν ᾗ ἤτε περὶ κινήσεως θεωρία, καὶ πᾶσαι αἱ τῶν φυσικωτέρων μαθημάτων προηγηματικαὶ γνώσεις, σαφῶς ὡς ἔνι ἐκτίθενται.

ιά. Ἡ Μηχανική.

ιβ'. Ἡ Υ῾δροςατικὴ καὶ Υ῾δραυλικὴ, ἔνθα ὑποσυνάπτεται ἡ περὶ ἀρχῆς τῶν ποταμῶν καὶ πηγῶν θεωρία.

ιγ'. Πραγματεία περὶ Α᾽έρος, φυσικῶς ἐξεταζομένου, ᾗ ἐφέπεται πάνθ᾽ ὅσα ἐπανήκει τῇ καλουμένῃ Α᾽εροςατικῇ ἐπιςήμῃ.

ιδ'. Πραγματεία τῆς Ο᾽πτικῆς, Κατοπτρικῆς καὶ Διοπτρικῆς.

ιέ. Πραγματεία τῆς σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας, ἐν ᾗ καὶ αἱ τῆς σφαίρας ἀναπτύσσονται ἰδιότητες.

ις'. Στοιχεῖα τῆς Α᾽ςρονομίας.

ιζ'. Τὰ συςήματα τοῦ παντὸς τό, τε φαινόμενον, εἴτ᾽ οὖν ἐν ᾧ ἑρμηνεύονται τὰ ἐν τῇ Α᾽ςρονομίᾳ φαινόμενα, καὶ τὸ φυσικὸν, ἔνθα κατὰ τὰς νεωτάτας δόξας ἀναπτύσ-

σονται αἱ ὡς ἀληθεῖς ὑποληφθεῖσαι αἰτίαι τῶν κατὰ τὰ οὐράνια σώματα φαινομένων· ἐν οἷς καὶ ἡ τῶν παλιῤῥοιῶν ἐκτίθεται αἰτία.

ιή. Σύνοψις τῆς μερικωτέρας Φυσικῆς, εἴτ᾽ οὖν Ἀνατομὴ καὶ Φυσιολογία ἐπιτετμημένως, καὶ φυσικὴ ἱςορία.

ιθ΄. Περὶ Μετεώρων, τοῦτ᾽ ἔςιν ἀνάπτυξις τῶν ἐν τῇ Ἀτμοσφαίρᾳ συμβαινόντων.

κ΄. Σύνοψις τῆς Χημείας κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ γενομένας νεωτάτας ἐφευρέσεις. Καὶ ταῦτα μὲν εἰσὶν, ἃ ἡ βίβλος διδάξειν ἐπαγγέλλεται, διὰ βραχέων προϋποςρωθέντα, καὶ οἱονεὶ τῇ τῶν ἐντευξομένων αὐτοῖς ὄψει προϋποβληθέντα, ἵν᾽ εἰδέναι ἔχοιεν, ὅντινα καρπὸν ἐξ αὐτῶν ἀποδρέψονται· ἐπεὶ δὲ δι᾽ ὅλης τῆς Σειρᾶς ταύτης συχνὰ ἀπαντᾷ πράγματα, ὧν τὰ μὲν εἰσὶ πάντως καινοφανῆ, τὰ δὲ ἡμῖν τοιάδε δοκεῖ ὡς ἐκλελοιπότων τῶν περὶ τούτων διαλαμβανόντων ἑλληνικῶν συγγραμμάτων, ἔδει ἄρα καὶ ὀνομάτων καινῶν εἰς τὴν τούτων δήλωσιν· διὸ τὰ μὲν ἐκ τῶν Ἑλλήνων συγγραφέων παρέλαβον, ὅσα δήπου ἐκείνοις ὠνοματοθέτηται ἐπὶ πραγμάτων τοῖς ἐν τῇ βίβλῳ ταυτιζομένων· τὰ δ᾽ ἐκ τῶν ἐνόντων ἐθέμην αὐτός· ἦσαν δέ τινα, ἐφ᾽ οἷς, τἀληθὲς εἰπεῖν, ὅλως ἠγνόουν, ὅ,τι πότ᾽ ἐχρῆν καταλλήλως ἔχον ὄνομα θεῖναι· τί οὖν ἔδει ἐν τούτοις ποιεῖν; ἀλλ᾽ ἔςιν ἄρα καιρὸς ὁ παρὼν, καθ᾽ ὃν προμηθείᾳ θειοτέρᾳ ἡ Ἑλλὰς πράξει ἄμεινον, τοῦθ᾽ ὅπερ εἶπον, καὶ πάλιν λέγω, καὶ λέγων οὐ παύσομαι· ὃ γὰρ βούλομαι, ἡδὺ καὶ λέγειν ἀεὶ, καὶ εὔχεσθαι, καί γε ἐκ τῶν ἐνόντων συμπράττειν καὶ συνεργεῖν εἰς συντέλεσιν· διὸ ἐν καιροῖς τοιούτοις

Ἄνδρα ἡμῖν ἐξαπέςειλεν ἡ ἐξ ὕψους προμήθεια, εἴπερ τις ἄλλος, καὶ βουλόμενον καὶ δυνάμενον ἐπαρκέσαι ἡμῶν ταῖς χρείαις, καὶ τοῖς ἄλλοις παραινεῖν εἰδότα τὰ δέοντα, καὶ αὐτὸν ἀδιαλείπτως μοχθοῦντα, καὶ πάσῃ μηχανῇ σπεύδοντα τὴν τῆς Πατρίδος βελτίωσιν· ὃν Σωκράτην ἄντις ὀνομάσας τοῖς ἤθεσιν οὐκ ἂν ἁμάρτοι· τῶν γὰρ νῦν ὄντων τοιῷδ' Ἀνδρὶ τίς ξυμβήσεται; τίν' ἀντιτάξω τῷδε; τὶς φερέγγυος; ἵν' εἴπω τὰ τοῦ Αἰσχύλου; Κοραῆς ἡμῖν ἐςιν οὗτος ὁ περιώνυμος, ὁ ἰατρὸς καὶ φιλόσοφος, ὁ οὐχ ἧττον πολυμαθείᾳ, ἢ φιλογενείᾳ διαπρέπων, τοῦ δυςήνου ἡμῶν γένους ὁ τιμαλφέςατος κόσμος, ὃν πάντες μὲν ἴσασι, πάντες δ' οὐχ ἧττον τιμῶσιν οἱ ἐν Εὐρώπῃ σοφοί. τούτῳ τοίνυν δι' ἐπιςολῶν ἐχρησάμην συμβούλῳ, ἐφ' οἷς αὐτὸς ἤτοι ἐδίςαζον, ἢ ὅλως ἠγνόουν, ὅπως χρὴ καλέσαι πολλὰ τῶν ὕςερον ἐπινοηθέντων πραγμάτων· καίτοι ἐν τῇ τῆς ἐχυροποιΐας ἐπιτομῇ πάντα μονονοὺ Κοραῇ ὠνοματοθέτηται.

Τὰ μὲν οὖν ἐν τῇ βίβλῳ τὸν εἰρημένον ᾠκονόμηται τρόπον, καὶ οὕτω χειρῶν τῶν ἐμῶν προέρχεται· ὑμεῖς δὲ, Παῖδες Ἑλλήνων, μετὰ πολλῶν καὶ ἄλλων ἐκδιδομένων ἤδη βιβλίων εὐμενῶς καὶ τόδε τὸ ἀνὰ χεῖρας ὑποδέξασθε· κἂν ᾖ δι' ἐμὲ εὐτελὲς, μὴ τοῦτό μοι, φίλοι, σκοπεῖτε· ὅτι δὲ σοφῶν εἰσι τὰ ἐν αὐτῷ ἔκγονα, καὶ τὰ μάλιςα ὀνησιφόρα, καὶ Φιλοσοφία οὕτως εἰπεῖν αὐτὴ, τοῦτο σκεψάμενοι προθύμως ἐναγκαλίσασθε· οὐ γὰρ γυμνῷ ἀποῤῥιπτέον ἱματισμὸν πενιχρὸν, ὅτι μὴ ἀλουργίδα ἀμφιέσασθαι ἔχει· οὐδ' οἱ ἐν σκότῳ πλανώμενοι ἐχέφρονες ἔσονται, οἱ παρὰ τὸ μὴ ἡλιακῷ φωτὶ περιαυγάζεσθαι καὶ λυχνάριον ἀμυ-

δρὸν ἀπώσαιντο· ἀλλὰ νῦν μὲν τοῖς παρῦσι στερκτέον, παραμυθῦντας ἐκ τῶν ἐνόντων τὴν γύμνωσιν, καὶ τὸν παχὺν ἀποσκεδαννῦντας ζόφον· ὅταν δὲ Φοῖβος Ἀπόλλων, καὶ Ἑλικωνιάδες Μῦσαι, εἰς τὸ ἀρχαῖον ἐπανέλθωσιν ἑαυτῶν ἔδαφος, τηνικαῦτα, ὡς ἐν ἀπλέτῳ φωτὶ, ὐδεμίαν φανεῖται αὐγὴν προϊέμενα τὰ μικρὰ ταῦτα λαμπάδια· ἀλλὰ γὰρ οἶδα κἀξεπίσαμαι σαφῶς, ὡς εἰ μὴ, ταῦτα εἰλικρινῶς ἀποδεξάμενοι, τὸν ἐνόντα αὐτοῖς ἐγγυμνασαίμεθα τρόπον, ὐδ᾽ ἐκεῖνα κτησόμεθα ὐδέποτε· φύσει γὰρ ἐθέλει τὰ μεγάλα ἐκ μικρῶν ἄρχεσθαι, καὶ τὰ τέλεια ἐξ ἀτελῶν, κατὰ μικρὸν προαγόμενά τε καὶ τελειύμενα.

Κωνσαντῖνος Μιχαήλυ Κύμας
Λαρισσαῖος.



ΣΕΙΡΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

Ἔννοιαι προκαταρκτικαὶ εἰς ἅπασαν ἐν γένει τὴν Μαθηματικήν.

1. Μαθηματική ἐστὶν ἐπιστήμη, τῆς ποσότητος, ϗ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῆς, ἐξεταστική.

2. Ποσότης δὲ, ἢ μέγεθος, καλεῖται πᾶν ὅ,τι αὐξήσεως, ἢ μειώσεως, ὑπάρχει ἐπιδεκτικόν· ἢ, πᾶν ὅ,τι μερῶν εὐμοιρεῖ· Ὁ ἐνιαυτὸς, φέρε, ἡμέρας περιέχων· ἡ ὀργυιὰ, ποδῶν εὐμοιροῦσα· ὁ στρατὸς, ὃς σύγκειται ἐκ στρατιωτῶν· πάντα ποσότητες.

3. Τὰ τῆς Ποσότητος μέρη, ὡς μὲν ἀπ' ἀλλήλων διακριδὸν θεωρούμενα, τὸ ὑποκείμενον τῶν ἀριθμῶν συνιστᾶσι· καθ' ἓν δὲ ἐξεταζόμενα, ἐπεὶ συνεχὲς ἓν ὅλον συγκροτοῦσι, παράγουσι τὴν καλουμένην ἔκτασιν. Οὕτω στρατὸς μέν τις ἀποτελεῖ ἀριθμὸν, τῶν συμπληρούντων αὐτὸν μερῶν, εἴτ' οὖν τῶν στρατιωτῶν, διακριδὸν ἑκάστου

θεωρȣμένων· τὸ δέ τοι ἀνθρώπινον σῶμά ἐςιν ἔκτασις, ἅτε δὴ τῶν συγκροτȣ́ντων αὐτὸ μερῶν ἓν ὅλον ὑπαρχόντων, ϗ συνεχές τι ἀπεργαζομένων. Ποσότης ἄρα πᾶσα, ἤτοι δι' ἀριθμῶν ἐμφαίνεται, ἢ δι' ἐκτάσεως ἀποδίδοται.

4. Ἡ μὲν ȣ͂ν Ἀριθμητικὴ περὶ τȣ̀ς ἀριθμȣ́ς, ἡ δὲ Γεωμετρία περὶ τὴν ἔκτασιν, ἀσχολȣ͂νται· ἐπεὶ δὲ, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, ποσότης πᾶσα, ἤτοι δι' ἀριθμῶν, ἢ δι' ἐκτάσεως, ἀποδίδοται· αἱ διτταὶ ἄρα ἐπιςῆμαι αὗται, ἤτε Ἀριθμητικὴ, ϗ ἡ Γεωμετρία, πραγματευόμεναι τὸ ποσὸν, ᾗ τοιȣ͂τον, ἁπάσης ἀμέλει φυσικῆς ἄλλης γεγυμνωμένον ποιότητος, οἰκειȣ͂νται τὴν καθαρὰν καλȣμένην Μαθηματικήν.

5. Ἐὰν δὲ διενθυμηθῇ τις τὴν ποσότητα, οἱονεὶ περιβεβλημένην ϗ διαφόρȣς ποιότητας αἰσθητάς τε ϗ φυσικὰς, τῆς κινήσεως, φέρε, τȣ͂ φωτὸς, τῆς βαρύτητος, κ.τ.λ. ἐντεῦθεν προκύψει ἡ καλȣμένη μικτὴ Μαθηματική. Μαθηματικȣ͂ γὰρ, ȣ̓χ ὅπως μονήρεις ϗ ἐν ἀφαιρέσει τὰς τῆς ποσότητος ἰδιότητας ἀνερευνᾷν, ἀλλὰ, χρώμενον, οἷς φθὰς προαπέδειξε, γενικοῖς θεωρήμασι, μεταφέρειν τὸ φῶς κἀπὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν τῆς ἐπιςήμης, τὸ τέλειον ἁπάσαις ταῖς τέχναις πορίζόμενον. Λογισμῷ γὰρ καθυποβάλλων τὰς αἰσθητὰς ϗ φυσικὰς τȣ͂ σώματος ποιότητας, κίνησιν ἀμέλει, βαρύτητα, κ.τ.λ. ἐξάγει ἐκ τῶν ἰδίων αὐτȣ͂ ἀρχῶν σωρείαν, ὡς εἰπεῖν, γνώσεων ἐπωφελῶν, αἳ κοινῇ ὀνομάζονται μικταὶ Μαθηματικαὶ, ἢ Φυσικομαθηματικαί· οἷαί εἰσιν ἡ Μηχανικὴ, ἡ Ὀπτικὴ, ἡ Ἀςρονομία, κ.τ.λ.

6. Αἱ δὲ εἰς δεῖξιν τοῖς Μαθηματικοῖς προβαλλόμεναι γενικαὶ ἀλήθειαι, καλȣ͂νται Θεωρήματα,

Προβλήματα, καὶ Λήμματα· γενικώτερον δὲ, Προτάσεις. Θεώρημα μὲν ȣ̃ν ἐϛιν ἀλήθεια, ἐπ᾿ εὐθείας ἀποδιδομένη τῇ, περὶ ἧς ὁ λόγος, ὕλῃ, δείξεως χρήζȣσα· Πρόβλημα δὲ, ἀλήθεια, ἣν πρῶτον μὲν δεῖ κατασκευάσαι, ἑξῆς δὲ τὴν δεῖξιν αὐτῆς ἐπαγαγεῖν. Τȣ́τοις δ᾿ αὐτόματον ἕπεται τὸ Πόρισμα, ὅπερ ἀλήθειά ἐϛιν, ἀμέσως προκύπτȣσα ἐκ τῶν ἄρτι ἀποδειχθέντων, εἴτ᾿ ȣ̃ν ἰδιαιτέρας δείξεως μὴ δεομένη. Τὸ δὲ Λῆμμα ἀλήθειά ἐϛι, δοκȣ̃σα μὲν ἀλλοτρία τῆς ἐν χερσὶ πραγματείας, δεικνυμένη δὲ, ἵν᾿ ἕτερόν τι δι᾿ αὐτῆς εἶτα δείξεως τύχῃ. Τέλος δὲ Σχόλιον καλεῖται, ἐν ᾧ πᾶν ὅ,τι λόγȣ ἄξιον, σημειȣ̃ται.

7. Αἱ ἀρχαὶ, αἷς χρῶνται Μαθηματικῶν παῖδες πρὸς δεῖξιν τῶν σφίσι προβαλλομένων προτάσεων, τὰ Ἀξιώματά εἰσιν, οἱ Ὁρισμοὶ, ϗ τὰ Αἰτήματα.

8. Ἀξίωμα μὲν ȣ̃ν ἐϛιν ἀλήθεια, δείξεως ἀνεπίδεκτος, ἐναργὴς αὐτὴ καθ᾿ ἑαυτὴν, οἷαι ὑπάρχȣσιν αἱ ἐφεξῆς.

9. Ἀξίωμα Α΄. Τὸ ὅλον ἐϛὶν ἴσον τοῖς ἑαυτȣ̃ μέρεσιν, ἅμα ληφθεῖσιν.

10. Ἀξίωμα Β΄. Τὸ ὅλον ἐϛὶ μεῖζον ἑκάϛȣ τῶν αὐτȣ̃ μερῶν.

11. Ἀξίωμα Γ΄. Ποσὰ, τὰ τρίτῳ τινὶ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

12. Ἀξίωμα Δ΄. Ὧν δὲ ποσῶν, τὸ μὲν τρίτῳ τινί ἐϛιν ἴσον, τὸ δ᾿ ἄνισον, ἐκεῖνα ϗ ἀλλήλοις εἰσὶν ἄνισα.

13. Ἀξίωμα Ε΄. Ἐὰν ἴσοις ἴσα προϛεθῇ, τὰ ὅλα ἔϛαι ἴσα.

14. Ἀξίωμα ϛ΄. Ἐὰν ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἔϛαι ἴσα.

15. Ἀξίωμα Ζ΄. Ποσότης, ἑαυτῆς ὅλη ἀφαιρεθεῖσα, γίνεται μηδὲν, ἢ ἰσῦται τῷ μηδενί.

16. Ὁρισμὸς δέ ἐςι λόγος σύντομος, ἐκδηλῶν, ἤτοι τὴν τῦ ὀνόματος σημασίαν, ἢ τὴν φύσιν τῦ ὑποκειμένυ πράγματος.

17. Αἴτημα δὲ, ὑπόθεσίς τινος πράγματος, πρὸς ἣν μετάγε λόγυ ὐδεὶς ἂν διαμφισβητήσειεν· οἷον, τὸν ἀριθμὸν ἓξ διὰ τῦ 6 χαρακτῆρος παρίςασθαι· ἐκ τῦ πέρατος εὐθείας τινὸς εὐθεῖαν ἑτέραν πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἀνιςάναι. Οὐκ ἂν εἴη δὲ ἄπο σκοπῦ χάριν τῶν πρωτοπείρων σχέδιόν τι σκιαγραφῆσαι τῆς, ᾗ κέχρηνται οἱ Μαθηματικοὶ, μεθόδυ, ὀνομαζομένης κοινῇ Γεωμετρικὴ μέθοδος.

18. Αὐτίκα ὖν ὁ Μαθηματικὸς προβάλλει, ἢ ὑποτίθησιν εἰς γνῶσιν, τὰ ἀξιώματα, τυτέςιν, ἀληθείας γενικὰς ϗ ἀναντιῤῥήτυς, αἳ θεμέθλυ δίκην αὐτῷ προκαταβάλλονται· εἶτα ὁρίζεται τὸ, περὶ ὖ πραγματεύσασθαι βύλεται, ἀποσκεδαννὺς δἰ ὁρισμῦ πᾶν ὅ,τι ἀσαφὲς ἀπαντᾷ, ϗ ἀμφισβητήσιμον, πρὸς μηδὲν ἄλλο ἀποβλέπων, ἢ πρὸς τὰς ἰδιότητας, αἵπερ οἱ παριςᾶσι λαμπρῶς τε ϗ ἀναγκαίως τὴν ἰδέαν τῦ πράγματος.

19. Τέλος δὲ ὑποςρώννυσι τὰ αἰτήματα, ὅ ἐςιν, ὑποθέσεις ἀναμφιλέκτως δυνατάς. Ταύτας ὖν τὰς προκαταρκτικὰς θέσεις συνάπτων, παραβάλλει ἀλλήλαις τὰς ἰδέας· διὰ δὲ τῦ συλλογιςικῦ κράτυς προπιδῦσαι ἐκ τῶν ἀρχῶν παρασκευάζει ποταμὺς ἀληθειῶν, ἐκεῖθι ἐνυπολανθάνοντας.

20. Πρὸς ὑποςήριξιν δὲ τῆς μνήμης, ϗ ἔκκλισιν τῶν περιττῶν ἐπαναλήψεων, ἀνακαλεῖν εἰώθασι διὰ πα-

ρενθέσεως τὸν παράγραφον, ἔνθα φθὰς ὁ λόγος περὶ τȣ̃ πράγματος ἐγένετο, ὃ συνδέει τὰ νῦν προτιθέμενα.

21. Παρεκτὸς δὲ τῶν ἀξιωμάτων, ὁρισμῶν, ϗ αἰτημάτων, μέλει τῷ Μαθηματικῷ τȣ̃ πάνθ᾽, ἃ προβάλλει, ἐναργῶς ἀποδεικνῦναι· διὸ τὸ ἄρτι ἀποδεδειγμένον ξυμβάλλεται αὐτῷ ὡς ἀρχὴ, δι᾽ ἧς ἕτερον ἄντι ἀποδείξειεν. Οὐκȣ̃ν ἅπαντα ἀλληλȣχȣ̃νται ἐν τῇ κατ᾽ αὐτὸν δέλτῳ, σειράν τινα ἀλληλένδετον παρέχοντα ἀληθειῶν ἐναργῶν, ϗ ἀναγκαίων, ὧν ἡ ἐσχάτη ἐπαγωγὴ βαθμηδὸν διὰ τῶν μέχρι τῆς πρώτης κρατύνεται, τῆς εἰς λόγον αἰτιώδη τιθεμένης τῶν ἰδίων αὐτȣ̃ γνώσεων.

22. Οὕτως ἄρα ὁ Μαθηματικὸς ἐκ συνεπείας ἐπὶ συνέπειαν μεταβαίνει· οὕτως ἐκλάμπει διὰ τῆς κατὰ τὴν ἐνάργειαν λαμπηδόνος, μιμȣ́μενος ἀμηγέπη ἐν τῇ τῆς ἀληθείας ἐξετάσει τὰς ὁδȣ̃ς τȣ̃ πάντα ἐτάζοντος ὑπερτάτȣ Δημιȣργȣ̃.

23. Ἡ ἕξις τȣ̃ ἀτενῶς προσέχειν, παραβάλλοντας τὰς ἰδέας, ϗ μετ᾽ ἐπιςασίας σκεπτομένȣς· τό,τε τῶν ἰδεῶν ἐναργὲς, ἡ τῶν συλλογισμῶν ἀκρίβεια, τὸ σαφὲς ϗ βέβαιον τῶν ἐκθέσεων, αὐτὸ τὸ ἡδὺ τῆς τάξεως, καὶ τῆς μεθόδȣ, ᾗ αὐτὸς ὁ λόγος συνᾴδει, ϗ τὸ μνημονικὸν, ϗ αἱ πνευματικαὶ ἐργασίαι βοηθȣ̃νται· τοιαίδε εἰσὶ, παρὰ τὰς ἀριθμὸν νικώσας ἐπωφελεῖς γνώσεις, αἱ λυσιτέλειαι, ἃς πορίζομεθα ἐκ τῆς τῶν Μαθηματικῶν μελέτης τε ϗ ἀσκήσεως, καθ᾽ ἣν φθάσαντες προȣ̈χεδιάσαμεν μέθοδον.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ

περὶ Ὁλοσχερῶν Ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Ἔννοιαι προκαταρκτικαὶ τῆς Ἀριθμητικῆς.

24. Ἀριθμητική ἐστιν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἐπιστήμη· ἀριθμὸς δὲ, ἄθροισμα μονάδων· μονὰς δὲ, κυρίως μὲν ἀριθμὸς οὐκ ἔστι· διὰ μέντοι λόγου εὐμάρειαν κληθήσεται ἡμῖν ἀριθμὸς καὶ αὕτη.

25. Ἅπαν ὂν ὑπάρχει μονὰς, τ' αὐτὸν εἰπεῖν πρᾶγμά τι μόνιμον καὶ διωρισμένον, ὡς λίθος εἷς, ἓν δένδρον, ἓν ὄρος· κυρίως δ' εἰπεῖν οἱ ἀριθμοὶ ἐν μόνῳ τῷ ἡμετέρῳ νοῒ ὑπάρχουσιν, οὗ ἔργον τὸ δυσὶν μᾶλλον ἀνθρώπων, ἢ ἑνὸς ἀντιλαμβάνεσθαι, πέντε μᾶλλον, ἢ τριῶν, καὶ ἐν γένει τὰς μονάδας ἀθροίζειν εἰς ἐπινενοημένον τινὰ ὄντων σύλλογον.

26. Τῶν δ' ἀριθμῶν ἐξεταζομένων ὡς ἐκ τῶν, ἃ δηλοῦσι, πραγμάτων, ταῦτα μὲν ῥητέον πραγματικῶς διαφέρειν, ἐκείνους δὲ κατ' ἐπίνοιαν, ἑκατέρων ἑκάτερα· οὕτως ὀργυιαὶ τέσσαρες φύσει μείζους εἰσὶν ὀργυιῶν δύω. Ὁ δέγε Πύῤῥων, ὁ καὶ τὰς νεφέλας διακεδαννῦναι ταῖς ψυχρολογίαις αὑτοῦ διατεινόμενος, καὶ τῆς τῶν ἀριθμῶν θεω-

ρίας καταχλευάσας, ὡς μηδενὶ ἀλλήλων διαφερόντων, ἀγαπῴη ἂν, εἰ χιλίων χρυσῶν ὀφειλέτης ἀποδοίη αὐτῷ μόνον ἓν, ἀπέχεις, ὑπειπὼν, ὦ 'γαθὲ Πύῤῥων, πᾶν τὸ ὀφειλόμενον, εἴγε χρυσᾶ χίλια πράγματι ἑνὸς ἐδόλως διαφέρεσιν· οἱ γὰρ ἀριθμοὶ ἐν μόνῳ τῷ ἡμετέρῳ νοῒ ὑπάρχεσι, πραγματικῶς μὴ ὑφιςάμενοι.

27. Εἰ ϗ πᾶν ὂν ἐςι μονὰς, ὡς ἤδη ἐμάθομεν· ἀληθὲς μέν τοι ἐχ ἧττον, ὡς ἐν τῷ ὁρατῷ τῷ δε κόσμῳ ἅπαν ὂν συνίςησιν ἐν ἑαυτῷ ἀριθμὸν, ὡς ἁπάντων τῶν ὄντων, ἃ τοδὶ τὸ πᾶν συμπληρεσι, παριςώντων ἡμῶν ταῖς αἰσθήσεσιν, ἢ, τὸ μᾶλλον εἰκὸς, τῷ ἡμετέρῳ λόγῳ, ἄθροισμά τι μερῶν, ἅγε ἀεί τις θεωρεῖν δύναται ὡς διακεχωρισμένα ἀπ' ἀλλήλων.

28. Ἐπειδήπερ ἡ τῆς μονάδος ἰδέα, ϗ ἡ τε ἀριθμε κατὰ τὸν ἀποδεδομένον αὐτῶν ὁρισμὸν, ἀλλήλων διαφέρεσιν, ἐκ ἂν εἴπαι ὀρθῶς ἐδεὶς, ὡς ἄρα ἡ μονάς ἐςιν ἀριθμὸς, ἀλλ' ὅρος παραθέσεως, πρὸς τὰ δοκεν λαμβανόμενος.

29. Τῶν δ' εἰς παράςασιν τῶν ἀριθμῶν ὑπεργέντων σημείων, πρὸς τὸ δοκεν λαμβανομένων, καθὰ δὴ καὶ οἱ τῶν γραμμάτων χαρακτῆρες, ἐδὲν ξένον, εἰ διαφόροις αὐτοῖς κέχρηνται οἱ ἀριθμεντες παρὰ διαφέρεσι τοῖς ἔθνεσιν.

30. Αὐτίκα, Ἕλληνες μὲν ἀριθμεντες, τοῖς γραφικοῖς αὐτῶν χαρακτῆρσιν ἐχρῶντο· παρὰ δὲ Ῥωμαίοις ἐσήμαινον τὲς ἀριθμὲς τῶν παρ' αὐτοῖς γραμμάτων τὰ μεγάλα τάδε, I, V, X, L, C, D, M· οἷς ἀπενέμοντο αἱ ἐφεξῆς δυνάμεις, ἓν, πέντε, δέκα, πεντήκοντα, ἑκατὸν, πεντακόσια, χίλια. Οἱ αὐτοὶ δὲ τὲς ἀριθμὲς, δύω, τρία, τέσσαρα, ἓξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, ἐσήμαινον οὕτω, II, III, IV, VI, VII, VIII, IX· τὸν δὲ

ἕνδεκα διὰ τοῦ XI, τὸν εἴκοσι, τῷ XX· τὸν τριάκοντα, τῷ XXX· τὸν τεσσαράκοντα, τῷ XL· τὸν ἑξήκοντα, τῷ LX· τὸν ἑβδομήκοντα, τῷ LXX· τὸν ὀγδοήκοντα, τῷ LXXX· τὸν ἐννενήκοντα, τῷ XC, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς MDCXLVIII ἀπαγγελθήσεται, χίλια ἑξακόσια τεσσαράκοντα ὀκτώ· εἰς δὲ δήλωσιν ἑπτακοσίων ἐννενήκοντα ἓξ, γραφήσεται DCCXCVI.

31. Τά γε μὴν μᾶλλον εἰς χρῆσιν ἥκοντα σημεῖα, οἵδε εἰσὶν οἱ δέκα χαρακτῆρες 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Διτταὶ δὲ αὐτῶν αἱ δυνάμεις· ἡ μὲν, ἀπόλυτος· ἡ δὲ, σχετική, ἐξ ὧν προκύπτει τὸ Ἀραβικὸν καλούμενον *σύστημα* (ὡς ἄρα Ἀράβων εὑρόντων τοὺς χαρακτῆρας τούσδε) ὅπερ ἐπερείδεται μάλιστα τοῖς ἐφεξῆς δυσὶν αἰτήμασιν, ἐξ ὧν ἀπαρύεται ἅπασα ἡ τῆς ἀριθμήσεως θεωρία, καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.

32. ΑΙΤΗΜΑ Α΄. *Δύναμις ἀπόλυτος τῶν χαρακτήρων.* Αἰτῶ δὴ, τῶν δέκα τῶνδε ἐφεξῆς χαρακτήρων 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, δυνάμεις εἶναι τὰς αὐτοῖς ὑποσημειουμένας· μηδενικὸν (0), ἓν (1), δύω (2), τρία (3), τέσσαρα (4), πέντε (5), ἓξ (6), ἑπτὰ (7), ὀκτὼ (8), ἐννέα (9).

33. ΑΙΤΗΜΑ Β΄. *Σχετικὴ τῶν χαρακτήρων δύναμις.* Αἰτῶ δὴ δεύτερον, εἰ πλείους χαρακτῆρες ὦσι γεγραμμένοι, ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καταλήγοντες, τὸν μὲν ἐν τοῖς δεξιοῖς πρῶτον δύνασθαι μονάδας, φύσιν ἐχούσας τὴν ἀπαιτουμένην ἐκ τοῦ ζητήματος, μονάδας, φέρε, βιβλίων, εἰ περὶ βιβλίων πρόκειται ζητεῖν, ὀργυιῶν, εἰ τοῦτο ζητεῖται, κτ. πᾶσαν δὲ μονάδα τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος δύνασθαι δέκα μονάδας

τῦ πρώτυ, ἐ πᾶσαν τῦ τρίτυ, ἰσχύειν τὸ δεκαπλῦν τῆς τῦ δευτέρυ· ἐ ἐν γένει, μονάδα πᾶσαν χαρακτῆρος δεκαπλασίαν ἀεὶ ἔχειν δύναμιν τῆς μονάδος τῆς περιεχομένης ἐν τῷ χαρακτῆρι, τῷ ἀμέσως πρὸ αὐτῦ ἐν τοῖς δεξιοῖς κειμένῳ.

34. Αἱ τῆς ἀριθμητικῆς ἀρχικαὶ πράξεις, πρὸς ἃς ἀνάγονται ἐ αἱ ἄλλαι, εἰσὶν, Ἀρίθμησις, Πρόσθεσις, Ἀφαίρεσις, Πολλαπλασιασμὸς, καὶ Διαίρεσις· ἐγγυμνασθήσεται δὲ αὐταῖς, ὅσον ἔνεςιν, ἐντελῶς ὁ πρωτόπειρος, ὅπως ταύτας ἀπόνως ἐ κατανοῇ, ἐ ἐργάζηται.

35. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπιςήμη πᾶσα γενικὰς ποιεῖται τὰς θεωρίας· αὐτίκα γὰρ ὁ Φυσικὸς, ἀναδιφῶν τὴν φύσιν ἐ τὺς νόμυς τῆς βαρύτητος, ὐκ ἐθέλει λαλεῖν περὶ τῆς τῦ λίθυ, ἢ τῆς τῦ ἀνθρωπίνυ σώματος βαρύτητος, ἀλλ' ἀποχωρίζων ταύτην τὴν ἰδιότητα ἀπὸ πάντων τῶν μερικωτέρων, οἷς ἔνεςι, σωμάτων, διαμορφοῖ ἐν ἑαυτῷ ἰδέαν, ἣ καλεῖται γενικὴ, ἢ ἀφῃρημένη· ὡσαύτως ὁ Μεταφυσικὸς, περὶ πνεύματος πραγματευόμενος, ὐ περὶ τῦδε, ἢ τῦδε τῦ πνεύματος τὸν λόγον ποιεῖται, ἀλλ' ἐν γένει περὶ πνεύματος. Ταὐτὸν ἔςιν εἰπεῖν ἐ περὶ τῦ Μαθηματικῦ· ὐ γὰρ ἐ ὗτος περὶ ποσότητος μερικῆς, τῆς μόνῳ τῷ εἴδει ἑνός τινος πράγματος ἐνύσης, πραγματεύεται, ἀλλ' ἐν γένει περὶ ποσότητος, δυναμένης ἁπάσῃ μερικῇ ἐφαρμοσθῆναι ποσότητι.

36. Ἕπεται μέντοι ἐντεῦθεν, ὡς τὰ πολλὰ, δύω τὰ ἀντιβαίνοντα· α΄. ὁ γὰρ πρωτόπειρος, μὴ προορῶν τὸ μέγεθος τῶν ὠφελειῶν, ἃς ἀφελκύσεται ἐκ τῆς περὶ τὰ μαθήματα ἐνασχολήσεως, ὐδὲν ἀλλ' ἢ ἀφῃρημέν' ἄττα, γλίσχρα τε ἐ ὀχληρὰ, ἐν ταύτῃ τῇ μελέτῃ εὑρίσκει, ἐ

τέλος ἐπαγδιάσας αὐτοῖς, ἀπῆλθε, μηδὲν ἀπονάμενος τῶν κόπων· β΄. αὐτὸς ἔτος, ὃς τάχα κτήσαιτ' ἂν τὸ κράτος ἐν τῷ θεωρητικῷ τῆς μαθηματικῆς μέρει, πράγματα ἐ τὰ τυχόντα ἕξει, δεῆσαν ἐπὶ τὸ πρακτικὸν μεταβῆναι, ὡς τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἀποδειχθησομένων μεθόδων καινόν τι αὐτῷ μάθημα ἐσομένης, ἐδὲ πόνων μεγάλων ἀμέτοχον.

37. Εὐχῆς ἐν ἔργον ἐπιεικῶς ἀμφοτέρας ταύτας τὰς ἀντιπεριςάσεις ἐκκλίναι· ἀλλὰ γὰρ ἐκ μόνης ὄψεως συνίδοι ἄντις, ὡς ἡμεῖς δεῖν ἔγνωμεν ὡς τὰ πολλὰ τὴν θεωρίαν ταῖς πρακτικαῖς περιπτώσεσι συζεύγνυσθαι, οἵας ἐμφιλοχωρεῖν εἰκὸς τῇ σπεδῇ τῶν τε ἐπισημῶν καὶ τεχνῶν, ἐ δὴ ἐ τῷ κοινωνικῷ βίῳ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Ἀριθμήσεως.

38. Ἀρίθμησις ἀκέει ἡ μέθοδος τἐ διὰ προφορικἐ λόγε ἐκφράζειν τὴν δύναμιν ἀριθμἐ, διὰ χαρακτήρων παριςαμένε· ἢ τἀνάπαλιν, ἐκφραζόμενον ἀριθμὸν διὰ χαρακτήρων ἐκτιθέναι.

39. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δυοῖν αἰτημάτων, ἢ ὑποθέσεων (32, 33), μικρὰ σκεψαμένοις, συναχθήσεται τὰ ἑξῆς.

40. Α΄. Ἕκαςος χαρακτὴρ δυνήσεται τἐ προσεχῶς πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῷ κειμένε χαρακτῆρος τοσαύτας δεκάδας, ὅσων αὐτὸς ἐμφαντικός ἐςι μονάδων· ὁ 5, φέρε, ὁ ἐν τῷ 56 περιεχόμενος, ἐμφαίνει δεκάδας πέντε, πρὸς τὸν 6 τὴν ἀναφορὰν ἴσχων, ταὐτὸν εἰπεῖν, πεντήκοντα μονάδας.

41. Β΄. Καὶ δὴ μονὰς μία, ἐμπεριλαμβανομένη χαρακτῆρι τινὶ, ϗ πρὸς τὸν ἡγȣ́μενον ἐν τοῖς δεξιοῖς ἀναφερομένη, ἰσοδυναμήσει δέκα μονάσι τȣ͂ ἐν τοῖς δεξιοῖς ἡγȣμένȣ χαρακτῆρος· ὕτως ἐν τῷ 48 μονὰς μία τῶν τȣ͂ 4, κᾂν ὁ 4 μηδὲν πλέον ἢ 4 σημαίνῃ, πρὸς τὸν 8 ἀναφερομένη, δύναται δέκα.

42. Γ΄. Τὐναντίον δὲ, τῆς παραθέσεως ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τ' ἀριϛερὰ γινομένης, μονάδες δέκα ἰσοδυναμȣ͂σι μονάδι μιᾷ τῶν ἐν τῷ προσεχῶς πρὸς τὰ λαιὰ ἑπομένῳ χαρακτῆρι.

43. Δ΄. Ο᾽ μὲν δέκα δύναται τὸν ἕνα δεκάκις· ὁ δὲ ἑκατὸν, δεκάκις τὸν δέκα· ὁ δὲ χίλια, δεκάκις τὸν ἑκατόν· τὸ δέ γε μιλλιόνιον, δεκάκις τὰς ἑκατὸν χιλιάδας· τὸ δὲ διλλιόνιον, μιλλιονάκις τὸ μιλλιόνιον· τὸ δὲ τριλλιόνιον, μιλλιονάκις τὸ διλλιόνιον, καὶ ὕτως ἐφεξῆς ἐπ᾽ ἄπειρον.

44. Βαδιεῖται ἄρα ἡ σχετικὴ τῶν χαρακτήρων δύναμις κατὰ τήνδε τὴν τάξιν· μονάδες, δεκάδες τῶν μονάδων, ἑκατοντάδες τῶν μονάδων· μονάδες τῶν χιλάδων, δεκάδες τῶν χιλιάδων, ἑκατοντάδες τῶν χιλιάδων· μονάδες τῶν μιλλιονίων, δεκάδες τῶν μιλλιονίων, ἑκατοντάδες τῶν μιλλιονίων· μονάδες χιλιάδων τῶν μιλλιονίων, δεκάδες χιλιάδων τῶν μιλλιονίων, ἑκατοντάδες χιλιάδων τῶν μιλλιονίων· μονάδες τῶν διλλιονίων, δεκάδες τῶν διλλιονίων, ἑκατοντάδες τῶν διλλιονίων, ϗ ὕτως ἐφεξῆς ἐπ᾽ ἄπειρον.

45. Ε΄. Ο῞,τι δήποτε μηδενικὸν, μονάζον μὲν, ȣ̓δὲν ἀλλ᾽ ἢ ἀπȣσίαν μονάδος ἐμφαίνει, τιθεμένȣ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτῆρος καταφατικȣ͂, αὐτὸς ὀπισθοδρομήσει πρὸς τὰ ἀριϛερὰ βαθμὸν ἕνα· ϗ ὑψωθήσεται ὕτω (40)

ἐπὶ τὴν τῶν δεκάδων δύναμιν· ὅτως ὁ 5 δύναται μονάδας πέντε· 50 μέντοι, πεντήκοντα· 500 δὲ, δύναται πεντακόσια, κτ..

46. ϛ΄. Ἐὰν, ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριϛερὰ χωρᾶσι, διατμηθεὶς ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας, διαιρεθῇ ἀριθμός τις δἰ ὑποδιαϛολῶν, οἷον ὁ 92567432, γένηται 92, 567, 432, ἐκ τῆς πρώτης ἐν τοῖς δεξιοῖς κλάσεως ὅτως ἄντις ἀρξάμενος ἀπαγγείλειε· μονάδες, δεκάδες μονάδων, ἑκατοντάδες μονάδων· κληθείη ἂν ἄρα ἡ κατατομὴ αὕτη κλάσις τῶν μονάδων. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας αὖθις ὅτως· μονάδες τῶν χιλιάδων, δεκάδες τῶν χιλιάδων, ἑκατοντάδες τῶν χιλιάδων· ῥηθείη δ' ἂν αὕτη, κλάσις τῶν χιλιάδων· ὅτω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων, ὡς ὁρᾶται ἐπὶ τᾶ ἑπομένᾶ ἀριθμᾶ.

μονάδες διλλιονίων.	χιλιάδες μιλλιονίων.	μονάδες μιλλιονίων.	χιλιάδες.	μονάδες.
2,	135,	485,	580,	976.

47. Ζ΄. Τᾶτὶ δὲ δῆλον, ὡς ὅτω διαιρᾶμένων τῶν χαρακτήρων, ἡ ἐϛάτη πρὸς τ' ἀριϛερὰ κλάσις δύναται περιέχειν, ἤτοι τρεῖς χαρακτῆρας, ἢ δύω, ἢ μόνον ἕνα.

48. Η΄. Καὶ τᾶτὶ δὲ σαφὲς, ἐξ ὧν ἄρτι εἴπομεν, ὡς ἐν ἑκάϛῃ κλάσει ὁ πρῶτος ἐν τοῖς ἀριϛεροῖς χαρακτὴρ ἐμφαίνει ἑκατοντάδας· ὁ δὲ δεύτερος, δεκάδας· ὁ δὲ τρίτος, μονάδας ὁμοταγεῖς· οἷον ἐπὶ τᾶ παρόντος ὑποδείγματος, 485 μιλλιόνια, ὁ μὲν 4, ὁ ἐν τῇ ἀριϛερᾷ πρῶτος, παρίϛησι τετρακόσια μιλλιόνια· ὁ δὲ 8, ὀγδοήκοντα μιλλιόνια· ὁ δὲ 5, πέντε μιλλιόνια.

Πρόβλημα. Α΄.

49. Ἀπαγγεῖλαι τὴν δύναμιν ἀριθμȣ̃, διὰ χαρακτήρων ἐκτιθεμένȣ.

ΛΥΣΙΣ Α΄. Δίελε δὴ τȣ̃τον εἰς κόμματα ἀνὰ τρεῖς περιέχον ἕκαϛον χαρακτῆρας, δεξιόθεν ἐπ' ἀριϛερὰ προϊών. Β΄. Ἐξ ἀριϛερῶν μέτελθε ἅπαντα, ἀναγινώσκων ἕκαϛον, ὡς εἰ καὶ καθ' ἑαυτὸ ὂν ἔκειτο, ϗ ἀπαγγέλλων τȣ̃νομα τῆς κλάσεως, ἐς τ' ἂν ἀποδῷς τὴν ἁπάντων τῶνδε τῶν χαρακτήρων δύναμιν (α).

50. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κληρονόμος κατέϛη τις μνῶν, δηλȣμένων διὰ τῶνδε τῶν χαρακτήρων 54367· πῶς ȣ̃ν ἐκ πρώτης ὄψεως ἀναγνωσθήσονται ȣ̃τοι; α΄. δεξιόθεν ἀρξάμενος λέγε· τρεῖς χαρακτῆρες ταῖς μονάσι· τίθει ȣ̃ν ὑποδιαϛολὴν μεταξὺ τȣ̃ 3 ϗ 4 ȣ̃τω, 54,367, λειπομένων ἔτι ταῖς χιλιάσι χαρακτήρων δυοῖν· ἀπαγγελεῖς δὲ ἐπὶ μὲν τῶν δύο καταλοίπων χαρακτήρων, πεντήκοντα τέσσαρες χιλιάδες· ἐπὶ δὲ τῆς κλάσεως τῶν μονάδων, τριακόσιαι ἑξήκοντα ἑπτὰ μναῖ.

51. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἐν ταῖς κοιναῖς ἐφημερίσιν ἀναγινώσκεται, ὅτι ἐξ ἐμπρησμȣ̃, ἐπισυμβάντος πόλει τινὶ, ἡ σύμπασα βλάβη τετίμηται μνῶν 6304056. λέγε ȣ̃ν,

(α) Πάρεργȣ δ' ἂν εἴη τοῖς πρωτοπείροις τȣ̀ς πρὸ τῶν ὑποδειγμάτων ἐκτιθεμένȣς γενικȣ̀ς κανόνας ἐφαρμόζειν ἐπιμελῶς τοῖς ἐφεξῆς ὑποδείγμασιν· ὡς δ' αὐτοὶ τῷ προσεχῶς μετὰ τὴν θεωρίαν πρώτῳ ὑποδείγματι αὐτȣ̀ς ἐφαρμόζομεν· κατὰ ταυτὰ δεῖ τȣ̀ς πρωτοπείρȣς ἐργάζεσθαι ϗ ἐν ἄλλοις ὑποδείγμασι, πολλὰ δὲ ϗ ἀφ' ἑαυτῶν ὑποτιθεμένοις.

τρεῖς χαρακτῆρες ταῖς μονάσι, ϗ τρεῖς ταῖς χιλιάσι, λειπομένȣ ἑνὸς εἰς δήλωσιν τῶν μιλλιονίων. ἀναγνωσθήσεται ἄρα ἐπὶ τȣ͂ 6,304,056, ἓξ μιλλιόνια, τριακόσιαι τέσσαρες χιλιάδες, πεντήκοντα ἓξ μναῖ.

52. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἀςρονόμος τις εἴρηκεν, ὅτι τὸ μεταξὺ γῆς ϗ τῶν ἀκινήτων ἀςέρων διάςημα μικρȣ͂ δεῖν ὑπάρχοι ςαδίων 1061133412800· εἰς ἔκφρασιν ȣ͂ν τȣτȣῒ τȣ͂ ἀριθμȣ͂ θὲς τρεῖς μὲν χαρακτῆρας ταῖς μονάσι, τρεῖς δὲ ταῖς χιλιάσι, τρεῖς δὲ τοῖς μιλλιονίοις, τρεῖς δὲ ταῖς χιλιάσι τῶν μιλλιονίων, ἕνα δὲ τοῖς διλλιονίοις· ϗ ἐπὶ τȣ͂ 1,061,133,412,800 ἀνάγνωθι· ἓν διλλιόνιον, ἑξήκοντα ϗ μία χιλιάδες μιλλιονίων, ἑκατὸν τριάκοντα τρία μιλλιόνια, τετρακόσιαι δώδεκα χιλιάδες, ὀκτακόσια ςάδια.

Πρόβλημα Β΄.

53. Ἀριθμὸν ἀπαγγελθέντα ἐν χαρακτῆρσιν ἐκθέσθαι.

ΛΥΣΙΣ Α΄. Γράψον τὴν τῆς μεγίςης δυνάμεως κλάσιν δἰ ἑνὸς, ἢ δύω, ἢ τριῶν χαρακτήρων, καθ᾽ ἃς αὐτὸς ἢ μονάδας μόνας περιέχει, ἢ μονάδας ϗ δεκάδας, ἢ μονάδας ϗ δεκάδας ϗ ἑκατοντάδας.

Β΄. Ἀναμέμνησο, ὅτι ἑκάςη τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ἐπακολȣθȣσῶν τάξεων ὀφείλει περιέχειν τρεῖς χώρȣς (46), ὧν ἐν μὲν τῷ πρὸς τ᾽ ἀριςερὰ πρώτῳ τίθενται αἱ ἑκατοντάδες· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, αἱ δεκάδες· αἱ δέ τοι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης, κατὰ τὸν τρίτον (48)· ἐὰν ȣ͂ν εἷς τις τῶν χώρων ταύτης τῆς τάξεως ὡς ἐκ τȣ͂ ζητήματος ἀμοιρῇ χαρακτῆρος θετικȣ͂, θὲς αὐτόθι ο.

Γ. Ἕπεται ἐντεῦθεν, ὡς τάξεώς τινος μηδένα πε-

ριεχέσης θετικὸν χαρακτῆρα, εἴτ᾽ ἂν τῦ λαλῦντος μηδένα τοιῦτον εἰπόντος, ἐν τῷ ἀπαγγελθέντι ἀριθμῷ θετέον τρία ο ὑπὲρ ἐκείνης τῆς τάξεως.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Στρατός τις σύγκειται ἐξ ἀνθρώπων χιλιάδων πέντε καὶ τριάκοντα· πῶς ἆρ᾽ ἐκτεθήσεται διὰ χαρακτήρων ὁ ἀριθμὸς ῦτος; ἀρξάμενος ἐκ τῆς τῶν χιλιάδων τάξεως, καὶ ὑπὲρ αὐτῶν γράψας 35, καὶ δι᾽ ὑποδιασολῆς καταχωρίσας τῦς δε τῦς δύω χαρακτῆρας, μέτελθε ῦτω τὴν τῶν μονάδων τάξιν· καὶ ἐπειδὴ μονάδων ὁ λαλήσας ὐκ ἐμνήσθη, θεὶς ἐν ταύτῃ τῇ τάξει τρία τῶν ο (53. Γ΄.), ἕξεις 35000.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἅπερ οἱ ἐχθροὶ ἀφῃρέθησαν λάφυρα τιμῶνται ἀργυρίυ μνῶν ἑπτακαίδεκα μιλλιονίων, τριακοσίων τεσσαράκοντα χιλιάδων, διακοσίων πέντε· ἀρξάμενος ὖν γράψον 17 ὑπὲρ τῆς τῶν μιλλιονίων τάξεως, ὑποδιασείλας δεξιόθεν τὸν 17· μετάβηθι εἶτα ἐπὶ τὴν τῶν χιλιάδων τάξιν, ἣ χρεὼν ἔχειν χαρακτῆρας τρεῖς (46), τὸν μὲν ἑκατοντάδων, αἵ τινές εἰσι 3· τὸν δὲ, δεκάδων, αἵτινές εἰσι 4· τὸν δὲ, σημαντικὸν μονάδων, αἵτινές εἰσι ο· γράψον ὖν 340 πρὸς δεξιὰ τῦ 17. Τελευταῖον δὲ ἐπὶ τῆς τῶν μονάδων τάξεως, ὁ μὲν τῶν ἑκατοντάδων χαρακτήρ ἐςι 2, ὁ δὲ τῶν δεκάδων ἐςὶ ο, ὁ δὲ τῶν μονάδων ἐςὶ 5· γράψας ὖν καὶ 205, ἕξεις τὸν 17,340,205 ἐμφαίνοντα ἀληθῶς τὸν διὰ λόγυ προτεθέντα ἀριθμόν· κατὰ γὰρ τὸ πρῶτον πρόβλημα διασείλας ἐπὶ τῦ 17,340,205 ἀριθμῦ τρεῖς μὲν ταῖς μονάσι χαρακτῆρας, τρεῖς δὲ ταῖς χιλιάσι, δύω δὲ τοῖς μιλλιονίοις, δυνήσῃ αὖθις ἀπαγγεῖλαι· δεκαεπτὰ μιλλιόνια κτ., ὅς ἐςιν ὁ διὰ λόγυ προφορικῦ προτεθεὶς ἀριθμός.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Εἰς ἔκθεσιν δεκαοκτὼ χιλιάδων

διλλιονίων, τριακοσίων χιλιάδων μιλλιονίων, τριάκοντα χιλιάδων, ϗ τριακοσίων τεσσαράκοντα, γράφε 18,000,-300,000,030,340.

54. ΟΡΙΣΜΟΣ. Α'ριθμὸς ἁπλȣ̃ς ὀνομάζεται ὁ χαρακτῆρος ἑνὸς περιεκτικός· σύνθετος δὲ, ὁ πλειόνων, ἢ ἑνός· ϗ ἀμιγὴς μὲν, ὁ ὁμοειδεῖς μονάδας περιέχων· συμμιγὴς δὲ, ὁ ἑτεροειδεῖς· ὀργυιαὶ ἄρα 6 ἐςὶν ἀριθμὸς ἁπλȣ̃ς, ὀργυιαὶ δὲ 25, σύνθετος· ϗ ὀργυιαὶ μὲν 6 ἐςὶν ἀριθμὸς ἀμιγὴς, ὀργυιαὶ δὲ 6, καὶ πόδες ἔτι 4, συμμιγής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Προσθέσεως.

55. Πρόσθεσίς ἐςι σύναψις ἀριθμῶν πλειόνων, εἰς τὸ εὑρεῖν αὐτῶν τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα· γενήσεται δὲ τȣτὶ κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον.

Α΄. Γράψον τȣ̀ςδε τȣ̀ς ἀριθμȣ̀ς ὑπαλλήλους, ὥςε τȣ̀ς χαρακτῆρας τῶν μονάδων, μετὰ δὲ, τȣ̀ς τῶν δεκάδων, εἶτα τȣ̀ς τῶν ἑκατοντάδων κτ., ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω οἱονεὶ ςήλας τινὰς κατ' εὐθείας γραμμὰς σχηματίζειν, ὑποκάτω δὲ πάντων γραμμὴν ἄγαγε εὐθεῖαν.

Β΄. Ε'νερθεν ἀρχόμενος, κἀπὶ τὰ ἄνω χωρῶν, σύναπτε τὴν τῶν μονάδων ςήλην· ϗ εἰ μὲν τὸ ἄθροισμα τῆς ςήλης ταύτης μὴ ὑπερέχῃ τὸν 9, γράψον αὐτὸ ὑπὸ τὴν ςήλην ἔνερθεν τῆς γραμμῆς· εἰδ' ὑπερέχοι τὸν 9, εἰκὸς αὐτὸν συγκεῖσθαι ἔκτε μονάδων καὶ δεκάδων (33)· διὸ γράψον μόνον τȣ̀ς τῶν μονάδων χαρακτῆρας ὑπὸ τὴν ςή-

λην, τηρῶν τῇ ἑπομένῃ στήλῃ, ὅσα καὶ μονάδας (42), τὰς δεκάδας ἁπάσας.

Γ΄. Αὐτοῦ δὲ τούτου γενομένου καὶ ἐπὶ τῆς τῶν δεκάδων στήλης, εἶτα κἀπὶ τῆς τῶν ἑκατοντάδων, καὶ δεξιόθεν ἐπὶ τ᾽ ἀριστερὰ πάντων τῶν ἀθροισμάτων γραφέντων, ἀποληφθήσεται τὸ ζητούμενον ὁλικὸν ἄθροισμα.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι γὰρ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, πᾶσαι μὲν αἱ μονάδες, πᾶσαι δὲ αἱ δεκάδες, πᾶσαι δὲ αἱ ἑκατοντάδες κτ., αἱ τοὺς ἀριθμοὺς συντιθεῖσαι, εἰλημμέναι ὁμοῦ (9)· ἀλλὰ μήν, γινομένων ἁπάντων κατὰ τὴν ἀνωτέρω θεωρίαν, λαμβάνονται ὁμοῦ πᾶσαι αἱ μονάδες, πᾶσαι αἱ δεκάδες, πᾶσαι αἱ ἑκατοντάδες κτ. τούτων τῶν ἀριθμῶν· εὑρεθήσεται ἄρα, τῆς θεωρίας ταύτης πραττομένης, τὸ ἀληθὲς ἄθροισμα, τὸ ζητούμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

56. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ὀφείλει τις, τῷ μὲν μνᾶς 3891· τῷ δέ, 462· τῷ δέ, 50· τῷ δέ, 3831· πόσον ἄρα ὀφείλει ὁμοῦ ἅπασι;

Γράψας ἐν ἀρχῇ τὸν 3891, ὑπόστρωσον αὐτῷ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν 462, τιθεὶς τὸν μὲν 2 ὑπὸ τὸν 1, τὸν δ᾽ 6 ὑπὸ τὸν 9, τὸν δὲ 4 ὑπὸ τὸν 8· Τοῦτον τὸν τρόπον γραφέντων καὶ τῶν ἄλλων, ὡς ἐνταῦθ᾽ ὁρᾷν ἔνεστι, καὶ πλαγίας γραμμῆς ὑπ᾽ αὐτοὺς ἀχθείσης, σύναπτε τὴν τῶν μονάδων στήλην, λέγων, 1 καὶ 2 ποιοῦσι 3, καὶ 1 ποιοῦσι 4, ὅνπερ γράψον ὑπὸ τὸν 1· μετάβηθι εἶτα ἐπὶ τὴν τῶν δεκάδων στήλην ὡσαύτως, 3 καὶ 5 ποιοῦσιν 8, καὶ 6 ποιοῦσι 14, καὶ 9 ποιοῦσιν 23· θὲς οὖν τὸν τῶν μονάδων χαρακτῆρα ὑπὸ τὸν 3, κατέχων τὸν 2 ὑπὲρ τῆς ἀκολούθου στήλης, ἣν συνάπτων λέγε, 2 τὰ τηρηθέντα καὶ 8 ποιοῦσι 10, καὶ 4

$$\begin{array}{r} 3891 \\ 462 \\ 50 \\ 3831 \\ \hline 8234 \end{array}$$

ποιᾶσι 14, ϗ 8 ποιᾶσιν 22· γράφων ἂν αὖθις ὑπὸ τὸν 8 τὸν τῶν μονάδων χαρακτῆρα 2, τὸν δ' ἕτερον 2 τηρῶν τῇ τετάρτῃ ςήλῃ, σύναπτε ϗ ταύτην· 2 οἱ τηρηθέντες ϗ 3 ποιᾶσι 5, ϗ 3 ποιᾶσιν ὀκτὼ, ὃν ὑποκατάγραψον τελευταῖον τῷ 3· Ὀφείλει ἄρα τὰς πάσας μνᾶς 8234.

57. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἐν ἐμπορικῇ τινι ἑταιρείᾳ ἔθεντο, ὁ μὲν Ἀριςοκλῆς ἀργύρια 54630, ὁ δὲ Κλεινίας 946, ὁ δὲ Εὐαγόρας 17845, ὁ δὲ Περίανδρος τελευταῖον 85796· πόσον ἄρ' ἔθεντο συλλήβδην ἅπαντες; Ταυτὰ ἂν πράξας εὑρήσεις ὁλικὸν ἄθροισμα 159217.

54630
946
17845
85796
159217

58. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. χάριν γυμνασίας. Στρατηγός τις ἔλαβε κατὰ καιρὰς ἐκ τᾶ ςρατιωτικᾶ ταμείᾳ τὰς ἐνορωμένας ἀργυρίων ἀριθμὰς· ζητεῖ ἂν ἤδη μαθεῖν, ὅσον ἐςὶ τὸ ὅλον ἄθροισμα τῶν ληφθέντων.

37560
914
8523
50
56402
103449

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Ἀφαιρέσεως.

59. Ὅταν Ἀριθμός τις ἀπ' ἀριθμᾶ χωρίζηται, ἵνα, ὅσον ἀλλήλων διαφέρασι, γνωσθῇ, ἡ πρᾶξις καλεῖται Ἀφαίρεσις.

60. Ὡς ἂν ἂν ἀφέλῃς ἀριθμόν τινα ἀφ' ἑτέρα,

Α΄. Γράψον τὸν ἐλάσσω ὑπὸ τὸν μείζονα, μονάδας ὑπὸ μονάδας, δεκάδας ὑπὸ δεκάδας κτ, εἶτ' ἄγαγε ὑπ' αὐτὰς γραμμὴν πλαγίαν.

Β΄. Ἐὰν μὲν ὁ πρὸς δεξιὰ πρῶτος χαρακτὴρ τȣ̃ κάτω ἀριθμȣ̃ ἴσος ᾖ τῷ πρώτῳ χαρακτῆρι τȣ̃ ἄνω ἀριθμȣ̃, θὲς διαφορὰν αὐτῶν τὸ ο (15)· ἐὰν δ᾽ ἐλάσσων, ἀφελὼν αὐτὸν ἀπὸ τȣ̃ ἀνωτέρω ἀριθμȣ̃, γράψον ὑπὸ τῇ γραμμῇ τὴν διαφοράν· ἐὰν δὲ τελευταῖον ᾖ μείζων, λάβε ἐκ τȣ̃ προσεχῶς ἐγγὺς χαρακτῆρος τȣ̃ ἀνωτέρω ἀριθμȣ̃ μονάδα, ἣ μετενεχθεῖσα ἐπὶ τȣ̃ πρὸ αὐτῆς ἐν τοῖς δεξιοῖς χαρακτῆρος, δύναται 10 (41)· ἐκ τȣ̃ ἀθροίσματος ȣ̃ν τῶνδε τῶν 10 ϗ τȣ̃ προϋπάρχοντος χαρακτῆρος ἀφελὼν τὸν ἔνερθεν, ὑποκατάγραψον τὴν διαφοράν. Αὐτȣ̃ δὲ τȣ́τȣ γενομένȣ κἀπὶ τῶν ἑτέρων χώρων, δεκάδων ἀμέλειτοι, ἑκατοντάδων κτ., αἱ ἐκ δεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀρισερὰ γραφεῖσαι μερικαὶ διδόασι τὴν ὁλικὴν ζητȣμένην διαφοράν.

ΔΕΙΞΙΣ. Πρόδηλον γὰρ, ὅτι ȣ̃τως ἕξεις τὸ κατάλοιπον τῶν μονάδων, δεκάδων κτ. τȣ̃ ἀνωτέρω ἀριθμȣ̃, ὅ ἐςι τὸ κατάλοιπον τȣ̃ ὅλȣ ἀνωτέρω ἀριθμȣ̃, ἀφελὼν ἀπ᾽ αὐτȣ̃ τὰς ἐν τῷ κατωτέρω μονάδας, δεκάδας, κτ., ταὐτὸν εἰπεῖν ὅλον τὸν ἔνερθεν ἀριθμόν· ἕξεις ἄρ᾽ ȣ̃τω τὴν ὅλην διαφορὰν, ᾗ ἀλλήλων οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ διαφέρȣσιν. Ο. Ε. Π.

61. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐκ τῶν, ὧν ὀφείλει τις, 9594 ἀργυρίων ἀπέδωκε 2834· πόσ᾽ ἆρ᾽ ἔτι ὀφείλει;

Τὸ κατάλοιπον τȣ̃ ὀφλήματος ἔςαι ἀναμφιβόλως ἡ διαφορὰ, ᾗ διαφέρει ὁ 9594 ἀριθμὸς τȣ̃ 2834· εἰς ȣ̃ν εὕρεσιν ταύτης τῆς διαφορᾶς, α΄. γράψον ὑπαλλήλȣς τȣ̀ς δύω ἀριθμȣ̀ς, ἀγαγὼν γραμμὴν ὑπ᾽ αὐτȣ̀ς· β΄. ἀρξάμενος ἀπὸ τῶν μονάδων, λέγε, 4 πλὴν 4 ἴσος ο, ὅνπερ γράψον ὑπὸ τὸν 4· μετάβηθι εἶτα ἐπὶ τὸν τῶν δεκάδων χῶρον, 9 πλὴν 3 ἴσος 6, ὃν γράψον ὑπὸ τὸν 3· ἐπὶ δὲ τὸν τῶν ἑκατοντάδων χῶρον λέ-

9594
2834
6760

γε, 5 πλὴν 8, ὅπερ γενέσθαι ἀδύνατον· ληφθεῖσα οὖν μονὰς μία ἀπὸ τοῦ ἑπομένου χαρακτῆρος 9, ϗ μετενεχθεῖσα ἐπὶ τὸν 5, δύναται 10 (41), ὃς συνάμα τῷ 5 ποιεῖ 15· λέγε οὖν, 15 πλὴν 8 ἴσος 7· ὃν ὑποκαταγράψας μέτελθε τὰς χιλιάδας. ἔνθα, ἐπεὶ ἐκ τοῦ 9 ἐλήφθη μονὰς, ϗ μετηνέχθη ἐπὶ τὸν 5, ὁ 9 ἰσοδυναμεῖ ἤδη τῷ 8 (α)· λέγε οὖν, 8 πλὴν 2 ἴσος 6, ὃν ὑπογράψας, ἕξεις τὸ λοιπὸν τοῦ ὀφλήματος ἀργύρια 6760.

62. Ὅταν ὁ, ἀφ' οὗ δέοι τὴν μονάδα λαβεῖν, ἀριθμὸς ὑπάρχῃ 0, λάμβανε ἐκ τοῦ πρώτου ἀπαντῶντος θετικοῦ χαρακτῆρος μονάδα, ἥτις μετενεχθεῖσα ἐπὶ τοῦ 0 δύναται 10 (41)· τούτου δὲ τοῦ 10, ὃν δύναται ὁ 0, ληφθεῖσα αὖ μονὰς, καὶ μεταχθεῖσα ἐπὶ τὸν ἐν τοῖς δεξιοῖς τοῦ 0 κείμενον χαρακτῆρα, ἰσχύσει ϗ αὕτη 10 πρός γε τοῦτον τὸν χαρακτῆρα (αὐτόθ.), αὐτὸς δὲ ὁ 0 καταλείπεται δυνάμενος μόνον 9.

63. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἀγρός τις παρέχει ἐτήσιον πρόσοδον ἀργύρια 5031· ἀλλ' ἐξ αὐτῶν δαπανᾶται τοῖς ἐπιστατοῦσιν ἀργ. 250· πόσον ἆρ' ἐστὶ τὸ καθαρὸν τῆς προσόδου; 1 πλὴν 0 ἴση 1, ἣν γράψον ὑπὸ τὸν 0· 3 πλὴν 5 γενέσθαι ἀδύνατον. Τοῦ δὲ ἑπομένου χαρακτῆρος τοῦ ἀνωτέρου ἀριθμοῦ ὑπάρχοντος ϗ αὐτοῦ 0, εἰλήφθω μονὰς ἐκ τοῦ 5, ἥτις μεταχθεῖσα ἐπὶ τοῦ 0 ἰσοδυναμήσει 10· οὗ 1 ἐπὶ τοῦ 3 ἴση 10· 10 οὖν ϗ 3 ποιοῦσι 13· 13 πλὴν 5 ἴσος 8, ὃς γεγράφθω ὑπὸ τὸν 5· ἐπεὶ δὲ τὸ 0 δύναται ἤδη 9 (62)·

5031
250
4781

(α) Ὅταν ἀπὸ χαρακτῆρος τινὸς δανειζώμεθα μονάδα, οὐκ ἔστιν ἄχρηστον ἐπισημειοῦν αὐτῷ στίγμα (·), ἵνα μιμνησκώμεθα, ὅτι μονάδι ἔλαττον δύναται ὁ χαρακτήρ.

9 ἄρα πλὴν 2 ἴσος 7, ὃς ὑποκαταγεγράφθω· ὁ δὲ 5 ἰσοδυναμεῖ 4, ὃν ὑπογράψας τελευταῖον εὑρήσεις τὴν ζητουμένην καθαρὰν πρόσοδον 4781.

64. Ὁπόταν πλείω κατὰ συνέχειαν κέωνται ο, δῆλον, ὅτι διαβιβασθεῖσα μονὰς μία ἐκ τοῦ ἐγγὺς θετικοῦ χαρακτῆρος ἐπὶ τοῦ ἐν ἀριστερᾷ πρώτου τῶν ο, ἀναδείξει τουτὶ τὸ ο δυνάμενον 10· ἐὰν δ' ἐκ τούτων μεταβιβασθῇ 1 ἐπὶ τοῦ ἑπομένου ἐν τοῖς δεξιοῖς ο, τουτὶ μὲν καὶ αὐτὸ δυνήσεται 10, τὸ δ' ἡγούμενον ἐν ἀριστερᾷ μηδενικὸν δυνήσεται μόνον 9· τούτου δὲ κατὰ διαδοχὴν γενομένου, πάντα μὲν τὰ ο δυνήσονται ἕκαστον 9· μόνον δὲ τὸ ἐν δεξιᾷ πρῶτον δυνήσεται 10· ἐὰν δὲ καὶ ἐξ αὐτοῦ τοῦ ἐν τῇ δεξιᾷ πρώτου ληφθῇ μονάς, καὶ αὐτὸ τοῦτο ἐμφανεῖ 9.

65. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ὑπῆρχεν ἐν τῷ δημοσίῳ ταμείῳ ἄθροισμα χρυσίνων 90005002· ἀφῃρέθησαν δ' ἐξ αὐτοῦ 1453276· πόσοι ἄρα κατελείφθησαν ἐν τῷ ταμείῳ; Μονὰς μία ληφθεῖσα ἐκ τοῦ 5 καὶ μετενεχθεῖσα ἐπὶ τοῦ ἐγγὺς ο, δίδωσιν αὐτῷ δύναμιν 10, ἀλλ' ἐπεὶ κατὰ διαδοχὴν μετενεχθῆναι δεῖ τὴν μονάδα ἐπὶ πάντων τῶν ο μέχρι τοῦ 2, ἅπαν ο δυνήσεται μόνον 9· 12 πλὴν 6 ἴσος 6· 9 πλὴν 7 ἴσος 2· 9 πλὴν 2 ἴσος 7· 4 πλὴν 3 ἴσος 1. Μεταβιβασθείσης οὖν πάλιν μονάδος ἐκ τοῦ 9 ἐπὶ τὸ ἐγγὺς ο, καὶ ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τῶν ἄλλων, τὸ μὲν ἐν δεξιᾷ ο δυνήσεται 10· τὰ δ' ἄλλα δύω, τὰ πρὸς ἀριστεράν, ἕκαστον 9· 10 πλὴν 5 ἴσος 5· 9 πλὴν 4 ἴσος 5· 9 πλὴν 1 ἴσος 8· τέλος δέ, ἐπεὶ ὁ τὴν μονάδα δανείσας 9 δύναται ἤδη 8, γεγράφθω ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὁ 8.

```
 90005002
  1453276
---------
 88551726
```

Ὑπόδειγμα ἀφαιρέσεως ὑπὲρ πασῶν, ὧν ἔφθημεν εἰπόντες, περιπτώσεων.

```
 6700800053456
 3462140065726
--------------
 6354585987730
```

66. ΣΧΟΛΙΟΝ. Βάσανος πράξεως ἀριθμητικῆς ἐϛὶ πρᾶξις ἄλλη, δι' ἧς βεβαιȣ́μεθα, εἰ ἀσφαλῶς ἡ πρώτη διήνυσαι· ἐπεὶ δὲ ἡ Πρόσθεσις, ϗ ἡ Ἀφαίρεσις τὴν ἐναντίαν ἀλλήλαις βαίνȣσι, τῆς ἑτέρας καθαιρȣ́σης τὸ ὑπὸ τῆς ἑτέρας οἰκοδομηθὲν, ϗ ἀποκαθιϛώσης ἀριθμόν τινα, ὡς εἶχε πρὸ τῆς κατὰ τὴν ἑτέραν πράξεως· οἷον εἰ τȣ̃ 9 ἀφαιρεθῇ ὁ 5, καὶ καταλειφθῇ ὁ 4, προσεθεὶς ȣ̃τος ὁ 4 τῷ ἀφαιρεθέντι 5 ἐπανάγει τὸν 9, ὃν εἴχομεν πρὸ τῆς ἀφαιρέσεως· αὗται ἄρα αἱ διτταὶ πράξεις συμβαλȣ̃νται ἀμοιβαδὸν ἐπὶ τῇ ἀλλήλων βασάνῳ· ὅτι δὲ ταὐτόν ἐϛι ῥητέον ϗ περὶ τȣ̃ Πολλαπλασιασμȣ̃, ϗ τῆς Διαιρέσεως, φανήσεται ϗ πάνυ λαμπρῶς ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

Βάσανος τῆς Προσθέσεως.

67. Ἄφελε, ἀρχὴν ποιησάμενος ἀριϛερόθεν, τὸ ἑκάϛης ϛήλης ἄνωθεν ἐπὶ τὰ κάτω γινόμενον ἄθροισμα ἀφ' ἑκάϛȣ χαρακτῆρος τȣ̃ ὁλικȣ̃ ἀθροίσματος, τȣ̃ διὰ τῆς προσθέσεως συναχθέντος· ἐὰν ȣ̃ν μετὰ πάσας τὰς ἀφαιρέσεις μηδὲν κατάλοιπον ᾖ μήτε τȣ̃ ἀθροίσματος, μήτε τῶν ϛηλῶν, ἀσφαλῶς ἐπράχθη τὰ τῆς προσθέσεως· Ἐν τῷ προκειμένῳ τῆς προσθέσεως ὑποδείγματι, ἡ πρώτη ἐπὶ τῶν ἀριϛερῶν ϛήλη περιέχει μόνον 8, ὅς τις ἀφαιρεθεὶς ἐκ τȣ̃ χαρακτῆρος 9, ὃς συϛοιχεῖ αὐτῷ ἐπὶ τȣ̃ Α ἀθροίσματος, καταλείπει 1, ἥτις γεγράφθω ὑπὸ τὸν 9, καὶ κατήχθω ὁ τȣ̃ ἀθροίσματος χαρακτὴρ 7 ἐν δεξιᾷ τῆς καταλειφθείσης 1· καὶ συνήφθω ἡ τῷ 17 ἀντιϛοιχȣ̃σα ϛήλη· 8 καὶ 7 ποιȣ̃σι 15· ἀφῃρήσθω δὲ ὁ 15 τȣ̃ 17, καὶ ὁ καταλειπόμενος 2 γεγράφθω

```
 780
 875
8049
————
9704. Α
17
 20
  14
   0
```

ὑπὸ τὸν 7· καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ καταλειφθέντος 2 γραφὲν τὸ 0, ὅ ἐστιν ἐν τῷ Α ἀθροίσματι, παρέχει τὸν 20· 4 σὺν 7 ἴσος 11, σὺν 8 ἴσος 19· τοῦ ἓν 19 ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ 20, καταλείπεται 1, ἥτις γεγράφθω ὑπὸ τὸ 0· κατήχθω δ᾽ αὖ τελευταῖον ὁ ἔσχατος τοῦ ἀθροίσματος χαρακτὴρ 4 ἐν τοῖς δεξιοῖς τῆς 1, μεθ᾽ ἧς συστήσεται ὁ 14· 5 καὶ 9 ποιοῦσι 14, οὗ ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ 14, ἓν οὐδὲν καταλείπεται· τοῦθ᾽ ὅπερ ἡμᾶς καθίστησι βεβαίους, μηδεμίαν ὅλως παρεισφρῆσαι τῇ προσθέσει ἀπάτην.

ΥΠΟΔΕΙΜΑ ἕτερον βασανιζομένης προσθέσεως πρὸς ἄσκησιν τῶν πρωτοπείρων.

```
10579
 3899
  200
  577
-----
15255
05
 22
  25
   25
    0
```

68. ΣΧΟΛΙΟΝ Α´. Σαφὴς δὲ ὁ λόγος, ἐφ᾽ ὃν ἡ βάσανος αὕτη στηρίζεται· τοῦ γὰρ ἀθροίσματος, τοῦ διὰ τῆς προσθέσεως ἀγειρομένου, συμπληρώματος ὄντος ἁπασῶν τῶν συναφθεισῶν στηλῶν, ἀνάγκη ἄρα τὰς στήλας ταύτας ἀφαιρεῖσθαι ἔχειν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος, ἑνὸς μηδενὸς καταλειπομένου (15).

69. ΣΧΟΛΙΟΝ Β´. Ἐν τῇ τῆς προσθέσεως βασάνῳ ἐπαναλαμβάνειν ἔξεστι τὰ τῆς πράξεως ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ἰοῦσι, εἰ τὸ κατ᾽ ἀρχὰς ἐκ τῶν ἄνω ἐπὶ τὰ κάτω ἡ πρᾶξις ἐχώρησε, ἢ τ᾽ ἀνάπαλιν. Δὶς γὰρ ἐξηπατῆσθαι ταὐτὰ διὰ δυεῖν ἐποπτειῶν, φασὶν, ἀπίθανον· ἀραρότως οὖν ἕκαστος πεισθήσεται ἐπὶ τῆς πράξεως, τὴν ἣν ἄρτι δεδώκαμεν βάσανον, ἐν γένει εἰπεῖν, βεβαίαν ὑπάρχειν.

Βάσανος τῆς Ἀφαιρέσεως.

70. Τοῦ, ὃν ἀφείλομεν ἀριθμὸν, συναφθέντος τῇ εὑρεθείσῃ διαφορᾷ, τὸ ἄθροισμα ἀποδώσει αὐτὸν ἐκεῖνον τὸν ἀριθμὸν, ἀφ' οὗ ἐγένετο ἡ ἀφαίρεσις (9)· ἐν οὖν τῷ πρώτῳ τῶν ἡγησαμένων τῆς ἀφαιρέσεως ὑποδειγμάτων, τῷ ὑπ' ὄψιν ἤδη κειμένῳ, προσθέντες τὸν Β ἀριθμὸν, ὃν ἀφείλομεν, εἴτ' οὖν τὸν 2834 τῷ Γ ἀριθμῷ, ὃν διαφορὰν εὕρομεν, ἕξομεν τὸ α ἄθροισμα, τὸ κάτω γεγραμμένον, ἴσον τῷ ἄνω κειμένῳ ἀριθμῷ Α, ἀφ' οὗ ἐγένετο ἡ ἀφαίρεσις.

9594	Α
2834	Β
6760	Γ
9594	α

71. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅταν δὲ προκέηται ἀριθμὸς πολλάκις ἑαυτῷ προσεθησόμενος, ἢ πολλάκις ἀφ' ἑτέρου ἀφαιρεθησόμενος, τὸ μὲν πρῶτον ἐκτελεῖται διὰ συντόμου προσθέσεως, ἣ καλεῖται Πολλαπλασιασμὸς· τὸ δὲ, δι' ἀφαιρέσεως ἐπιτετμημένης, ἥτις ὀνομάζεται Διαίρεσις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ.

72. Πολλαπλασιασμὸς ἀκούει, ὁπόταν ἀριθμός τις, ὃς καλεῖται Πολλαπλασιαστέος, τοσάκις λαμβάνηται, ὅσαι ἔνεισι μονάδες ἑτέρῳ ἀριθμῷ, ὃς ὀνομάζεται Πολλαπλασιαστής· κοινῷ δὲ ὀνόματι ὅ,τε πολλαπλασιαστέος, καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς καλοῦνται ποιηταὶ, ἢ παράγοντες· ὁ δ' ὑπ' αὐτῶν γινόμενος τρίτος ἀριθμὸς προκύπτων λέγεται, καὶ γινόμενος, καὶ παραγόμενος· ἐν οὖν τῷ πολλαπλασιάζειν 5 ἐπὶ 4, εἴτ' οὖν τετράκις λαμβάνειν τὸν 5, ἐξ οὗ γίνεται 20· 5

μὲν ἐςὶν ὁ πολλαπλασιαςέος, 4 δὲ ὁ πολλαπλασιαςὴς, 20 δὲ ὁ προκύπτων, κτ..

73. Α΄. Ἔςιν ἄρα ὁ πολλαπλασιασμὸς, ἄλλως τε τοῦ πολλαπλασιαςοῦ πολλάκις τὴν μονάδα περιέχοντος, ἐπιτετμημένη πρόσθεσις· καὶ γὰρ πολλαπλασιάζων τὸν 5 ἐπὶ 4, ἢ τὸν 5 τετράκις λαμβάνων, ταὐτὸν ποιήσεις, ὡς εἰ κατὰ τὸ συνεχὲς τετράκις γράψας τὸν 5, τὰ τῆς προσθέσεως διαπράξαιο, ὡς ὁρᾶται ἐν τῷ ὑπ' ὄψιν πινακίσκῳ.

5
5
5
5
20

74. Β΄. Ὁ προκύπτων εὑρεθήσεται περιέχων τὸν πολλαπλασιαςέον, ὁσάκις τὴν μονάδα ὁ πολλαπλασιαςής· οὕτως ὁ 20 τετράκις περιέχει τὸν 5, ὥσπερ ὁ 4 τετράκις περιέχει τὴν μονάδα.

75. Γ΄. Πεισόμεθα ἄρα, ὡς ἡ εἰς πολλαπλασιασμὸν διδομένη μέθοδός ἐςιν ἀληθὴς, εἰ τοσάκις ἔνεςι τῷ προκύπτοντι ὁ πολλαπλασιαςέος, ὅσαι τῷ πολλαπλασιαςῇ ἐνυπάρχουσι μονάδες.

76. Δ΄. Συνάγεται δὲ ἔτι ἐντεῦθεν, ὡς ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐξ ἰδίας φύσεως οὐδόλως μεγεθύνει τὴν πολλαπλασιαζομένην ποσότητα, ἀλλὰ νῦν μὲν αὐτὴν μεγεθύνει, τοῦ πολλαπλασιαςοῦ τὴν μονάδα ὑπερέχοντος, νῦν δ' ἐλαττοῖ, ἐλάττονος ἢ μονὰς ὄντος τοῦ πολλαπλασιάζοντος· νῦν δ' ἥκιςα μεταβάλλει τὴν ταύτης δύναμιν, μονάδι τοῦ πολλαπλασιάζοντος ἰσουμένου. Αὐτίκα γὰρ ὁ 6, ἐὰν μὲν ἐπὶ 4 πολλαπλασιασθῇ, ὁ 24 προκύπτων μείζων ἔςαι τοῦ πολλαπλασιαςέου· καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐνταῦθα μεγαλυνεῖ τὴν ποσότητα· ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ὁ 6 ἐπὶ τριτημόριον, ληφθήσεται τὸ τρίτον τοῦ 6 μέρος εἴτουν ὁ 2 εἰς προκύπτοντα· καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς

ὧδε σμικρυνεῖ τὴν ποσότητα· τέλος δὲ, ἐὰν ὁ 6 ἐπὶ 1 πολλαπλασιασθῇ, προκύπτων ἔςαι ὁ 6· ϗ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἥκιςα μεταβαλεῖ τὴν ποσότητα.

77. Ε'. Ὅταν ἀριθμὸς θεωρεῖσθαι ἔχῃ ὡς ἀκριβῶς προκύπτων ἀφ' ἑτέρȣ τινὸς ἀριθμȣ͂, πολλαπλασιασθέντος ἐφ' ἑαυτὸν, ἢ ἐπ' ἄλλον ἀριθμὸν, Πολλαπλȣ͂ς ἀκȣ́ει τȣ͂ ἀριθμȣ͂ ἐκείνȣ· ȣ῞τως ὁ 16 πολλαπλȣ͂ς ὑπάρχει τȣ͂ 4, ὅτι τετράκις 4 ποιεῖ 16· ὁ δὲ 12 ἐςὶ πολλαπλȣ͂ς τȣ͂ 4, ὡσαύτως ϗ τȣ͂ 3, ὅτι τετράκις 3, ἢ τρὶς 4 ποιεῖ 12· αὐτὸς δὲ ȣ῟τος ὁ 12 πολλαπλȣ͂ς ȣ̓κ ἔςι τȣ͂ 5, ὅτι ȣ̓κ ἔςιν, ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθεὶς ἀποτελοίη 12.

78. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἅπας ἀριθμὸς πολλαπλȣ͂ς ἐςι τῆς μονάδος, εἴγε πᾶς ἀριθμὸς ἑαυτὸν παράγει, ἐπὶ τὴν μονάδα πολλαπλασιασθεὶς (72).

79. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐν ἅπαντι πολλαπλασιασμῷ τὸ προκύπτον ἐςὶ πολλαπλȣ͂ν τȣ͂τε πολλαπλασιαζομένȣ, ϗ τȣ͂ πολλαπλασιάζοντος.

80. Ἀριθμοὶ ὁλοσχερεῖς, οἱ μηδενὸς ἀριθμȣ͂ πλὴν τῆς μονάδος ὄντες πολλαπλοῖ, καλȣ͂νται Πρῶτοι· οἷον ὁ 5 ἐςὶν ἀριθμὸς πρῶτος· ȣ̓δεὶς γάρ ἐςιν ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, ὃς ἐφ' ἑαυτὸν, ἢ ἐπ' ἄλλον, πλὴν τῆς μονάδος, πολλαπλασιασθεὶς, τὸν 5 παράγει· ϗ δὴ πρῶτοι ἀριθμοί εἰσιν: 1, 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. κτ.

81. Ἀριθμὸς, ὅστις πλεονάκις ἢ ἅπαξ λαμβανόμενος ἀριθμόν τινα παράγει, καλεῖται μέρος σύμμετρον ἀριθμȣ͂ τȣ͂ παραγομένȣ· ȣ῞τως ὁ 3 ἐςὶ μέρος σύμμετρον τȣ͂ 12, ὡς τεταρτημόριον αὐτȣ͂ ὑπάρχων· λαμβανόμενος γὰρ τετράκις παράγει τὸν 12· ϗ ὁ 4 δέ ἐςι σύμμετρον μέρος τȣ͂ 12, τὸ τρίτον αὐτȣ͂ ὤν, εἴγε ληφθεὶς τρὶς πα-

ρέχει τὸν 12· καθ' ἑαυτὸ μέν τοι σαφὲς, ὅτι ὁ 4 ἥκιςα ὑπάρχει σύμμετρον μέρος τȣ̃ 15.

82. Ἀριθμὸς, ὃς, περιεχόμενος ἐν ἑτέρῳ, μὴ ᾖ ἀκριϐῶς σύμμετρον μέρος αὐτȣ̃, καλεῖται ἀσύμμετρον αὐτȣ̃ μέρος· ȣ̃τως ὁ 4 ἐςὶν ἀσύμμετρον μέρος τȣ̃ 15.

83. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐν παντὶ πολλαπλασιασμῷ ἑκάτερος τῶν ποιητῶν μέρος σύμμετρόν ἐςι τȣ̃ προκύπτοντος.

84. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ μερῶν συμμέτρων εἰσὶν ἄμοιροι.

85. Αἱ τȣ̃ πολλαπλασιάζοντος μονάδες ἐμφαίνȣσιν, ὁσάκις ὁ προκύπτων περιέχει τὸν πολλαπλασιαζόμενον (72)· ἀλλὰ ϗ αἱ τȣ̃ πολλαπλασιαζομένȣ μονάδες παριςῶσιν, ὁσάκις ὁ προκύπτων περιέχει τὸν πολλαπλασιαςήν· οἷον ἐν τῷ τȣ̃ 4 διὰ 3 πολλαπλασιασμῷ, ὁ μὲν 3 παρίςησιν, ὅτι ὁ 4 τρὶς περιέχεται ἐν τῷ προκύπτοντι, ὁ δὲ 4 ὡσαύτως ὅτι τετράκις ὁ 3· προϐαλλομένων ἄρα δυοῖν ἀριθμῶν ἐπὶ τῷ πολλαπλασιασθῆναι δι' ἀλλήλων, ȣ̓δὲν διοίσει, ὁπότερος ἂν αὐτῶν ληφθῇ πολλαπλασιαςὴς, ἢ πολλαπλασιαςέος· τὸν γὰρ αὐτὸν προκύπτοντα 12 ἀποίσομαι, εἴτε τετράκις τὸν 3 λάϐω, εἴτε τρὶς τὸν 4.

86. Πολλαπλασιάζοντες ἄρα ἀριθμὸν τὸν Α ἐφ' ἕτερον τὸν Β, τὴν πρᾶξιν ἀσφαλῶς πεπρᾶχθαι κρινȣ̃μεν, εἰ πολλαπλασιάσαντες εἶτα τὸν Β ἐπὶ τὸν Α, προκύπτοντα ἕξομεν τὸν αὐτὸν τῷ προτέρῳ.

87. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὡς τὰ πολλὰ δὲ τὸν ἐλάττω τῶν δυοῖν ἀριθμὸν εἰς πολλαπλασιαςὴν τίθεμεν εὐμαρείας ἕνεκα.

88. Ἐπεὶ ȣ̓̃ν ἀδιάφορον ὅλως, ὁπότερον τῶν δυοῖν

ἀριθμῶν θώμεθα πολλαπλασιαςὴν, ἢ πολλαπλασιαςέον (85), εἰκὸς ἐκ τέτε, πλειόνων ἀριθμῶν ἐπ' ἀλλήλες πολλαπλασιασθῆναι προκειμένων, μηδὲν ὡσαύτως διαφέρειν, καθ' ἣν ἂν τάξιν πολλαπλασιασθῶσιν· ἐδὲν ἧττον γὰρ ὁ 60 προκύψει ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5, κἂν εἴπωμεν, τρὶς ὁ 4 ποιεῖ 12, πεντάκις ὁ 12 ποιεῖ 60· εἴτε, τρὶς ὁ 5 ποιεῖ 15, τετράκις ὁ 15 ποιεῖ 60· εἴτε δὴ, τετράκις ὁ 5 ποιεῖ 20, τρὶς ὁ 20 ποιεῖ 60.

89. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὅταν ἄρα ὁ πολλαπλασιαςὴς, οἷον ὁ 24, ἢ προκύπτων ἐκ δυοῖν, ἢ πλειόνων παραγόντων, ἀδιαφόρως ἔξεςι πολλαπλασιάζειν τὸν πολλαπλασιαςέον, οἷος ὁ 5, ἤτοι δι' ὅλε τε πολλαπλασιαςε 24, ἐξ ὃ προκύπτει 120 ἢ κατὰ διαδοχὴν ἐπὶ τὲς παράγοντας τὸν 24, εἶτ' ἒν 2, 3, 4 λέγοντας· δὶς ὁ 5 ποιεῖ 10· τρὶς ὁ 10 ποιεῖ 30· τετράκις ὁ 30 ποιεῖ 120· ἢ ὅπως ἂν ἄλλως ἡ τάξις κινηθείη, ὁ προκύπτων ἔςαι ἀμεταποίητος.

90. Ὁ παραγόμενος ἔσεται ὡσαύτως ἀμεταποίητος, εἴτε τε πολλαπλασιαςέε, οἷον τε 20, ἐφ' ὅλον τὸν πολλαπλασιαςὴν, οἷον τὸν 5, πολλαπλασιασθέντος, ὅθεν προκύπτει ὁ 100, εἴτε τὸ πρῶτον πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ μέρος τε 5, εἶτ' ἒν τὸν 3, ἐξ ὃ πρόεισιν 60, εἶτα ἐπὶ τὸ κατάλοιπον μέρος 2, ὅθεν προκύπτει 40, καὶ ἐκ τέτε τῶν δύω προκυπτόντων συναπτομένων ἀλλήλοις· σαφὲς γὰρ, ὅτι ἐχ ἧττον ἑκατέρως ληφθήσεται ὁ 20, ὁσάκις περιέχεται ἡ μονὰς ἐν τῷ 5.

91. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ τε διὰ συνθετωτέρων ἀριθμῶν πολλαπλασιασμε θεωρία ἀεὶ κεῖται ἐν τῷ λαβεῖν ἅπαντας τὲς προκύπτοντας ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς ἁπλεςέρων (54)· ἔςιν ἄρα τῶν ὧν ἐκ ἄνευ τὲς ἐκ τῶν ἁπλεςέρων προ-

κύπτοντας τὸν πρωτόπειρον ἐκδιδαχθῆναι· εὑρεθήσονται δὲ πάντες εὐμαρῶς ἐν τῷ προκειμένῳ Α΄βακι, ὃν Πυθαγόρειον μονονὲ πάντες ἐκάλεσαν.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

92. Ι᾽δὲ δὴ ὅπως χρησόμεθα τῷδε τῷ Α΄βακι· εἰς εὕρεσιν τοῦ ὑπὸ τοῦ 6 καὶ 5 παραγομένου, ζητητέον τὸν οἰκίσκον 30, ἔνθ᾽ ἀμέλει ἡ ἐν ᾗ ὁ 6 στήλη, ἡ ἐκ τῶν ἄνω ἐπὶ τῇ κάτω χωροῦσα, συμπίπτει τῇ ἐξ ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ ἰούσῃ, ἐφ᾽ ἧς κεῖται ὁ 5· ἵνα δ᾽ εὕρωμεν τὸν ὑπὸ τοῦ 8 καὶ 7 γινόμενον, λαμβάνοντες τὸν 8 ἐν τοῖς ἄνω τοῦ Α΄βακος, τὸν δ᾽ 7 ἐν τῇ ἀριστερᾷ, ζητοῦμεν τὸν οἰκίσκον 56, ὅπου αἱ δύω στῆλαι, ἡ μὲν τοῦ 8 ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἡ δὲ τοῦ 7 ἐκ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ, προϊοῦσαι, ἀλλήλαις συμπίπτουσι.

93. Ο῾ γε μὴν ἐκ τοῦ 9, ἐφ᾽ ἑαυτὸν ἢ ἄλλον ὁντιναοῦν ἁπλοῦν ἀριθμὸν ἀχθέντος, παραγόμενος εὐπετέστερον εὑρεθήσεται, προσέχουσι τοῖς ἑπομένοις· δὶς γὰρ ὁ 9 ποιεῖ 20 πλὴν 2, εἴτ᾽ οὖν 18· τρὶς ὁ 9 ποιεῖ 30 πλὴν 3, 27· τετράκις ὁ 9 ποιεῖ 40 πλὴν 4, 36· πεντάκις ὁ 9 ποιεῖ

50 πλὴν 5, 45· ἑξάκις ὁ 9 ποιεῖ 60 πλὴν 6, 54.... τέλος δὲ, ἐννεάκις ὁ 9 ποιεῖ 90 πλὴν 9, 81.

94. Τῶν προκυπτόντων ἐκ τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν 6, 7, 8, 9, ἐπ' ἀλλήλȣς πολλαπλασιαζομένων, εἰς εὕρεσιν δυσχερεςέρων ὄντων, ἐξέςαι παρ' ἔλλειψιν τȣ̃ Πυθαγορείȣ Ἄβακος εὑρίσκειν τρόπῳ τοιῷδε.

Α΄. Ὑψȣ́σθων τῆς μὲν δεξιᾶς δάκτυλοι ὑπὲρ τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃, τῆς δ' ἀριςερᾶς, ὑπὲρ τῶν ἁπλῶν τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ· ὑψȣ́σθων δὲ, εἷς μὲν ὑπὲρ τȣ̃ 6, δύω δὲ ὑπὲρ τȣ̃ 7, τρεῖς δ' ὑπὲρ τȣ̃ 8· τέσσαρες δ' ὑπὲρ τȣ̃ 9· ἕκαςος δὲ τῶν ὑψωμένων δακτύλων ἐμφαινέτω δεκάδα μίαν.

Β΄. Πεπολλαπλασιάσθω ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων, οἳ λείπονται κεκλεισμένοι, τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἐπὶ τὸν τῶν κεκλεισμένων τῆς ἀριςερᾶς· ὁ δὲ προκύπτων, τῷ τῶν δεκάδων ἀθροίσματι συναφθεὶς, ποιήσει τὸν ζητȣ́μενον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἵν' ȣ̃ν εὑρεθῇ ὁ ὑπὸ 6 ϗ 7 παραγόμενος, ὑψȣ́σθωσαν δύω μὲν δάκτυλοι τῆς δεξιᾶς ὑπὲρ τȣ̃ 7, εἷς δὲ τῆς ἀριςερᾶς ὑπὲρ τȣ̃ 6· οἱ ὑψωμένοι τρεῖς δάκτυλοι δηλȣ̃σι τριάκοντα· τρεῖς δὲ οἱ κεκλεισμένοι τῆς δεξιᾶς, πολλαπλασιασθέντες διὰ τῶν τεττάρων κεκλεισμένων τῆς ἀριςερᾶς, ποιȣ̃σι 12 · 12 ȣ̃ν ϗ 30 ποιȣ̃σι 42, ὅς ἐςι γινόμενος ὑπὸ τȣ̃ 6 ϗ 7.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἵνα δὲ ὁ ὑπὸ 8 ἐπὶ τὸν 8, εὑρεθῇ, ὑψωμένοι 3 ἐν τῇ δεξιᾷ, ϗ τοσȣ̃τοι ἐν τῇ ἀριςερᾷ δηλȣ̃σιν 60· δύω δὲ κεκλεισμένοι ἐν τῇ δεξιᾷ διὰ δύω τῶν ἐν τῇ ἀριςερᾷ πολλαπλασιασθέντες, διδόασι 4· προσθέσει ἄρα εὑρίσκεται προκύπτων 64.

95. ΟΡΙΣΜΟΣ. Πολλαπλασιασμὸν ἁπλȣ̃ν ὀνομάζομεν, ȣ̃ τινος ὁ πολλαπλασιαςὴς ἑνὸς μόνȣ χαρακτῆ-

ρός ἐςι περιεκτικὸς, σύνθετον δὲ, οὗ πλείȣς ἢ ἕνα χαρακτῆρας ὁ πολλαπλασιαςὴς περιέχει.

Πολλαπλασιασμὸς Α΄ πλȣ̃ς.

96. Α. Ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς (87) οἷον ὁ πολλαπλασιαςὴς, γεγράφθω ὑπὸ τὸν μείζονα· καὶ πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ τὸν ἔνερθεν ἀριθμὸν ὁ πρῶτος ἐν δεξιᾷ χαρακτὴρ τȣ̃ ὕπερθεν, καὶ γεγράφθω ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαςὴν ὁ ἐντεῦθεν γινόμενος· ἐὰν δὲ ȣ̃τος δύω περιέχῃ χαρακτῆρας, γεγράφθω μόνον ὁ τῶν μονάδων σημαντικὸς (33)· ὁ δὲ δηλῶν δεκάδας, τηρηθήτω ἐπὶ τῷ συναφθῆναι, οἷα δὴ καὶ μονάδες (42) τῷ ἐφεξῆς προκύπτοντι ἐκ τȣ̃ προσεχῶς κειμένȣ χαρακτῆρος τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ.

Β΄. Πεπολλαπλασιάσθων ὡσαύτως ἅπαντες ἑξῆς οἱ χαρακτῆρες τȣ̃ ἀνωτέρω διὰ τȣ̃ κατωτέρω, καὶ γεγράφθων οἱ ἐξ αὐτῶν προκύπτοντες κατὰ τὸν προῤῥηθέντα τρόπον, ἐκ δεξιῶν χωρȣ̃ντες πρὸς τὰ λαιά· τὸ δ᾽ ὅλον ἔςαι ὁ γινόμενος ἀριθμὸς, ὃς ἐζητεῖτο.

Γ΄. Ὁπηνίκα ο ἀπαντᾷ ἐν τῷ πολλαπλασιαςέῳ, τηρȣ́μενος τις ἀριθμὸς ἐκ τȣ̃ πρὶν γεγονότος, γεγράφθω ἐν τῷ χώρῳ τȣ̃ προκύπτοντος ἐκ ο· ἢ μηδενὸς τηρȣμένȣ, τεθείσθω ὡς παραγόμενος τὸ ο.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ. Ἀριθμός τις πολλαπλασιασθησόμενος, ὃν καλῶ Α, ȣ̓κ ἔςιν ἀλλ᾽ ἢ συμπλήρωμα μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, ἐξ ὧν σύγκειται (9)· ἀλλὰ γὰρ, ὃ εἴρηται πρὸ μικρȣ̃, διαπερανθέντος, λαμβάνονται αἱ μονάδες, μεθ᾽ ὃ αἱ δεκάδες, εἶτα αἱ ἑκατοντάδες κτ. τȣ̃ Α ἀριθμȣ̃, ὁσάκις ἔνεσιν ἡ μονὰς τῷ Β ἀριθμῷ, ὃν ὑποτίθημι πολλαπλασιαςήν· εἴληπται ἄρα, τȣ́τȣ ȣ̃τω γεγο-

νότος, ἅπας ὁ Α ἀριθμὸς, ὁσάκις τὴν μονάδα ὁ πολλαπλασιαςὴς περιέχει (72) Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Δρυμών τις, περιέχων δένδρα 300420, πεπώληται ἅπας, τιμηθέντος ἑκάςȣ δένδρȣ ἀργυρίων 4. Πόση ἄρ᾽ ἐςὶν ἡ ὅλη τȣ̃ δρυμῶνος τιμή;

Φανερὸν ȣ̃ν, ὅτι ἐςὶν ὁ 300420 τετράκις ληφθείς· ζητεῖται τοίνυν ἵν᾽ ὁ 300420 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4, ὃ γενήσεται ȣ̃τω· α΄. γεγράφθωσαν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ ὑπαλλήλως, ὡς ὁρῶνται· β΄. λέγε: τετράκις τὸ ο ποιεῖ ο· γεγράφθω τὸ ο ὑπὸ τὸν 4· τετράκις ὁ 2 ποιεῖ 8· γεγράφθω 8 πρὸς ἀριςεράν τȣ̃ ο· τετράκις 4 ποιεῖ 16· γεγράφθω 6 τηρηθείσης τῆς 1 (96)· τετράκις ο ποιεῖ ο· γεγράφθω ἡ τηρηθεῖσα μονάς· τετράκις ο ποιεῖ ο· γεγράφθω ο (96. Γ΄.)· τετράκις 3 ποιεῖ 12· γραφέντος ἄρα ϗ τȣ́τȣ, ὁ Γ ἀριθμὸς ἔςαι ὅλος ὁ προκύπτων, ὃς δηλοῖ ὅλην τὴν τιμὴν τȣ̃ δρυμῶνος.

```
 300420
      4
-------
1201680 Γ
```

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Πόση ἄρ᾽ ἐςιν ἡ τιμὴ ὀργυιῶν γῆς 7097, 9 ἀργυρίων τιμηθείσης ὀργυιᾶς ἑκάςης; Τῶν αὐτῶν πραχθέντων εὑρεθήσεται 63873.

```
 7097
    9
-----
63873 Δ
```

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄.

```
 34056 Α
     6
------
204336 Β
```

Βάσανος τȣ̃ ἁπλȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃.

97. Δυνάμεθα δὲ τὴν τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ βάσανον ἐκτελέσαι ἄνευ τῆς ἀπὸ τῆς διαιρέσεως συνδρομῆς, τρόπῳ τοιῷδε.

Ἐὰν μὲν γὰρ ὁ πολλαπλασιαστὴς ᾖ πολλαπλοῦς, πεπολλαπλασιάσθω πρῶτον ὁ πολλαπλασιαστέος δι' ἑνὸς τῶν τὸν πολλαπλασιαστὴν παραγόντων, εἶθ' οὕτως ὁ προκύπτων ἐπὶ τὸν ἕτερον (89)· οἷον, ἐπὶ τοῦ ἐσχάτου τῶν ὑποδειγμάτων, τοῦ 6 πολλαπλασιαστοῦ πολλαπλοῦ ὑπάρχοντος τοῦ 2 καὶ 3, πεπολλαπλασιάσθω ὁ Α πρῶτον ἐπὶ τὸν 3, ἐξ οὗ πρόεισι 102168· οὗτος δ' εἶτα ἐπὶ τὸν 2, ὅθεν προκύπτει ὁ Β ἀριθμὸς, ὃς εὕρηται κατ' ἀρχὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 6 ἐπιτηδευθέντος.

Ἐὰν δ' ὁ πολλαπλασιαστὴς ἀριθμὸς ᾖ πρῶτος, οἷος ὁ 7, ἐφ' ὃν ἂν προκέοιτο πολλαπλασιάσαι τὸν 3485, ὅθεν παράγεται 24395· πεπολλαπλασιάσθω ὁ 3485 δι' ἑνὸς μέρους τοῦ 7, ληφθέντος κατὰ τὸ δοκοῦν, τοῦ 4 φέρε, εἶτα διὰ τοῦ καταλοίπου μέρους 3· τοῦ δὲ ἀθροίσματος τῶν δύω ἀνὰ μέρος προκυπτόντων 13940, καὶ 10455, παρεχομένου τὸν αὐτόν, συναχθήσεται ἐντεῦθεν, ὡς ὑγιῶς διαπέπρακται τὰ κατὰ τὸν πρῶτον πολλαπλασιασμόν.

3485
7
24395
3485
ἐπὶ 4, καὶ 3
13940
10455
24395

Περὶ τοῦ συνθέτου πολλαπλασιασμοῦ.

98. Ἐὰν ὅ,τε πολλαπλασιαστέος, καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς σύνθετοι ὦσι, τηρηθήτωσαν αἱ αὐταὶ μέθοδοι, αἷς περὶ τοῦ ἁπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀπεδώκαμεν, κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον.

Α'. Πολλαπλασιασθήτωσαν ἅπαντες οἱ τοῦ πολλαπλασιαστέου χαρακτῆρες ἐπὶ τὸν πρῶτον ἐνδεξιοῖς χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· εἶτα πάντες ἐπὶ τὸν δεύτε-

ρον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· γεγράφθωσαν ὑπάλληλοι οἱ προκύπτοντες ἔκτε τοῦ πολλαπλασιαςέου, καὶ ἑκάςου τῶν τοῦ πολλαπλασιαςοῦ χαρακτήρων, ὅπως ἕκαςος τῶν ἐφεξῆς προκυπτόντων ὀπισθοδρομῇ χῶρον ἕνα (44) ἐπὶ τὰ λαιὰ, πρόςγε τὸν πρὸ αὐτοῦ γινόμενον.

Β΄. Τέλος δὲ συναφθέντων ἁπάντων τῶν προκυπτόντων, τὸ τούτων ἄθροισμα ἔςαι ὁ γινόμενος, ὃς ἐζητεῖτο.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Πόσου τιμηθήσεται ὕφασμα πήχεων 189, ἑκάςου πήχεως 17 τιμωμένου ἀργυρίων; ἢ τιμηθήσεται ἑπτακαιδεκάκις 189· εἰς οὖν εὕρεσιν τούτου τοῦ παραγομένου, πεπολλαπλασιάσθω ὁ 189 πρῶτον μὲν ἐπὶ τὸν 7, ὅθεν πρόεισιν ὁ Β, εἶτ᾽ οὖν ὁ 1323· εἶτα δ᾽ ἐπὶ 1, ἔνθα μένει ὁ πολλαπλασιαςέος ἀμετάτρεπτος, εἶτ᾽ οὖν 189· οὗ κοῦν προσθέσει τῶν δύω προκυπτόντων Β καὶ Γ εὑρίσκεται ὁ Δ, εἶτ᾽ οὖν 3213 δηλωτικὸς ἁπάσης τῆς τιμῆς τοῦ ὑφάσματος.

189	
17	
1323	Β
189	Γ
3213	Δ

99. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο΄ δεύτερος τοῦ πολλαπλασιαςοῦ χαρακτὴρ σημαίνει 10 πρόςγε τὸν πρῶτον 7· ἄρα ὁ προκύπτων ἐκ τῶν 189 καὶ 1 σημαίνει δεκάδας πρόςγε τὸν πρῶτον προκύπτοντα ἐκ τοῦ 189 καὶ 7, καὶ δὴ δυνήσεται τὸν 1890· γραπτέον ἄρα τὸν ἐν τοῖς δεξιοῖς πρῶτον αὐτοῦ χαρακτῆρα, εἶτ᾽ οὖν τὸν 9, ἐν τῇ τῶν δεκάδων χώρᾳ, εἶτ᾽ οὖν ὑπὸ τὸν 2. Ε᾽ὰν δὲ τριῶν εὐμοιρῇ χαρακτήρων ὁ πολλαπλασιαςὴς, ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ πολλαπλασιαςέου καὶ τοῦ ἐπὶ τὰ λαιὰ τρίτου τῶν τοῦ πολλαπλασιαςοῦ χαρακτήρων πρόςγε τὸν πρὸ αὐτοῦ γινόμενον ἐμφαίνει ἑκατοντάδας· ὁ πρῶτος ἄρα κατὰ δεξιὰν τῶν αὐτοῦ χαρακτήρων γραφήσεται ἐν τῷ τῶν ἑκατοντάδων χώρῳ, καὶ οὕτως ἐφε-

ξῆς· οὐδὲν ἄρ' ἀπεικὸς, ἕκαστον τῶν ἐφεξῆς παραγομένων ὀπισθοποδεῖν χῶρον ἕνα ἐπὶ τὰ λαιὰ, ὥς γε τὸν πρὸ αὐτοῦ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. τοῦ συνθέτου πολλαπλασιασμοῦ. Ἀπὸ καταβολῆς κόσμου παρῆλθον ἐνιαυτοὶ 7314· ἐὰν οὖν ὁ ἐνιαυτὸς ὑποτεθῇ συγκείμενος ἐξ ἡμερῶν 365· πόσαι ἄρ' ἡμέραι παρῆλθον μετὰ τὴν δημιουργίαν τοῦ κόσμου;

7314 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 5 ποιεῖ τὸν Ε· ἐπὶ δὲ τὸν 6, τὸν Ζ, οὗτινος τὸν πρῶτον ἐνδεξιοῖς χαρακτῆρα γραπτέον ὑπὸ τὸν 7· πολλαπλασιασθεὶς τελευταῖον ἐπὶ τὸν 3, παράγει τὸν Θ, οὗ τὸν 2 χαρακτῆρα θετέον ὑπὸ τὸν 8 τὸν δεύτερον τοῦ προγενομένου· οἱ οὖν Ε, Ζ, Θ ἀριθμοὶ συναφθέντες ποιοῦσι τὸν Κ· τουτέστι μετὰ τὴν τοῦ κόσμου δημιουργίαν παρῆλθον ἡμέραι 2669610.

```
   7314 Α
    365 Β
-------
  36570 Ε
 43884  Ζ
21942   Θ
-------
2669610 Κ
```

Βάσανος τοῦ συνθέτου πολλαπλασιασμοῦ.

Ποίει τὸν μὲν πολλαπλασιαστὴν πολλαπλασιαστέον, τὸν δὲ πολλαπλασιαστέον πολλαπλασιαστὴν, καὶ πράττε αὖθις τὸν πολλαπλασιασμόν· κἂν γένηται ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἀσφαλὴς ἦν ἡ πρᾶξις· οἷον ἐπὶ τοῦ πρώτου ὑποδείγματος, ἐπειδὴ ὁ αὐτὸς γίνεται 3213, πέπρακται ὑγιῶς ὁ πολλαπλασιασμός.

```
  17
 189
----
 153
136
17
----
3213
```

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ πρὸς ἄσκησιν. Πόσον δαπανηθήσεται ἐν στρατῷ συγκροτουμένῳ ἐκ στρατιωτῶν 57809, δαπανωμένων ἑκάστῳ ἀργυρίων 207;

```
   57809
     207
--------
  404663
 00000
115618
--------
11966463
```

Πολλαπλασιασμὸς ἐπιτετμημένος.

100. Πολὺ δὲ τῆς πράξεως ἐπιτέμνεται, ἐὰν ἤτοι θατέρῳ τῶν παραγόντων, ἢ ἑκατέρῳ, ἢ ϗ ἀμφοῖν μηδενικὰ προσῇ· τηνικαῦτα γὰρ συντομώτερον πολλαπλασιάσομεν κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

Α΄. Εάν, ὡς ἐπὶ τȣ ἐσχάτȣ τῶν ὑποδειγμάτων, ἀπαντήσῃ κατὰ τὸν πολλαπλασιαςὴν ἓν ο, πάντα τὰ ο, ἐξ ὧν συγκροτεῖται ὁ ο, εἴτ' ἓν ὁ προκύπτων ἐκ τȣ πολλαπλασιαςέȣ καὶ τȣ ο, ἀχρηςήσȣσι πλὴν τῶν δύω πρὸς δεξιὰν πρώτων, ἃ δείκνυσιν, ὅπȣ θετέον τὸν ἐφεξῆς παραγόμενον· ἀποχρήσει ἄρα ταῦτα τὰ δύω ο σημειωθέντα ἐν τοῖς δεξιοῖς· ὅτως ἐπὶ τȣ ῥηθέντος ὑποδείγματος ἀποβληθῆναι δύναται τὰ πρὸς τὰ λαιὰ τρία ο.

Β΄. Ηνίκα πρὸς τῷ τέλει τȣ πολλαπλασιαςέȣ, ἢ τȣ πολλαπλασιαςȣ, ἢ ϗ ἑκατέρων, ἓν ἢ πλείω προσαριθμῶνται ο, δυνάμεθα πολλαπλασιάσαι, ἀρξάμενοι ἀπὸ τῶν πρώτων ἐνδεξιοῖς θετικῶν χαρακτήρων, ἐν δὲ τῷ τέλει προσθεῖναι κατὰ δεξιὰν τȣ ὁλικȣ γινομένȣ πάντα τὰ τῷ τε πολλαπλασιαςέῳ, ϗ τῷ πολλαπλασιαςῇ προσόντα ο· ἀποβήσεται γὰρ τ' αὐτὸν, ὃ ϗ διὰ τȣ χοινοτενεςέρȣ πολλαπασιασμȣ· τȣτὶ μέν τοι ἐπεὶ γενέσθαι ἀμήχανον ἐπὶ τῶν κατὰ τὸ μέσον τῶν χαρακτήρων ἀπαντώντων μηδενικῶν, τηνικαῦτα κἀπὶ τȣτων κατὰ τὰ ὁροθετηθέντα ποιητέον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Πόσας περιέχει τετραγωνικὰς ὀργιὰς ἔκτασις ἀγρȣ, ȣ̓ τὸ μὲν μῆκος ὀργυιαὶ 70500, τὸ δὲ πλάτος 48030.

Επειδήπερ, ζητȣ̃ντες ἐν τετραγωνικαῖς ὀργιαῖς τὴν ἔκτασιν χωρίȣ τινὸς, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος ἐπὶ

τὸ πλάτος, πολλαπλασιασθήσεται κἀνταῦθα ὁ 70500 ἐπὶ τὸν 48030· βουλομένοις δ' ἐπιτεμεῖν τὰ τῆς πράξεως, παροπτέον τὰ πρὸς τῷ τέλει τῶν δύω τουτωνὶ ἀριθμῶν 0, εἶτ' οὖν πολλαπλασιαστέον μόνον τὸν 705 ἐπὶ τὸν 4803· ὁ οὖν ἐκ τούτων προκύπτων ἐστὶ 3386115, ἐφ' οὗ τῇ δεξιᾷ γραπτέον 3 μηδενικὰ, ἅτε δὴ ὑπαρχόντων δυοῖν μὲν ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἑνὸς δὲ ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· ὁ δὲ Α ἀριθμὸς ἔσται δηλωτικὸς τῶν τετραγωνικῶν ὀργυιῶν τῶν ἐν τῷ ἀγρῷ περιεχομένων.

```
       705
      4803
  --------
      2115
       00
    5640
   2820
  ----------
3386115000 A
```

101. Ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων ἕπεται, ὡς, εἰς ἀριθμοῦ παντὸς ἐπὶ 10 πολλαπλασιασμὸν, ἀποχρήσει ἓν 0 προσθεῖναι ἐν τοῖς αὐτοῦ δεξιοῖς· πολλαπλασιάζοντες γὰρ ἀριθμὸν ἅπαντα ἐπὶ τὴν 1, ἕξομεν προκύπτοντα αὐτὸν ἐκεῖνον τὸν δεδομένον ἀριθμὸν (78)· καὶ οὕτως ἀλυσιτελὲς ἔσται τὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρῆμα· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον πολλαπλασιάζοντες ἀριθμόν τινα δι' 100 τίθεμεν δύω 0 ἐν τοῖς αὐτοῦ δεξιοῖς· διὰ δὲ 1000, τρία 0, καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ταλάντου τινὸς καθ' ὑπόθεσιν τιμωμένου ἀργυρίων 4256, πόσων χιλιάδων ἀργυρίων τιμᾶται χίλια τάλαντα.

Δέον οὖν πολλαπλασιάσαι 4256 ἐπὶ 1000, ἀποχρήσει θεῖναι πρὸς δεξιὰν τοῦ πρώτου τῶν ἀριθμῶν 0 τρία, καὶ περανθήσεται ὁ πολλαπλασιασμός· τὰ ἄρα χίλια τάλαντα περιέξουσιν ἀργύρια 4256000.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Πόλις κατὰ μῆκος μὲν περιέχουσα στάδους 300, κατὰ δὲ πλάτος 100, πόσων ἔσται

περιεκτικὴ τετραγωνικῶν ςαδίων; ἵν' ὖν πολλαπλασιασθῇ ὁ 300 ἐπὶ 100, ἄλις ἔςαι, εἰ γραφείησαν ἐν τοῖς τῦ 300 δεξιοῖς μηδενικὰ δύω· εὑρεθήσονται δὲ ὕτω ςάδια τετραγωνικὰ 30000.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Τί δή ποτε προκύψει ἐκ τῦ 1000, ϗ 1000; ἔχεις εὐθὺς τὸν προκύπτοντα, γράψας κατ' ἀκολυθίαν τρία 0 ὕτω 1000000.

102. Ἐπείπερ ἀδιαφόρως ἔξεςι πολλαπλασιάζειν, ἤτοι ἐφ' ὅλον τὸν πολλαπλασιαςὴν, ἢ ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τὺς αὐτὸν παράγοντας (89), ἐπενεγκεῖν δυνάμεθα τὰς ἐφεξῆς μεθόδυς, αἳ συχνότερον ἐπὶ τῆς πρακτικῆς ἐγκρίνονται.

Ἵνα πολλαπλασιασθῶσι, φέρ' εἰπεῖν, 35 ἐπὶ 6, ὡς ὅτε βυλόμεθα ἀναγαγεῖν ὀργιὰς εἰς πόδας κτ., παρατηρῦντες, ὅτι ὁ 6 ἐςὶ προκύπτων ἐκ τῦ 2 καὶ 3, πολλαπλασιάζομεν τὸν 35 πρῶτον ἐπὶ τὸν 2, εἶτα τὸν ἐκ τύτυ, εἴτ' οὖν τὸν 70 ἐπὶ 3, καὶ ὕτω προελεύσεται 210, ὃς προκύψει καὶ ἐπὶ 6 τῦ πολλαπλασιασμῦ γεγονότος.

103. Ὁ 20 προκύπτει ἐκ 2 ϗ 10· 30, ἐκ 3 ϗ 10· 40, ἐκ 4 ϗ 10· 60, ἐξ 6 ϗ 10· ἵν' ὖν πολλαπλασιασθῇ ἀριθμός τις ἐπὶ 20, πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ 2, προςεθέντος ἅμα κατὰ δεξιὰν τῷ γινομένῳ τῦ 0· εἰς δὲ τὸ πολλαπλασιάσαι ἀριθμόν τινα ἐπὶ 30 γενέσθω μὲν ἐπὶ 3 ὁ πολλαπλασιασμὸς, τεθείσθω δ' ἐν δεξιᾷ τῦ παραγομένυ 0· ἵνα δὲ πολλαπλασιάσωμεν 8 ἐπὶ 40, ὅπως ἀναγάγωμεν φέρ' εἰπεῖν, 8 γρόσια τυρκικὰ εἰς παράδας, πολλαπλασιάσωμεν 8 ἐπὶ 4, ϗ προσθῶμεν 0 τῷ 32. Τέλος δὲ εἰς τὸν ἐπὶ 60 πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῦ τινος, ὡς ὅτε πρόκειται τὰ τῆς Αὐςρίας καλύμενα φιορίνια εἰς

τὰ ἐν αὐτοῖς ἀναλῦσαι ὀνομαζόμενα ςαυροφόρα, πεπολλαπλασιάσθω ὁ 8 φέρε, ἐπὶ 6, ϰ̀ προςεθείσθω μηδενικὸν τῷ 48, ἵνα γένηται 480.

Αἱ μέθοδοι αὗται, ἐνβραχεῖ πάνυ ἐκτελȣ́μεναι, ἑσαεὶ ἐν τῇ πρακτικῇ προκρίνονται τȣ̃ ἐπὶ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ ἀποδοθέντος (98) γενικȣ̃ κανόνος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ Διαιρέσεως.

104. Διαίρεσίς ἐςι πρᾶξις, δἰ ἧς, ὅσον ἐνδέχεται ἀριθμὸς ἕτερος ἑτέρȣ ἀφαιρεῖται, ἵνα γνωσθῇ ὁσάκις ἐκείνῳ ἐμπεριείχετο· διακριδὸν δὲ καταλέγονται ἁπάσῃ διαιρέσει ἀριθμοὶ τρεῖς, ὁ διαιρέτης, ὁ διαιρετέος, ϰ̀ τὸ πηλίκον.

105. Διαιρέτης μὲν ȣ̃ν καλεῖται ὁ ἀφαιρȣ́μενος· διαιρετέος δὲ ὁ, ἀφ᾽ ȣ̃ ἡ ἀφαίρεσις γίνεται· τὸ δὲ πηλίκον, τῆς πράξεως ἐκπερανθείσης, ἐμφαίνει ὁσάκις τȣ̃ διαιρετέȣ ἀφῃρέθη ὁ διαιρέτης, εἴτ᾽ ȣ̃ν, ὁσάκις ἐκείνῳ ἐμπεριείχετο· οἷον, τȣ̃ 8 ἀφαιρεῖν δυνάμεθα τὸν 2 τετράκις· 8 ἄρα διαιρεθεὶς διὰ 2 δίδωσι 4· ϰ̀ 2 μέν ἐςιν ὁ διαιρέτης· 8 δὲ ὁ διαιρετέος· 4 δὲ τὸ πηλίκον.

106. Ἐπειδὴ ἄρα αἱ τȣ̃ πηλίκȣ μονάδες παριςῶσιν, ὁσάκις ὁ διαιρέτης ἔνεςι τῷ διαιρετέῳ, ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην, ὁσάκις τὸ πηλίκον περιέχει τὴν μονάδα· οἷον ἐπὶ τȣ̃ ληφθέντος ὑποδείγματος, ὁ 8 περιέχει τὸν 2, ὁσάκις τὴν μονάδα ὁ 4.

107. Ἐὰν ἄρα πολλαπλασιασθῇ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἢ τἀνάπαλιν, ἐπειδήπερ ἐκ τȣ́τȣ ὁ διαι-

ρέτης ληφθήσεται, ὁσάκις ἀφῄρηται τȣ͂ διαιρετέȣ, τȣ͂ ἐκ τῆς διαιρέσεως καταλοίπȣ, εἴπερ εἴη, προςεθέντος τῷ παραγομένῳ, ἐπανακάμψει αὖθις ὁ διαιρετέος· ἐν ȣ͂ν τῷ φθάσαντι ὑποδείγματι τὸ πηλίκον 4, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2, ἀποδώσει τὸν 8 διαιρετέον. Μαρτύριον ἄρα ὑγιῶς διαπερανθείσης διαιρέσεως, εἰ, ἐπαχθὲν τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἀποκαταςήσει αὖθις τὸν διαιρετέον.

108. Ἐπειδήπερ ἐπὶ τȣ͂ πολλαπλασιασμȣ͂ αἱ τȣ͂ πολλαπλασιαςȣ͂ μονάδες ἐκδηλȣ͂σιν, ὁσάκις ὁ πολλαπλασιαςέος ἔνεςι τῷ παραγομένῳ, ϗ ἀντιςρόφως (85), διαιρȣ͂σιν ἄρα προκύπτοντα διὰ τȣ͂ ἑτέρȣ τῶν αὐτȣ͂ ποιητῶν, προκύψει πηλίκον τῶν παραγόντων ὁ ἕτερος· παράγοντες, φέρ' εἰπεῖν, τὸν 15 ὑπάρχȣσι 3 ϗ 5· διελόντες ȣ͂ν 15 διὰ 3 ἕξομεν 5, διελόντες δὲ 15 διὰ 5 εὑρήσομεν 3.

109. Εἰσόμεθα ἄρα, εἴπερ ἀσφαλῶς διαπεπέρανται ὁ πολλαπλασιασμὸς, ἐὰν, τὸν προκύπτοντα διελόντες διὰ τȣ͂ πολλαπλασιαςȣ͂, ἀπολάβωμεν τὸν πολλαπλασιαςέον· ἢ τὸν πολλαπλασιαςὴν, διελόντες διὰ τȣ͂ πολλαπλασιαςέȣ.

110. Ἐὰν, προκύπτοντός τινος γινωσκομένȣ, καὶ θατέρȣ τῶν παραγόντων αὐτὸν, ζητῆται ὁ ἕτερος, διῃρήσθω ὁ προκύπτων ȣ͂τος διὰ τȣ͂ γνωςȣ͂ παράγοντος, τὸ δὲ πηλίκον ἀποδώσει τὸν ζητȣμενον ποιητήν· γινώσκοντες, φέρ' εἰπεῖν, τὸν 30 παραγόμενον ὑπὸ 6, ϗ ἄλλȣ ἀριθμȣ͂, ὃν εἰδέναι ζητȣ͂μεν, διαιρȣ͂μεν δἰ 6 τὸν 30, ϗ λαμβάνομεν πηλίκον τὸν 5, ὅς ἐςιν ὁ ζητȣμενος.

Καθάπερ δὲ ὁ πολλαπλασιασμὸς ȣ̓κ ἀεὶ αὔξει τὴν ποσότητα, ὡς εἶναι μείζω τȣ͂ πολλαπλασιαςέȣ τὸν γινόμενον· ȣ̓́τως ἡ διαίρεσις ȣ̓κ ἐλαττοῖ ἀεὶ τὸ ποσὸν, ὡς ἀεὶ

ἔλαττον ὑπάρχειν τοῦ διαιρετέου τὸ πηλίκον· αὐτίκα γὰρ τοῦ 6 προκειμένου εἰς διαίρεσιν, εἰ μὲν αὐτὸν διέλωμεν δι᾽ ἀριθμοῦ μονάδα ὑπερβαίνοντος, οἷον τοῦ 2, πηλίκον ἔσται ὁ 3, ἐλάττων τοῦ διαιρετέου 6· εἰ δὲ διὰ τῆς 1, ὁ 6· τῷ γὰρ 6 ἔνεστιν ἑξάκις ἡ 1· καὶ δὴ τὸ πηλίκον ἰσωθήσεται τῷ διαιρετέῳ· εἰ δὲ διέλωμεν αὐτὸν διὰ $\frac{1}{2}$, ἔσται πηλίκον 12, εἴγε ἐν τῷ 6 δωδεκάκις ὑπάρχει τὸ $\frac{1}{2}$· καὶ δὴ τὸ πηλίκον ὑπερέξει τὸν διαιρετέον· τοῦτο δ᾽ ἅπαν ἀπογεννᾶται ἐκ τῆς κατὰ τὴν διαίρεσιν φύσεως· ἡ γάρ τοι διαίρεσις πέφυκεν ἐν τῷ εὑρεῖν, ὁσάκις ἅτερος ἀριθμὸς περιέχεται ἐν θατέρῳ· φανερὸν οὖν, ὡς ἄρα 1 μὲν ἑξάκις, 2 δὲ τρὶς, τελευταῖον δὲ $\frac{1}{2}$ δωδεκάκις, ἕκαστος τῷ 6 ἐμπεριέχεται. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐν γένει δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τοῦ διαιρέτου, ὑπερέχοντος μὲν τὴν μονάδα, τὸ πηλίκον ἔσται ἔλαττον τοῦ διαιρετέου· ἰσουμένου δὲ μονάδι, ἰσοῦται· ἐλαττουμένου δὲ τέλος τῆς μονάδος, ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον.

111. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἁπλῆ ἡμῖν κληθήσεται ἡ διαίρεσις, τοῦ διαιρέτου ἕνα μόνον ἔχοντος χαρακτῆρα· σύνθετος δὲ, πλείους, ἢ ἕνα.

Περὶ τῆς ἁπλῆς διαιρέσεως.

112. Τοῦ διαιρέτου ἁπλοῦ ἀριθμοῦ (54) ὄντος, Α΄. γράψον αὐτὸν ὑπὸ τὸν πρῶτον χαρακτῆρα, ἢ, ἐὰν αὐτῷ ἥκιστα ἐμπεριέχηται, ὑπὸ τοὺς δύω πρὸς ἀριστερὰν χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου.

Β΄. Ζήτησον, ποσάκις ὁ διαιρέτης ἐμπεριέχεται τῷδε τῷ χαρακτῆρι, ἢ καὶ ἀμφοτέροις ἅμα· τὸν δ᾽ εὑρεθέντα ἀριθμὸν θὲς εἰς πηλίκον.

Γ΄. Πολλαπλασίασον τὸν διαιρέτην ἐπὶ τοῦτο τὸ πηλίκον, καὶ τὸν προκύπτοντα ἄφελε τοῦ χαρακτῆρος, ἢ τῶν δύω χαρακτήρων, ὑφ' οὓς γέγραπται ὁ διαιρέτης.

Δ΄. Καταγαγὼν τὸν ἐφεξῆς τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρα, θὲς πρὸς δεξιὰν τοῦ καταλοίπου, εἰ δή τι κατείλειπται.

Ε΄. Γράψον τὸν διαιρέτην ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦ καταλοίπου, καὶ τοῦ καταχθέντος χαρακτῆρος, ἤ, εἰ μηδὲν εἴη κατάλοιπον, ὑπὸ τὸν καταχθέντα χαρακτῆρα, καὶ ἐπανάλαβε, ἣν ἐδείξαμεν πρᾶξιν.

ϛ΄. Τούτων οὖν ἐκ διαδοχῆς ἐφ' ἁπάντων τῶν τοῦ διαιρετέου χαρακτήρων ἐκτετελεσμένων τὰ κατὰ σειρὰν γραφέντα ἐξ ἀριστερῶν ἐπὶ δεξιὰ πηλίκα, ὁμοῦ ληφθέντα, συγκροτήσουσι τὸ ὁλικὸν, ὃ ἐζητεῖτο, πηλίκον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Γραμμικὴ ὀργυιὰ σύγκειται ἐκ ποδῶν ἕξ, πόδες οὖν 2634 πόσας παρέξονται ὀργυιάς; ἢ ὁσάκις πόδες 6 ἀφαιρεθῆναι δύνανται τῶν 2634· περιέστηκεν ἄρα εἰς τὸ διαιρεθῆναι τὸν 2634 διὰ 6.

α΄. Γράψον οὖν τὸν 6 ὑπὸ τὸν 26.

β΄. Λέγε, ποσάκις 6 ἐνυπάρχει τῷ 26; τετράκις· γράψον ἐν τῇ τῶν πηλίκων χώρᾳ, ὡς ὁρᾷς, 4.

γ΄. Πολλαπλασίασον τὸν 6 διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον· τετράκις 6 ποιοῦσι 24, ὃν γράψας ὑπὸ τοὺς δύω χαρακτῆρας 26 τοῦ διαιρετέου, καὶ ἀφαίρεσιν ποιήσας, θὲς τὴν 2 διαφορὰν ὑπὸ τὸν 4.

δ΄. Καταγαγὼν τὸν τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρα 3, γράψον ἐν δεξιᾷ τοῦ καταλοίπου 2· ὅθεν ἔσται 23.

ε΄. Γράψας τὸν 6 ὑπὸ τὸν 23, λέγε,

```
2634|6
------
 6   |439
24
 23
  6
 18
  54
   6
  54
   0
```

ποσάκις τῷ 23 ἐνυπάρχει ὁ 6; τρίς· γράψον πρὸς δεξιὰν τῦ πρώτῦ πηλίκῦ 4 τὸν 3, ϗ πολλαπλησίασον τὸν 6 διὰ τῦ πηλίκῦ 3, ϗ θὲς ὑπὸ τὸν 23 τὸ προκύπτοντα 18· ἀφαιρέσεως δὲ γενομένης, λείπεται 5, ὃν θὲς ὑπὸ τὸν 8.

ϛ΄. Καταγαγὼν γράψον ἐν δεξιοῖς τῦ καταλοίπῦ 5 τὸν ἔσχατον τῦ διαιρετέῦ χαρακτῆρα 4· γενήσεται ὖν 54· γράψας δὲ τὸν 6 ὑπὸ τὸν 54 λέγε, ἐν τῷ 54 ποσάκις περιέχεται ὁ 6; ἐννεάκις· γράψον τὸν 9 ἐν δεξιᾷ τῦ 3, ὡς τελευταῖον πηλίκον· πολλαπλασιασθέντος δὲ 9 ἐπὶ 6, ϗ τῦ προκύπτοντος 54 ἀπαχθέντος ἀπὸ τῦ 54, ὐδὲν καταλείπεται· οὕτως ἄρα πόδες 2634 παρέξȣσιν ὀργιὰς 439.

113. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἵνα δὲ ἀπονώτερον εὑρίσκωμεν πηλίκον ἕκαςον, ξυντελεῖ τὰ μέγιςα ὁ Πυθαγόρειος ἄβαξ· ὕτως ἵνα γνωσθῇ (91) ὁσάκις ὁ 6 ἐμπεριέχεται τῷ 54, ἐπερχόμεθα ὀφθαλμοῖς τὴν, ἐν ᾗ ὁ 6, γραμμὴν ἀριςερόθεν ἰόντες πρὸς δεξιὰ, μέχρις ἂν ἀπαντήσωμεν τῷ 54, ὃν ὁρῶμεν κατὰ κάθετον ἐκ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ἀντιςοιχῦντα τῷ 9· διὸ γράφομεν 9· ἵνα δὲ γνῶμεν ὁσάκις ὁ 6 ἔνεςι τῷ 23, παρατηρῦμεν, ποδηγετύμενοι ὑπὸ τῦ 6 ἐξ ἀριςερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ, τὸν 18 τὸν μείζω ὄντα προκύπτοντα ἐκ τῦ 6 τῶν, ὓς περιέχει ὁλοσχερῶς ὁ 23· ἐπεὶ δὲ ὁ 18 ἀντιςοιχεῖ κατὰ κάθετον τῷ 3, σημειῦμεν ὡς πηλίκον τὸν 3.

114. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Στίζειν δὲ ἕκαςον τῶν καταγομένων τῦ διαιρετέῦ χαρακτήρων, τὴν ἀμφιβολίαν ἀφίςησι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ὕφασμά τι πήχεων 7 τιμᾶται ὅλον ἀργυρίων 133· πόσῦ ἄρ᾽ ἕκαςος πῆχυς; διελεῖν ὖν χρὴ διὰ 7 τὸν 133· γράψας δὴ τὸν 7 ὑπὸ τὸν 13 λέγε, ἐν 13 ἅπαξ ὁ 7· σημείωσον 1 ὡς πηλίκον· ϗ πολλα-

πλασιάσας τὸν 7 διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον 1, ϗ ἀφελὼν τὸν προκύπτοντα ἀπὸ τȣ̃ 13, ἕξεις κατάλοιπον τὸν 6· ἐν δεξιοῖς τȣ̃ 6 γράψον τὸν τȣ̃ διαιρετέȣ χαρακτῆρα 3, ϗ τὸν 7 ὑπὸ τὸν 63· ἐν τῷ 63 ὁ 7 ἐννεάκις· σημείωσον ὡς πηλίκον τὸν 9· ὁ ȣ̃ν προκύπτων ἐκ τȣ̃ 7 ϗ 9 ἀπαχθεὶς ἀπὸ τȣ̃ 63, καταλείπει 0· ὁ ἄρα πῆχυς τιμηθήσεται ἀργυρίων 19.

```
133|7
7  |19
63
7
63
 0
```

115. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ὁπηνίκα ὁ διαιρετέος ȣ̓κ ἔςιν ἀκριβῶς πολλαπλȣ̃ς τȣ̃ διαιρέτȣ (77), μενεῖ τι λείψανον μετὰ τὴν διαίρεσιν· τȣ̃το ȣ̃ν πρὸς δεξιὰ τȣ̃ πηλίκȣ, γραμμῆς ὁριζοντείȣ ἀχθείσης, γράφεται ἐπ᾽ αὐτῆς, ὑποσημειȣμένȣ τȣ̃ διαιρȣ̃ντος· ὃ δηλοῖ πάντως, ὅτι τὸ κατάλοιπον τȣ̃το προσδεῖται ἔτι διαιρέσεως, ἥτις γενήσεται, ὡς ὀψόμεθα.

116. ΣΧΟΛΙΟΝ Δ΄. Λειψάνȣ δὲ μηδενὸς ὅλως λειπομένȣ, ϗ τȣ̃ καταχθέντος χαρακτῆρος τὸν διαιρέτην μὴ χωρȣ̃ντος, τίθεται τηνικαῦτα 0 εἰς πηλίκον· ἐν γένει δὲ ἐπὶ πάσης διαιρέσεως τοσαῦτα δεῖ 0 εἰς πηλίκον τιθέναι, ὅσȣς κατάγομεν τȣ̃ διαιρετέȣ χαρακτῆρας, εἰς συμπλήρωσιν ἀριθμȣ̃ τὸν διαιρέτην περιέχοντος· ἀναγκαῖον δὲ τȣ̃το, ἵνα τὸ πρῶτον θετικὸν πηλίκον τεθῇ ἐν τῷ χώρῳ, ἐν ᾧ κεῖται ὁ θετικὸς τȣ̃ διαιρετέȣ χαρακτὴρ, ὁ τόδε τὸ πηλίκον παρέχων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Πέντε κληρονόμοι διανείμασθαι σφίσι βȣ́λονται κληρονομίαν ἀργυρίων 501054· πόσα κληρώσεται ἕκαςος;

Ἐν 5 ἅπαξ ὁ 5· γεγράφθω 1 πηλίκον· ἅπαξ 5 ποιεῖ 5, ȣ̃ ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τȣ̃ 5, καταλείπεται 0· κατήχθω τȣ̃ διαιρετέȣ τὸ 0, ϗ ἐπεὶ τȣ̃το μηδ᾽ ἅπαξ

περιέχει τὸν διαιρέτην, τεθείσθω ο πηλίκον· κατήχθω ἡ 1, ἥτις οὐδ' αὐτὴ περιέχει τὸν διαιρέτην 5· γεγράφθω οὖν ἔτι ἓν μηδενικὸν εἰς πηλίκον· κατήχθω εἶτα τὸ ἐφεξῆς ο τοῦ διαιρετέου· ὅθεν γίνεται 10· ἐν 10 δὶς ὁ 5· γεγράφθω 2 εἰς πηλίκον· δὶς 5 ποιεῖ 10, οὗ ἀφαιρεθέντος, καταλείπεται ο· κατήχθω ὁ 5, ὃς δίδωσι πηλίκον 1, καὶ ἀφαιρέσεως γινομένης, λείπεται ο· κατήχθω τελευταῖον ὁ 4, οὗ τινος μηδ' ἅπαξ περιέχοντος τὸν διαιρέτην 5, τεθείσθω μὲν εἰς πηλίκον ο· τὸ δὲ κατάλοιπον 4 γεγράφθω ἐν δεξιᾷ τοῦ πηλίκου οὕτω $\frac{4}{5}$.

```
501054 | 5
5      | 100210 4/5
0010
   5
   10
   05
    5
    0 4/5
```

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ'. Ἡμέραι 14215 πόσας ἑβδομάδας συγκροτοῦσι;

```
14215 | 7
7     | 2030 5/7
14
 021
   7
  21
   0 5/7
```

Περὶ τῆς συνθέτου διαιρέσεως.

117. Τηρηθήτωσαν ἐν τῇ συνθέτῳ διαιρέσει ἅπαντες οἱ κανόνες οἱ ἐπὶ τῆς ἁπλῆς ἀποδοθέντες, οὕτω. Α'. ὅλος ὁ διαιρέτης γεγράφθω ὑπὸ χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου ἐν τοῖς ἀριστεροῖς κειμένους, ὥστε αὐτὸν ἐκείνοις ἐμπεριέχεσθαι, καὶ στοιχείτω ὁ ἔσχατος ἐν δεξιοῖς χαρακτὴρ τοῦ διαιρετέου, ᾧ ὁ διαιρέτης ἀντιστοιχεῖ.

Β'. Ζητηθήτω, ποσάκις ὁ ἐν δεξιοῖς πρῶτος τοῦ διαιρέτου χαρακτὴρ περιέχεται ἐν τῷ πρώτῳ, ἢ τοῖς δυσὶ πρώτοις τοῦ διαιρετέου, οἷς ἀντιστοιχεῖ.

Γ΄. Πρὶν ἢ σημειωθῆναι τὸ πηλίκον, σκεπτέον μὴ εἴη μεῖζον τοῦ ἀπαιτουμένου· πολλαπλασιασθήτω οὖν ὅλος ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ πηλίκον, κ' ἢν ὁ προκύπτων μὴ ὑπερέχῃ τοὺς τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρας, οἷς ἀντιστοιχεῖ ὁ διαιρέτης, οὐκ ἔστι μεῖζον, ἢ ὅσον ἔδει, τὸ πηλίκον· διὸ σημειωθήτω ἐν τῷ χώρῳ τῶν πηλίκων· ἀλλ' ὑπερέχοντος τοῦ γινομένου τοὺς χαρακτῆρας, μειωθήτω τὸ πηλίκον μονάδι, ἔστ' ἂν ὁ προκύπτων ἐκ τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ καινοῦ πηλίκου μὴ ὑπερτερῇ τῶν εἰρημένων χαρακτήρων· τοῦτ' οὖν τὸ καινὸν σημειωθήτω εἰς πηλίκον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Στρατιῶται 35 διῃρέθησαν εἰς λειτουργίαν ἕκαστος ἰδίαν, οἷς ἅπασιν ὁ στρατηγὸς ἐδωρήσατο ἀργύρια 640· πόσ' ἆρ' ἐπανήκουσιν ἑκάστῳ;

640	35
35	$18\frac{10}{35}$
290	
35	
280	
$\frac{10}{35}$	

Θεὶς τὸν 35 ὑπὸ τὸν 64 λέγε· ἐν 6 πρὸς ἀριστερὰν πρώτῳ χαρακτῆρι τοῦ διαιρετέου, ᾧπερ ἀντιστοιχεῖ ὁ 3, πρῶτος πρὸς ἀριστερὰν χαρακτὴρ τοῦ διαιρέτου, ποσάκις ὑπάρχει αὐτὸς ὁ 3; δὶς· πρὶν οὖν ἢ γράψῃς τὸ πηλίκον 2 πολλαπλασίασον τὸν διαιρέτην 35 ἐπὶ 2· ἐπεὶ δὲ ὁ προκύπτων 70 ὑπερέχει τὸν 64, ᾧ ἀντιστοιχεῖ ὁ διαιρέτης, δῆλον ὅτι ὁ 2 πηλίκον εἴληπται μεῖζον τοῦ δικαίου· ἀντὶ οὖν τοῦ 2, εἰλήφθω 1, ἐφ' ἣν πεπολλαπλασιάσθω ὁ διαιρέτης 35· ἅπαξ 35 ποιεῖ 35, οὐκ ἔτι ὑπερβαίνοντος τὸν 64, γεγράφθω πηλίκον 1, καὶ ἀφῃρήσθω ὁ προκύπτων 35 ἀπὸ τοῦ 64· καταλειπομένου οὖν 29, πρὸς δεξιὰν αὐτῷ καταχθὲν γεγράφθω τὸ τοῦ διαιρετέου 0· ὅθεν γίνεται 290· γραφήτω οὖν αὖθις ὁ 35 διαιρέτης ὑπὸ τὸν 290, ὥστε δύνασθαι ἐνεῖναι αὐτῷ, εἶτ' οὖν ἀντιστοιχεῖν τὸν μὲν 3 τῷ 29, τὸν δὲ 5 τῷ 0.

Λέγε δή: ἐν τοῖς δυσὶ χαρακτῆρσιν, οἷς ὁ πρὸς ἀρισερὸν πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ διαιρέτου ἀντισοιχεῖ, ποσάκις ὑπάρχει ὁ 3; ἐννεάκις· ἐξητάσθω οὖν ὁ 9· ὅλος ὁ 35 διαιρέτης ἐπαχθεὶς ἐπὶ 9, παράγει 315, ὃς ὑπερέχει τοὺς, οἷς ὁ διαιρέτης ἀντισοιχεῖ, χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου· μειωθήτω ἄρα τὸ πηλίκον μονάδι, ταὐτὸν εἰπεῖν ἐξετασθήτω ὁ 8· πολλαπλασιασθεὶς δὲ ὁ 35 ἐπὶ 8, ἐπεὶ ποιεῖ 280, ὃς οὐκέτι ὑπερέχει τὸν 290, σημαίνει, ὅτι 8 ἐσὶ τὸ ἀπαιτούμενον πηλίκον, ὃ δὴ καὶ γεγράφθω· ἀφαιρεθεὶς δὲ ὁ 280 ἀπὸ τοῦ 290, καταλείπει 10 οὕτως ἄρα ἕκασος τῶν ςρατιωτῶν λήψεται ἀργύρια 18, καὶ ἔτι ἐναπολειφθήσονται 10 σφίσι διανεμηθησόμενα.

118. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰςέον δὲ ὅτι τὸ καθάπαξ σημειούμειον πηλίκον οὐκ ἂν ἔχοι ληφθῆναι μεῖζον τοῦ 9· ἀεὶ γὰρ προκύψει, τοῦ διαιρέτου ἐπὶ πηλίκον τοῦ 9 ὑπεραλλόμενον πολλαπλασιασθέντος, ἀριθμὸς μείζων τῶν τοῦ διαιρετέου, οἷς ὁ διαιρέτης ἀντισοιχεῖ, χαρακτήρων· ὁπηνίκα οὖν δοκεῖ εἶναι πηλίκον 10, ἢ 11 κτ., ἀπόπειραν λαμβάνομεν τοῦ 9.

130320	144
144	905
1296	
720	
144	
720	
0	

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Δάκτυλοι 144 συμπληροῦσιν ἕνα τετραγωνικὸν πόδα· πόσοι οὖν ἔσονται τετραγωνικοὶ πόδες ἐν δακτύλοις 130320;

Τοῦ 144 διαιρέτου μὴ περιεχομένου ἐν τοῖς τρισὶ πρώτοις χαρακτῆρσι τοῦ διαιρέτου, προσληπτέον καὶ τὸν τέταρτον, εἶτ᾽ οὖν 1303· καὶ δὴ λέγε· ἐν 13, πρώτοις ἀμέλει πρὸς τὰ εὐώνυμα χαρακτῆρσι τοῦ διαιρετέου, οἷς συςοιχεῖ 1, πρῶτος καὶ αὐτὸς χαρακτὴρ τοῦ διαιρέτου, ποσάκις περιέχεται ἡ 1; δεκατρίς· ἀποπειρατέον οὖν τοῦ 9 (118)· καὶ δὴ ὁ 144 διαιρέτης πολ-

λαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πηλίκον 9, ποιεῖ 1296, ὃς ἐχ ὑπερβάλλει τὸν 1303, ᾧ συςοιχεῖ ὁ διαιρέτης· γραπτέον ἄρα πηλίκον 9 καὶ ἀφαιρετέον τὸν 1296 ἀπὸ τȣ̃ 1303, ὅθεν καταλειφθήσεται 7. Ἐν δεξιᾷ τȣ̃ καταλοίπȣ 7 γεγράφθω ὁ 2 τὸ διαιρετέȣ, καὶ τȣ̃ 72 μηδ᾽ ἅπαξ περιέχοντος τὸν 144, σημειωθήτω πηλίκον 0, καὶ κατήχθω τȣ̃ διαιρετέȣ τὸ 0· 1 ἐν 7 ἑπτάκις· πολλαπλασιασθήτω ȣ̃ν 144 δὶ 7, καὶ αὖθις δὶ 6, καὶ ἐπεὶ ἑκατέρωθεν προκύπτει μείζων τȣ̃ 720, ἀποπειρατέον τȣ̃ 5, ἐξ ȣ̃ καὶ τȣ̃ διαιρέτȣ ὁ γινόμενος, ἐπεὶ ἐχ᾽ ὑπερέχει τȣ̃ 720, ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 720 καταλείπει 0, πηλίκȣ λαμβανομένȣ 5· ἄρα 130320 δάκτυλοι συμπληρȣ̃σι πόδας τετραγωνικȣ̀ς 905.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Διῃρείσθω ὁ 31169 διὰ τȣ̃ 152.

31169 Α	152 Β
152	205 Γ $\frac{9}{152}$
304	
769	
152	
760	
$\frac{9}{152}$	

119. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν ἁπάσῃ διαιρέσει, εἰ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τȣ̃ γινομένȣ ὑπὸ τȣ̃ διαιρέτȣ, καὶ τȣ̃ ἤδη γεγραμμένȣ πηλίκȣ, τὸ κατάλοιπον μὴ ᾖ ἧττον τȣ̃ διαιρέτȣ, δῆλον ὅτι ἔτι ἅπαξ ἀφαιρεθῆναι ἠδύνατο ὁ διαιρέτης· διὸ αὐξητέον τὸ πηλίκον μονάδι· τεθείσθω γὰρ, ὡς ἐξηπάτημαι, λέγων· ἐν 50 ἑπτάκις ὁ 6· ἑπτάκις ȣ̃ν ὁ 6 ποιεῖ 42, ὃς ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 50 καταλείπει 8, ὅπερ ἐςὶ λείψανον μεῖζον τȣ̃ διαιρέτȣ 6· περιέχεται ἄρα ὁ 6 ἔτι ἅπαξ ἐν τῷ 50· διὸ ἀντιτίθημι εἰς πηλίκον τὸν 8.

Δεῖξις τῆς διαιρέσεως.

120. Τῇ προεκτεθείσῃ θεωρίᾳ ἑπόμενοι, ἠριθμήσαμεν ὁσάκις ὁ διαιρέτης περιέχεται ἐν τοῖς ἀλληλȣχȣμένοις τȣ͂ διαιρετέȣ χώροις, ἐξ εὐωνύμων χωρȣ͂ντες ἐπὶ τὰ δεξιά· ἐσημειώσαμεν δὲ εἰς πηλίκον ȣ̓͂τε τȣ͂ δικαίȣ πλέον· ȣ̓ γὰρ ἂν ἀφῃρεῖτο ὁ προκύπτων ἀπὸ τῶν ἀντιςοιχȣ́ντων χαρακτήρων (117. Γ΄.)· ȣ̓͂τε μὴν ἔλαττον· ἢ κατελείπετο ἂν λείψανον τȣ͂ διαιρέτȣ ὑπερεκπίπτον (119)· ἀλλὰ μὴν ἡ πᾶσα τῆς διαιρέσεως θεωρία ςηρίζεται ἐπὶ τῷ λαβεῖν τὴν μονάδα τοσάκις, ὁσάκις ἔνεςι τῷ διαιρετέῳ ὁ διαιρέτης· ὀρθῶς ἄρ᾽ ȣ̓͂τω διαπεραίνεται ἡ διαίρεσις (106). Ο. Ε. Δ.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

121. Πολλαπλασιασθήτω τὸ εὑρεθὲν πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ϗ εἰ κατελείφθη ἐν τῇ διαιρέσει ἔλαττόν τι τȣ͂ διαιρέτȣ (119), προςεθείσθω τῷ παραγομένῳ· ὁ ȣ̓͂ν προκύπτων ὑπὸ τȣ͂ πηλίκȣ ϗ τȣ͂ διαιρέτȣ συνάμα τῷ καταλοίπῳ, εἰ εἴη, ἰσωθήσεται τῷ διαιρετέῳ (107).

Οἷον, ἐπὶ τȣ͂ ἐσχάτȣ τῶν προεκτεθέντων τῆς διαιρέσεως ὑποδειγμάτων, πολλαπλασιασθήτω τὸ Γ πηλίκον ἐπὶ τὸν Β διαιρέτην, ϗ τῷ ἐκ τȣ́των γινομένῳ 31160 προςεθείσθω τὸ λείψανον 9, ὅπερ ἐςὶν ἔλαττον, ἢ 152· ἀποδιδομένȣ δὲ αὖθις τȣ͂ αὐτȣ͂ διαιρετέȣ Α, συνάγεται ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ὑγιῶς.

Βάσανος γενικὴ τȣ͂ πολλαπλασιασμȣ͂.

122. Πέπρακται ἀσφαλῶς ὁ πολλαπλασιασμὸς,

ἐὰν ὁ παραγόμενος, διαιρεθεὶς διὰ τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃, ἀποδῷ τὸν πολλαπλασιαςέον, ἢ, διαιρεθεὶς διὰ τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ, παρέχῃ τὸν πολλαπλασιαςὴν (109)· ἐπὶ τȣ̃ δευτέρȣ τȣ̃ συνθέτȣ πολλαπλασιασμȣ̃ ὑποδείγματος, ὁ προκύπτων Κ, διὰ τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃ Β διαιρεθεὶς, ἀποδίδωσι τὸν πολλαπλασιαςέον Α· ἀσφαλῶς ἄρα πέπρακται ὁ πολλαπλασιασμός.

Ἐπιτετμημένη διαίρεσις.

123. Α΄. Ἐν ἑκάςῃ μὲν διαιρέσει γέγραπται ὁ διαιρέτης ὑπὸ τὸν διαιρετέον, ἵν' ȣ̃τω τοῖς πρωτοπείροις ῥάων ᾖ παρὰ πολὺ ἡ θεωρία· ἐπὶ μέντοι τῆς πράξεως ἀποχρήσει διὰ μνήμης αὐτὸν φέρειν, ἢ ὑποτιθέναι κείμενον ὑπὸ τȣ̀ς ἀπαιτȣμένȣς τȣ̃ διαιρετέȣ χαρακτῆρας, ὥςε αὐτοῖς ἐμπεριέχεσθαι.

124. Β΄. Ἐπὶ τῆς ἁπλῆς διαιρέσεως, τȣ̃ διαιρέτȣ τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν ὄντος, οἷον 2, 3, 4, 5, λίαν ἡ πρᾶξις ἐπιτμηθήσεται, λαμβανομένȣ ἀφ' ἑκάςȣ τῶν ἀριςερόθεν ἐπὶ δεξιὰν προϊόντων χαρακτήρων τȣ̃ ἡμίσεως, ἐὰν ὁ διαιρέτης ᾖ 2, τριτημορίȣ, ἐὰν ᾖ 3 κτ. δεῖ δὲ μόνον τὸν νȣ̃ν προσέχειν τῇ γενικῇ θεωρίᾳ. α΄. ο τιθέναι εἰς πηλίκον ὑπὲρ παντὸς χαρακτῆρος, ὅςτις συνάμα τῷ λειψάνῳ, εἴπερ εἴη, μὴ περιέχοι τὸν διαιρέτην. β΄. προσλαμβάνειν ἐν παντὶ ἑξῆς διαιρετέῳ τὸ ἐκ τȣ̃ προηγηθέντος χαρακτῆρος κατάλοιπον, εἰ εἴη, συνάμα τῷ ἑπομένῳ χαρακτῆρι, ἢ τὸν, περὶ ȣ̃ ἐτέθη πηλίκον ο, συνάμα τῷ ἑπομένῳ χαρακτῆρι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ὀλυμπιὰς ἐκαλεῖτο πάλαι διάςημα χρονικὸν, ἐτῶν 4 περιεκτικόν· πόσας ἄρ' Ὀλυμπιάδας συγκροτήσȣσιν ἔτη 812641;

Ἐφ' ᾧ οὖν ἐπιτμηθῆναι τὰ τῆς διαιρέσεως, εἰλήφθω, ὡς ὁρᾶται ἐνταῦθα, τὸ τέταρτον τούτου τοῦ ἀριθμοῦ. Τὸ τέταρτον τοῦ 8 ἐστὶ 2, ὃς γεγράφθω ἀντὶ πηλίκου, μηδενὸς λειπομένου. Τὸ τέταρτον τῆς 1 ληφθῆναι οὐ δύναται· γεγράφθω οὖν ἀντὶ πηλίκου ο (116)· ἡ 1, προσλαβοῦσα πρὸς δεξιὰ τὸν 2, ποιεῖ 12, οὗ τὸ τέταρτόν ἐστι 3, ἄνευ λειψάνου· τεθείσθω οὖν καὶ ὁ 3 εἰς πηλίκον. Τὸ τέταρτον τοῦ 6 ἐστὶ 1 μετὰ λειψάνου τοῦ 2· καὶ δὴ γεγράφθω καὶ 1· ὁ δὲ 2, προσλαβὼν τὸν 4, ποιεῖ 24, οὗ τέταρτόν ἐστιν ὁ 6 σὺν οὐδενὶ λειψάνῳ· σημειωθήτω οὖν εἰς πηλίκον καὶ ὁ 6· ἐκ δὲ 1 τεταρτημορίου μὴ λαμβανομένου, πηλίκον μὲν γεγράφθω ο (116), προσκείσθω δὲ τὸ λείψανον 1 ἐπὶ τοῦ 4 διαιρέτου.

```
812641 | 4
-----------------
       | 203160¼
```

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Πενταετηρὶς καλεῖται διάστημα χρονικὸν ἐτῶν πέντε· ἔτη οὖν 5063 πόσας ἀποτελοῦσι πενταετηρίδας; εἰλήφθω τὸ πέμπτον τοῦ 5063, εἴτ' οὖν 1012, ὃς δηλοῖ τὰς πενταετηρίδας συνάμα ἔτεσι 3.

125. Γ'. Ἐπὶ δὲ τῆς συνθέτου διαιρέσεως, ὅτε ῥᾷστα καταφαίνεται ὁσάκις ὁ διαιρέτης ἔνεστι τοῖς τοῦ διαιρετέου, οἷς ἀντιστοιχεῖ, χαρακτῆρσι, γεγράφθω πρῶτον τὸ πηλίκον, εἶτα ἐπανειλήφθω ἑξῆς τὰ τῆς πράξεως· κείσθω, φέρε, διελεῖν 5790 διὰ 25· ἀμέσως καταφαίνεται, ὅτι ὁ 25 δὶς ἔνεστι τῷ 57 μετὰ λειψάνου τοῦ 7· γραφέντος οὖν πηλίκου 2, κατήχθω πρὸς τῷ 7 ὁ 9, καὶ πάντων κατὰ τὰ ὁροθετηθέντα γενομένων, προκύψει πηλίκον $231\frac{15}{25}$.

```
5790 | 25
-----------------
  79 | 231 15/25
  75
   40
```

126. Δ'. Ἑνὸς δὲ ἢ πλειόνων ο ἐπαριθμουμένων πρὸς τῷ τέλει τοῦ διαιρετέου, καὶ τοῦ διαιρέτου, ἀποκόπτειν δυνάμεθα ταῦτα ἰσαρίθμως ἀφ' ἑκατέρου, διαιροῦντες τὸ τοῦ

διαιρετέȣ κατάλοιπον, διὰ τȣ̃ ἐν τῷ διαιρέτῃ· ἔςαι δὲ ἡ διαίρεσις ἀσφαλὴς, εἴγε ἐπαγομένȣ εἶτα τȣ̃ πηλίκȣ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἔχοντα ὡς τὸ κατ' ἀρχὰς, τὰ ἐκκοπέντα ο ἀπὸ τȣ̃ διαιρετέȣ, εὑρισκόμενα κ̀ ἐπὶ τȣ̃ διαιρέτȣ, εἰσελεύσονται ἐντεῦθεν κ̀ ἐν τῷ παραγομένῳ (101. Β'.), ὃς παρὰ τȣ̃το ἰσωθήσεται τῷ διαιρετέῳ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἡ τάξις ἐν ὑποθέσει συγκροτεῖται ἐκ ςρατιωτῶν 500· ςρατός τις ςρατιωτῶν 35000 πόσας περιέχει τάξεις;

350,00 | 5,00
| 70

Ὑποδιεςάλθω δύω ο τȣ̃ διαιρέτȣ, ὅθεν καταλειφθήσεται 5· ὑποδιεςάλθω δὲ κ̀ δύω ο τȣ̃ διαιρετέȣ, ἐναπολειπομένȣ τȣ̃ 350· διαιρεθέντος ȣ̃ν 350 διὰ 5 προκύπτȣσι τάξεις 70· εἰς δέγε τὴν τȣ́τȣ βάσανον, πεπολλαπλασιάσθω ὅλος ὁ 500 ἐπὶ τὸ πηλίκον 70, κ̀ ἀπολήφθήσεται αὐτὸς ὁ πρῶτος διαιρετέος 35000.

127. Ε'. Ἵνα διαιρεθῇ ἀριθμός τις διὰ 10, ὑποδιεςάλθω εἷς χαρακτὴρ ἐκ τῶν δεξιῶν αὐτȣ̃· ἵνα δὲ διαιρεθῇ δι' 100, ὑποδιεςάλθωσαν δύω· ἵνα δὲ διὰ 1000, τρεῖς, κ̀ ȣ̔́τως ἐφεξῆς· τὸ δὲ καταλειπόμενον πρὸς ἀριςερὰν τῆς ὑποδιαςολῆς, ἐμφανεῖ τὸ πηλίκον· ἐὰν δὲ πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαςολῆς ὦσι θετικοὶ χαρακτῆρες, γεγράφθω ὑπ' αὐτȣ̀ς ὁ διαιρέτης, σχηματιζομένȣ ȣ̔́τω καταλοίπȣ τινος διαιρέσεως. Συμβαίνει δὲ τȣτὶ, ὅτι ἀριθμὸς διὰ 10 πολλαπλασιασθεὶς, προσλαμβάνει ο ἓν ἐν τοῖς δεξιοῖς· διὰ δὲ 100, δύω ο, διὰ δὲ 1000, τρία, κ̀ ȣ̔́τως ἐφεξῆς (101).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τȣ̃ Αἰῶνος 100 ἔτη περιέχοντος πόσοι ἂρ αἰῶνες ἐμπεριλαμβάνονται ἐν ἔτεσι 25000; ἀπότεμε δύω ο ἐκ τȣ̃ 25000, κ̀ ἕξεις αἰῶνας 250· ὡ-

σαύτως, διαιρȣμένȣ τȣ͂ 504 διὰ 10, πηλίκον ἔςαι 50 $\frac{4}{10}$· διαιρȣμένȣ δὲ τȣ͂ 35849 διὰ 1000, ἔςαι 35 $\frac{849}{1000}$.

128. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅτι δὲ ȣ̓δὲν διαφέρει πολλαπλασιάζειν ἀριθμὸν ἐφ' ὅλον τὸν πολλαπλασιαςὴν, ἢ ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ πάντας τȣ̀ς τȣ͂ πολλαπλασιαςȣ͂ ποιητὰς (89), ἐκ τȣ́τȣ ἄρα ἀδιάφορον ἔςαι ἀριθμόν τινα δί ὅλȣ τȣ͂ διαιρέτȣ διελεῖν, ἢ πρῶτον μὲν δί ἑνὸς τῶν τὸν διαιρέτην παραγόντων, μετὰ δὲ, τὸ πηλίκον διὰ θατέρȣ· ἐντεῦθεν ὑποσυνάψομεν τὰ ἑξῆς.

129. Α'. Ἵνα διέλωμεν ἀριθμὸν διὰ 12, ὡς ὅτε βȣλόμεθα τȣ̀ς δακτύλȣς ἀγαγεῖν εἰς πόδας, ἢ τȣ̀ς μῆνας εἰς ἔτη κτ., ἐξέςαι λαβεῖν τὸ τέταρτον τȣ͂ προβληθέντος ἀριθμȣ͂ (106) εἶτα τὸ τρίτον τȣ͂ τετάρτȣ ἐκείνου (124), ἢ πρῶτον τὸ τρίτον, εἶτα τȣ͂ τρίτȣ τȣτȣ̀ τὸ τέταρτον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Δάκτυλοι 237 πόσȣς συμπληρȣ͂σι πόδας; τὸ τȣ͂ 237 τέταρτόν ἐςι 59 μετὰ λειψάνȣ 1· τὸ δὲ τȣ́τȣ τρίτον 19 μετὰ λειψάνȣ 2.

130. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειωτέον δ' ὅτι ἐν ἁπάσῃ διαιρέσει, κατὰ διαδοχὴν γινομένῃ, ἑκάςη μονὰς τȣ͂ καταλοίπȣ δύναται τόσας μονάδας τȣ͂ διαιρετέȣ τῆς προτέρας διαιρέσεως, ὅσας περιέχει ὁ πρότερος διαιρέτης· ἐν τῷ ἤδη ἐκτεθέντι ὑποδείγματι τὸ δεύτερον λείψανον 2 δύναται δύω μονάδας τȣ͂ πρὸ τȣ͂ διαιρετέȣ, ἢ δύω πολλαπλασιασθείσας ἐπὶ τὸν πρὸ τȣ͂ διαιρέτην 4 εἴτ' ȣ̓͂ν 8, καὶ τὸ ὅλον λείψανον ἔςαι 9· τὸ ἄρα πηλίκον ἔςαι 19 $\frac{9}{12}$.

131. Β'. Ἵνα δὲ διέλωμεν δί 20, διαιρȣ͂μεν πρῶτον διὰ 10, ἀποτέμνοντες τὸν ἔσχατον ἐν δεξιοῖς χαρακτῆρα (127)· εἶτα λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τȣ͂ καταλοίπȣ (129).

132. Γ΄. Ἵνα δὲ διαιρεθῇ ἀριθμός τις διὰ 40, ὡς ὅτε ζητεῖται τὰς παράδας εἰς γρόσια ἀγαγεῖν, ἀποκεκόφθω ὁ πρὸς ἀριστερὰν αὐτῷ ἔσχατος χαρακτὴρ (127)· καὶ εἰλήφθω τοῦ λοιποῦ τὸ τέταρτον (103)· πόσα οὖν γρόσια συγκροτοῦσι παράδαι 972; ἀποχωρισθήτω τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ὁ 2, καὶ εἰλήφθω τοῦ 97 τὸ τέταρτον, ὅ ἐστιν 24 μετὰ λειψάνου 1, ὅπερ δυνάμενον 10 (120) συνάμα τῷ καταχωρισθέντι 2 συνίστησι 12· ἔστιν ἄρα πηλίκον 24 γρόσια καὶ παράδαι 12.

133. Δ΄. Ἵνα δὲ διὰ 60 διέλωμεν, ὡς ὅτε θέλομεν τὰ σαυροφόρα ἀγαγεῖν εἰς φιορίνια, ἢ λεπτὰ χρονικὰ εἰς ὥρας, ἢ γοῦν κυκλικὰ εἰς μοίρας, διακεκρίσθω ὁ ἔσχατος πρὸς δεξιὰν χαρακτὴρ, καὶ εἰλήφθω τοῦ λοιποῦ τὸ ἕκτον, τουτέστι τὸ ἥμισυ, καὶ αὖθις τοῦ ἡμίσεως τοῦ τρίτον (129)· πόσα, φέρε, φιορίνια ἀποπληροῦσι σαυροφόρα 588; ἀποκοπέντος ἐν δεξιοῖς τοῦ 8, καὶ ληφθέντος τοῦ ἐν 58 ἕκτου, εἴτ᾽ οὖν 9, καὶ τοῦ 4 καταλοίπου (ὃ ἤδη δύναται 40) συναφθέντος τῷ ἀφορισθέντι 8, ἕξομεν φιορίνια 48 σὺν σαυροφ. 48.

134. Ε΄. Δυνάμεθα δὲ ἐν οὐκ ὀλίγαις περιπτώσεσι μεταποιεῖν τὴν σύνθετον διαίρεσιν εἰς ἁπλῆν (111). Προκειμένου γὰρ διελεῖν ἀριθμὸν δοθέντα δι᾽ 24, λαβεῖν ἐξέσται τοῦ ἀριθμοῦ τὸ ἕκτον, μεθ᾽ ὃ, τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου· ἢ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τὸ ἥμισυ, εἶτα τοῦ ἡμίσεως τὸ τρίτον, ἐξ οὗ, τοῦ τρίτου τοῦδε τὸ τέταρτον· ἢ γοῦν τὸ ὄγδοον κατ᾽ ἀρχὰς, εἶτα τοῦ ὀγδόου τὸ τρίτον, εἴγε τετράκις 6 ποιεῖ 24, δὶς δὲ 3 ποιεῖ 6, τετράκις δὲ 6 ποιεῖ 24, καὶ τρὶς 8 ποιεῖ ὡσαύτως 24.

135. Ἵνα διαιρεθῇ ὁ 797 διὰ 24, ληφθήτω τὸ τοῦ 797 ἕκτον, ὅπερ ἐστὶ 132, λειπομένου 5, εἶτα τὸ τέ-

ταρτον τȣ̃ 132, ὅπερ ἐςὶ 33· πηλίκον ἄρα πρόεισι 33 μετὰ λειψάνȣ 5.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
Περὶ Κλασμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.
Τί ἐςι Κλάσμα.

136. Ἀριθμὸς Ὁλοσχερὴς καλεῖται ὁ ἅπαξ, ἢ πλεονάκις, ὁλοσχερῶς περιέχων τὴν μονάδα· οἷον 5 γρόσιά ἐςιν ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς, περὶ οὗ εἴρηται ἐν τῷ Α΄. Τμήματι. Κλασματίας δὲ ἢ Κλάσμα, περὶ ȣ̃ ἡμῖν διαλαβεῖν πρόκειται ἐν τῷ ἀνὰ χεῖρας, ὀνομάζεται ἓν ἢ πλείω μέρη τῆς μονάδος· ȣ̃τω, τȣ̃ γροσίȣ 40 παράδας περιέχοντος, οἱ παράδαι ἔσονται μέρη τεσσαρακοςὰ τȣ̃ γροσίȣ, ϗ δὴ 5 αὐτῶν συςήσȣσιν ἀριθμὸν Κλασματίαν, ὄντες πέντε τεσσαρακοςὰ τȣ̃ γροσίȣ, ϗ παριςάμενοι ȣ̃τω $\frac{5}{40}$. Ἐπὶ παντὸς δὲ κλάσματος, οἷον τὸ $\frac{5}{40}$, ὁ μὲν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἀριθμὸς καλεῖται Παρονομαςὴς, ὡς ἀπ᾽ αὐτȣ̃ παρονομαζομένων τῶν τῆς μονάδος μερῶν, ϗ ἐπὶ τȣ̃ προκειμένȣ ὑποδείγματος τεσσαρακοςῶν ἀπ᾽ αὐτȣ̃ καλȣμένων· ὁ δ᾽ ὕπερθεν τῆς γραμ-

μῆς ἀριθμὸς, ἀκούει Ἀριθμητὴς, ὡς ἀριθμῶν, ὁπόσα τῶν τοιῶνδε μερῶν τὸ κλάσμα ἐμφαίνει, οἷον ἐνταῦθα παρίστησι τεσσαρακοστὰ πέντε· αἱ δὲ ἐκθέσεις $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{7}$ κτ. ἀναγινώσκονται οὕτως· ἓν τριτημόριον, ἢ ἓν τρίτον, δύω τεταρτημόρια, ἢ δύω τέταρτα, τρία πεμπτημόρια, ἢ τρία πέμπτα, ἓξ ἑπτημόρια, ἢ ἓξ ἕβδομα κτ.

137. Δυνάμεθα δὲ καὶ κλάσμα ἅπαν, οἷον $\frac{5}{40}$, ὡς σεσημειωμένην ἐκδέξασθαι διαίρεσιν, καὶ ἐπὶ τῆς ἐκθέσεως ταύτης ἀδιαφόρως, εἴτε ὡς κλάσματος ἐκλαμβανομένης, ἀπαγγέλλειν· πέντε τεσσαρακοστά· εἴτε δὴ θεωρουμένης, ὡς εἴπερ εἴη σεσημειωμένη διαίρεσις· πέντε διαιρεῖν διὰ 40· φημὶ δὴ, ὅτι πέντε τεσσαρακοστὰ, ἢ διαιρεῖν πέντε διὰ τεσσαράκοντα, οὐδὲν διενηνόχατον· 1 γὰρ διανεμηθεῖσα τοῖς 40, ἑκάστῳ παρέχεται τεσσαρακοστὸν ἕν· ἄρα 5 διανεμομένων τοῖς 40, ἕκαστος λήψεται τεσσαρακοστὰ πέντε.

138. Α΄. Ἐξέσται ἄρα διαίρεσιν πᾶσαν, οἷον 4 διὰ 7 διαιροῦντας, ἐν σχήματι παριστᾶν οὕτω $\frac{4}{7}$.

139. Β΄. Καὶ δὴ ἔτι ὁλοχερῆ ἀριθμὸν ἅπαντα, οἷον 5, πασῶν τῶν ἐν τοῖς κλάσμασι πράξεων ἐπιδεκτικὸν καθιστάναι, διαμορφοῦντας αὐτὸν, ὡς διὰ 1 διαιρούμενον, οὕτω $\frac{5}{1}$, ὃ τὴν δύναμιν αὐτοῦ ἥκιστα λυμαίνεται, εἴγε 5 διαιρεθεὶς διὰ 1 παρέχει 5 (104).

140. Γ΄. Ταὐτόν ἐστι λαβεῖν δύω τρίτα ποσότητός τινος, καὶ ἓν τρίτον τῆς αὐτῆς ποσότητος διπλασιασθείσης· ἢ γοῦν λαβεῖν τέτταρα ἕβδομα ποσότητός τινος, καὶ ἓν αὐτῆς τετραπλασιασθείσης· κείσθω γὰρ διανεῖμαι χρυσίνους δύω τρισὶν ἀνθρώποις· ἡ οὖν $\frac{2}{3}$ ἔκθεσις, ἐκληφθεῖσα ὡς σεσημειωμένη διαίρεσις, παρίστησι 2 διαιρούμενον διὰ 3, ἢ τὸ τρίτον τῶν δύω χρυσίνων· θεωροῦντας μέντοι τὴν ἔκθεσιν ὡς κλάσμα, δεήσει εἰπεῖν· δύω τρίτα ἑνὸς χρυσί-

νου (136)· σαφὲς ἄρα, ὅτι τὸ τρίτον δυοῖν χρυσίνοιν ταὐτὸν δύναται δυσὶ τρίτοις χρυσίνου ἑνός.

141. Δʹ. Πάνθ' ὅσα δέδεικται ἐπὶ τῆς διαιρέσεως, ἐκληφθῆναι δύνανται καὶ ἐπὶ τοῦ κλάσματος, τοῦ μὲν ἐν αὐτῷ ἀριθμητοῦ ὡς διαιρετέου, τοῦ παρονομαστοῦ δὲ ὡς διαιρέτου θεωρουμένων (137).

142. ΑΞΙΩΜΑ Αʹ. Ἐὰν ἐν ἁπάσῃ διαιρέσει, ἢ ἐσχηματισμένῳ πηλίκῳ, οἷον $\frac{12}{4}$, ὅ,τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, φέρ' εἰπεῖν τὸν 5, πολλαπλασιασθῶσιν, ἐξ οὗ γίνεται $\frac{60}{20}$, ἡ τοῦ πηλίκου δύναμις ἀμεταποίητος ἔσεται· ἐπεὶ 12 διαιρεθεὶς διὰ 4, παράγει 3, καὶ 60 διαιρεθεὶς δι' 20, ἀποδίδωσιν αὖθις καὶ αὐτὸς 3· καίγε εἰκότως· ὁ γὰρ 60 διαιρετέος, πενταπλάσιος τοῦ 12 γεγονὼς, ὀφείλει περιέχειν τὸν διαιρέτην 20, γεγονότα καὶ αὐτὸν πενταπλάσιον τοῦ 4, τοσάκις, ὁσάκις ὁ 12 περιέχει τὸν 4.

143. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν ὅ,τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τοῦ $\frac{12}{4}$ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ 2 διαιρεθῇ, ἀμετακίνητος ὡσαύτως διαμενεῖ ἡ τοῦ κλάσματος δύναμις· 6 γὰρ διαιρεθεὶς διὰ 2, παρέχεται 3, ὃν καὶ ὁ 12, διαιρεθεὶς διὰ 4· ὁ δέγε τούτου λόγος, ὅτι παρὰ τὴν διὰ 2 διαίρεσιν ὑποδιπλάσιος γεγονὼς ὁ 6 τοῦ 12, ὀφείλει περιέχειν τοσάκις τὸν διαιρέτην 2, γεγονότα καὶ αὐτὸν τοῦ 4 ὑποδιπλάσιον, ὁσάκις τὸν 4 περιέχει ὁ 12.

144. ΑΞΙΩΜΑ Βʹ. Ἐὰν σύμμετρον μέρος (81) ὅλου τινὸς ἀπαχθῇ ἀπ' αὐτοῦ τοῦ ὅλου, γενήσεται μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν κλάσμα, οὗ ὁ παρονομαστὴς ἔσται μονάδι ἐλάττων ἢ πρότερον· ἐὰν μέν τοι ἐξ ἐναντίας, σύμμετρον μέρος τινὸς ὅλου αὐτῷ συναφθῇ τῷ ὅλῳ, μονάδα μίαν προσκτήσεται ὁ παρονομαστὴς, ἀναφερόμενος πρὸς τὸ καινὸν

ὅλον· δι' ὑποδειγμάτων ἐκλευκανῦμεν ἀμφότερα· 4, ὅς ἐςι μέρος τῦ 20 σύμμετρον, εἴτ' ῦν ἓν πέμπτον αὐτῦ, δηλῦμενον διὰ τῦ $\frac{1}{5}$ κλάσματος, αὐτὸς ὁ 4 γίνεται $\frac{1}{4}$ τῦ 20 πλὴν 4, εἴτ' ῦν τῦ 16· ὁ αὐτὸς δὲ 4 ἀποκαθίςαται $\frac{1}{6}$ τῦ 20 σὺν 4, εἴτ' ῦν 24· εἰ γὰρ 4 ἔνεςι πεντάκις τῷ 20, ἐνέςαι πάντως τετράκις τῷ 20 πλὴν 4, ἢ τῷ 16, ϗ δὴ ἔςαι αὐτῦ $\frac{1}{4}$· ἐνέςαι μέτοιγε ἑξάκις ἐν τῷ 20 σὺν 4, ἢ 24, ϗ ὕτως ἔσεται τηνικαῦτα αὐτῦ τὸ $\frac{1}{6}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Ἀναγωγῆς τῶν Κλασμάτων.

145. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀναγωγὴ ἐν γένει καλεῖται, μεταμόρφωσίς τις, ἢ μεταβολὴ ποσῦ, φαινομένη, τῆς κατ' αὐτὸ δυνάμεως ἀμετακινήτυ ἀεὶ διατελύσης.

Πρόβλημα. Α'.

146. Κλάμα τὸ δοθὲν ἀναγαγεῖν εἰς ὅλον.

ΛΥΣΙΣ. Φανερὸν, ὡς ὐ δυνάμεθα ἀπὸ κλάσματος ὅλον συγκροτῆσαι, μὴ τῦ κλάσματος τύτυ ἰσυμένυ γῦν μονάδι μιᾷ, ϗ δὴ μὴ τῦ ἀντὶ διαιρέτυ παρονομαςῦ ἐξισυμένυ τῷ ἀντὶ διαιρετέυ ἀριθμητῇ (141)· τυτυῒ ῦν συγκυρήσαντος, θεωρείσθω τὸ κλάσμα ὡς σεσημειωμένη διαίρεσις, ϗ ὕτω διῃρήσθω ὁ ὑπὲρ τὴν γραμμὴν ἀριθμὸς διὰ τῦ ἔνερθεν.

Α'. Πόσον συμπληρῦσιν 24 τέταρτα τῦ γροσίυ; Γραφέντος ῦν $\frac{24}{4}$, διῃρείσθω 24 διὰ 4, ϗ εὑρίσκεται ὅλον γρόσια 6· παρὰ τᾶυτα συναγαγεῖν ἕκαςος ἐκ τῦ

προχείρȣ δυνήσεται· ἐπεὶ γὰρ τέσσαρα τέταρτα γροσίȣ συνιςῶσι γρόσιον ἓν, 24 τέταρτα ἀποδώσȣσιν 6 γρόσια ἐξ ἀνάγκης.

Β΄. Πόσον συμπληρȣ͂σι 240 δέκατα ὀργυιᾶς μιᾶς; Γεγράφθω $\frac{240}{10}$, ϗ 240 διαιρεθεὶς διὰ 10 δίδωσιν πηλίκον ὀργυιὰς 24.

Γ΄. Πόσον συγκροτȣ͂σιν ἕνδεκα τρίτα πήχεως; Ἐν $\frac{11}{3}$ διαιρεθεὶς ὁ 11 διὰ 3, δίδωσιν ὅλον πήχεις τρεῖς, ϗ δύω τρίτα, ὅγε καθ᾽ ἑαυτὸ σαφές.

147. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Τὸ ποσὸν, ὃ τίθεμεν εἰς μονάδα, ἢ ὡς ὅρον παραθέσεως, ὡς τὰ πολλὰ σύγκειται ἐξ ἄλλων μερῶν, ἃ ληφθέντα καθ᾽ ἑαυτὰ καιναὶ ὑπάρχȣσι μονάδες, εἴδει ἐλαττȣ́μεναι τῆς σφᾶς περιεχȣ́σης μείζονος· οἷον ὀργυιὰ μία περιέχει μονάδας 6 εἴδει ἐλάττονας, αἳ καλȣ͂νται πόδες· εἷς ἐνιαυτὸς περιέχει 12 μονάδας εἴδει ἐλάσσονας, αἵπερ μῆνες ἀκȣ́ȣσι κτ.

148. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἡ ὅλȣ τινὸς, ὡς μονὰς, θεωρȣμένȣ, εἰς μέρη διαίρεσις γίνεται ἐλευθέρως πρὸς τὸ δοκȣ͂ν. Πρόδηλον γὰρ ὡς, οἷς χρώμεθα μέτροις πανταχȣ͂ γῆς, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον διαιρεθῆναι εἶχον· οὕτως εἶχε πᾶν μέτρον διαιρεθῆναι, φέρε, εἰς τέταρτα, εἶτα τȣ́των ἕκαςον εἰς καινὰ ἄλλα τέταρτα, ϗ ἐφεξῆς ȣ̔́τως· ἢ γȣ͂ν εἰς δέκατα, ϗ αὖ τȣ́των ἕκαςον εἰς καινὰ ἄλλα τοσάδε, ϗ ȣ̔́τως ἐφεξῆς. Ἀλλὰ γὰρ παρὰ πολὺ διαφέροντα ἀλλήλων παρὰ διαφέρȣσιν εἴληπται ἔθνεσι· τȣ́τȣ χάριν καταςρώσομεν ἐνταῦθα πινακά τινων μέτρων, ὧν ἡ γνῶσις πρȣ̔́γȣ ἂν γένοιτο τῷ περὶ τὴν ἀριθμητικὴν ἀσχολȣμένῳ.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ.

Μέτρον τοῦ μήκους.

149. Ἡ κατὰ μῆκος ὀργυιὰ περιέχει.	Ποδ.	Δακτ.	Γραμ.	Στίγμ.
149. Ἡ κατὰ μῆκος ὀργυιὰ περιέχει.	6	72	864	10368
Ὁ ποῦς.	1	12	144	1728
Ὁ δάκτυλος.	0	1	12	144
Ἡ γραμμή.	0	0	1	12
Τὸ κοινὸν βῆμα.	2½	30	360	4320
Τὸ Γεωμετρικὸν βῆμα.	5	60	720	8640

Ὁ τῶν Παρισίων πῆχυς, πόδ. 3, δακτύλους 7, γραμμὰς 10, καὶ 4/5 τῆς παρισιανῆς γραμμῆς.

Ὁ μείζων πῆχυς (brasse).	5	60	720	8640

150. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τοῖς ἐφεξῆς μέτροις, καὶ ἐν γένει, ὅταν ἔκτασιν προτεθῇ μετρῆσαι, χρησόμεθα ὡς ὅρῳ συγκρίσεως ἀεὶ τῷ ῥηθέντι ποδὶ, τῷ 12 δακτύλων περιεκτικῷ, ὃς ὀνομάζεται ποῦς βασιλικὸς, ἢ τῶν Παρισίων.

151. Ἡ μέση μοῖρα τοῦ τῆς γῆς πλάτους περιέχει ὀργυιάς. ὀργ. 57050

Ἡ κοινὴ τῶν τῆς Γαλλίας λεγῶν, ὧν περιέχει 25 ἑκάστη μοῖρα.	—	2282
Ἡ θαλάσσιος, ὧν 20 συμπληροῦσι μίαν μοῖραν.	—	2852½
Ἡ μεγάλη τῆς Γερμανίας λέγα, ἢ τὸ μέγα μίλιον, ὧν 15 πληροῖ μοῖραν μίαν.	—	3803⅓
Ἡ κοινὴ λέγα, ἢ κοινὸν μιλ. τῆς Γερμανίας.	—	3333⅓
Ἡ μικρὰ λέγα τῆς Γερμανίας. . .	—	3042⅞

Τὸ μίλλιον τῆς Φλανδρίας.	ὀργ.	3221
Τὸ μίλλιον τῆς Ἀγγλίας, ϗ Ἰταλίας.	—	$950\frac{1}{2}$
Τὸ ςάδιον.	—	85

Μέτρον τῶν ἐπιφανειῶν.

152. ΣΧΟΛΙΟΝ. Φανήσεται ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ὁ λόγος ἁπάντων, ὧν ἐρῦμεν ἐνταῦθα περίτε τῶν ἐπιφανειῶν, ϗ τῶν ςερεῶν.

153. Α΄. Πολλαπλασιαζομένου μήκους τινὸς ἐπὶ γραμμὴν, ἥτις καλεῖται πλάτος, ἀεὶ πρόεισιν ἐπιφάνεια, περιέχουσα ἓν ἢ πλείω τετράγωνα· τέσσαρες, φέρ᾽ εἰπεῖν, ὀργυιαὶ κατὰ μῆκος, πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ τρεῖς κατὰ πλάτος, παράγουσι δώδεκα τετραγωνικὰς ὀργυιὰς, ὅπερ ἐςὶ, δώδεκα τετράγωνα, περιέχον ἕκαςον ἓξ πόδας κατὰ μῆκος, ϗ τοσοῦςδε κατὰ πλάτος· 5 δὲ πόδες κατὰ μῆκος, πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ 4 κατὰ πλάτος, ποιοῦσιν 20 πόδας τετραγωνικούς. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν μέτρων ὡσαύτως.

154. Β΄. Ὡσαύτως ϗ περὶ τῶν ςερεῶν· ἐὰν τὸ προκύπτον 12, φέρε, ἐκ μήκους 4, ϗ πλάτους 3, πολλαπλασιασθῇ πρὸς τούτοις ἐπ᾽ ἄλλην γραμμὴν, ἣ καλεῖται ὕψος, οἷον ὀργυιῶν 2, ἐπὶ τοῦ προκειμένου ὑποδείγματος, τὸ προκύπτον 24 δηλώσει ὀργυιὰς κυβικὰς, ταὐτὸν εἰπεῖν διαςήματα 24 παρεμφερῆ ἕκαςα τοῖς, οἷς παίζομεν, κύβοις, ϗ περιέχοντα ὀργυιὰν μίαν μὲν κατὰ μῆκος, μίαν δὲ κατὰ πλάτος, μίαν δὲ ϗ πρὸς ὕψος.

155. Γ΄. Ἴδου δὴ τὰ ἐν ἑκάςῳ ἐπιφανείας μέτρῳ περιεχόμενα μέρη.

Τῆς κατὰ μῆκος ὀργυῖς περιεχέσης πόδας 6 τὴν Τετραγωνικὴν συμπληρῦσι πόδες τετραγωνικοὶ 36

	ποδ. τρ.	δ. τρ.	γρ. τετρ.	ϛιγμ. τετρ.
Τετραγωνικὴ ὀγυιά.	36	5184	746496	107495424
Ὁ τετραγωνικὸς πῦς.	1	144	20736	2985984
Ὁ τετραγων. δάκτυλ.	0	1	144	20736
Ἡ τετραγων. γραμμή.	0	0	1	144

Τῆς παρὰ Γάλλοις λεγομένης λέγας ὔσης κατὰ μῆκος ὀργυιῶν 2282, ἡ τετραγωνικὴ ἔςαι 5207524 ὀργυιῶν τετραγωνικῶν, δακτύλων δὲ τοιύτων 187470864, ϗ ὕτως ἐφεξῆς.

156. Δ΄. Τὸ δὲ τῶν ϛερεῶν μέτρον, ὅ ἐςι τῶν διαϛημάτων, οἷς ἐςι μῆκος, πλάτος, ϗ ὕψος, ἐκδηλοῖ ὁ ὑπ᾽ ὄψιν πίναξ.

Ἡ κυβικὴ ὀργυὰ

	ποδ. κυβ.	δ. κυβ.	γρ. κυβ.	ϛιγμ. κυβ.
περιέχει.	216,	373248,	644972544,	1114512556032
Πῦς κυβ.	1,	1728,	2985984,	5159780352
Δάκτ. κυβ.		1,	1728,	2985984
Γραμ. κυβ.		0,	1,	1728

Ἡ δὲ κυβικὴ λέγα περιέχει τετραγωνικὰς ὀργυιὰς 11883569768.

Μέτρον τῶν ϛαθμῶν.

157. Ἡ λίτρα τῶν Παρισίων.

	ἡμίλ.	ὐγγ.	δραχμ.	δην.	κόκκ.
περιέχει.	2	16	128	384	9216
Τὸ ἡμιλίτριον.	1	8	64	192	4608
Ἡ Οὐγγία.	0	1	8	24	576

Ἡ Δραχμή.	0	0	1	3	72
Τὸ δηνάριον.	0	0	0	1	24

Τὸ καλέμενον κιντάλιον (quintal) ἐςὶ ςαθμὸς, συγκείμενος ἐκλιτρῶν 100, 200, 1600, 12800, 38400, 921600.

158. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ καθολικώτερον τῶν ὑγρῶν μέτρον ἐςὶν ἡ ςάμνος (pot), ὃ τὸ ἥμισυ καλεῖται μὲν ἐν τῇ Γαλλία (pinte) ἡμῖν δ' εἰ δοκεῖ, καλείσθω ἡμιςάμνιον· χωρεῖ δὲ τὸ μέτρον τετὶ τοσῦτον, ὥςε πᾶς κυβικὸς περιέχει τὸ ὑπὸ τέτε μετρέμενον δεκάκις καὶ ὀκτάκις· ἡ ἄρα ςάμνος ἐςὶ μέτρον χωρᾶν $\frac{1}{18}$ κυβικᾶ ποδὸς, καὶ δὴ δακτύλες κυβικὲς 96 (156). Τὸ δὲ ἡμιςάμνιον περιέξει πόδας κυβικὲς 48. Τὸ δὲ τῆς ςάμνε τεταρτον, ἢ τὸ (chopine) περιέχει κυβικὲς πόδας 24.

159. Ἡ ςάμνος ἄρα	ποδ. κυβ.	δακ. κυβ.	γραμ. κυβ.
περιέχει.	$\frac{1}{18}$	96	165888
Τὸ ἡμιςάμινον. . . .	$\frac{1}{36}$	48	82944
Τὸ τεταρτημόριον (chopine)	$\frac{1}{72}$	24	41472

160. Βελομένοις δ' ἐκτιμήσασθαι τὴν ςάμνον ἐν ςαθμοῖς ἐξέςαι λαβεῖν ὡς ὅρον συγκρίσεως τὸ κοινὸν ὕδωρ, ὃ πᾶς κυβικὸς ςαθμώμενος εὑρίσκεται λίτρας ἕλκων 54· ὅθεν ἕπονται τὰ ἑξῆς.

	λιτ.	ἡμιλ.	ὀγγ.	δραχ.	δηνάρ.
Πᾶς κυβικὸς ὕδατος.	54	108	864	6912	20736
Στάμνος ἄρα ὕδατος κοινᾶ (158).	3	6	48	344	1152
Τὸ ἡμιςάμνιον.	$1\frac{1}{2}$	3	24	194	576
Τὸ τεταρτημόριον τῆς ςάμνε.	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	12	96	288

161. Ἡ ςερεότης μιᾶς λίτρας ὕδατος τὸ τρίτον ὲσα

τῆς ϛάμνȣ, ἔσεται 32 δακτύλων κυβικῶν (158)· ὁ ἄρα κυβικὸς ὕδατος δάκτυλος ἕλκει βάρος ἡμιȣγγίȣ.

162. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τȣ̃ Ἀτμοσφαιρικȣ̃ ἀέρος τȣ̃ πρὸς τῷ ὁρίζοντι βάρος ἕλκοντος $\frac{1}{32}$ τȣ̃ ὕδατος, εἷς πȣ̃ς κυβικὸς ἕλξει βάρος $\frac{1}{910}$ 54 λιτρῶν (160)· εἶτ' ȣ̃ν ὡς ἔγγιϛα 21 δηνάρια ϗ $\frac{4}{5}$ δηναρίȣ, ἢ 7 δραχμὰς ϗ δηνάριον ἓν ὡς ἔγγιϛα.

163. Ἡ δὲ καθ' ἡμᾶς ἐν χρήσει Οὐκά ἐϛι μέτρον περιέχον δραχμὰς· 400 ἰσοδυναμȣ̃σι δὲ αἱ 400 δραχμαὶ 288 παρισιαναῖς, ἢ ȣ̓γγίαις 36· ἡ ἄρα ȣ̓κὰ ἕλκει βάρος λιτρῶν δύω ϗ ἑνὸς τετάρτȣ, ϗ δὴ τὸ ϛερεὸν ὕδατος ȣ̓κᾶς ἐϛι δακτύλων κυβικῶν 72 (161) ϗ ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ τριῶν τετάρτων τῆς ϛάμνȣ (158).

Περὶ τῶν νομισμάτων.

164. Ἐν τῇ Γαλλίᾳ.	σολδ.	δην.		λεπ.
Ἡ λίτρα περιέχει	20	240		2880
Τὸ σολδίον.	1	12		144
Τὸ δηνάριον.	0	1		12
Ἐν τῇ Αὐϛρίᾳ.	γροσ.	ϛαυρ.	φεν.	λεπ.
Τὸ φιορίνιον περιέχει.	20	60	240	480
Τὸ γροσσίκιον.	1	3	12	24
Τὸ ϛαυροφόρον.	0	1	4	8
Τὸ φέννιγον.	0	0	1	2
Τὸ δȣκάτον τῆς Ὁλάνδας περιέχει φιορίνια $4\frac{1}{2}$.	90	270	1080	2160
Ἐν τῇ Τȣρκίᾳ.	παρ.		λεπτά.	
Τὸ γρόσιον περιέχει.	40		120	
Τὸ δεκάριον.	10		30	

Τὸ πεντάριον.	5	15
Ὁ παρᾶς.	1	3
Τὸ δυκάτον τῆς Ὁλλάνδας περιέχει γρόσια 9.	360	1080

Μέτρον τῶν γωνιῶν.

165. Ὀψόμεθα ἐν τοῖς ἐφεξῆς, ὅτι γωνίας μέτρον ἐςὶν ἀεὶ μέρος τῆς κυκλικῆς περιφερείας· ὑποτίθεται τοίνυν ἡ παντὸς κύκλȣ περιφέρεια, ὅση ἂν ᾖ τὸ μέγεθος, διῃρημένη εἰς μοίρας 360· ἑκάςη δὲ μοῖρα, εἰς 60 ἑξηκοςὰ πρῶτα, ὧν ἕκαςον, εἰς 60 δεύτερα κτ. ὅλη ἡ κυκλικὴ

	μοιρ.	λεπ.	δεύτερα.
περιφέρεια περιέχει.	360	21600	1296000
Ἑκάςη μοῖρα.	1	60	3600
Ἕκαςον λεπτόν.	0	1	60

Μέτρον τȣ͂ χρόνȣ.

166. Ὁ κοινὸς ἐνιαυτὸς περιέχει ἡμέρας $365\frac{1}{4}$· ἀκριβέςερον μέντοι, ἡμέρας 365, ὥρας 5, ϗ λεπτὰ 49.

	ἡμ.	ὥρ.	λεπ.	δεύτ.
Ὁ ἐνιαυτός.	$365\frac{1}{4}$	8765	525949	31556940
Ἡ ἡμέρα.	1	24	1440	86400
Ἡ ὥρα	0	1	60	3600
Τὸ λεπτόν.	0	0	1	60

Αἰὼν ἐςὶ διάςημα χρονικὸν περιεκτικὸν ἐτῶν 100.

Ἰνδικτιὼν δὲ, διάςημα περιέχον ἐνιαυτȣ̀ς 15.

Ὀλυμπιὰς δὲ, 4· πενταετηρὶς δὲ, 5.

167. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ῥᾴδιον δὲ κατανοῆσαι ἐκ τῶν

εἰρημένων, ὅτι ποσότης, ἐλάσσων τῷ εἴδει, ἀεί ἐστι κλάσμα ποσότητος μείζονος, ἐν ᾗ περιέχεται· τὸ γὰρ λεπτὸν ὑπάρχει τῆς ὥρας $\frac{1}{60}$, τῆς δ' ἡμέρας $\frac{1}{1440}$, τοῦ δ' ἐνιαυτοῦ $\frac{1}{525949}$· ἡ δ' οὐγγία, τοῦ ἡμιλιτρίου τὸ $\frac{1}{8}$· τὸ δὲ ἡμιλίτριον, τῆς λίτρας τὸ $\frac{1}{2}$· ἡ δὲ λίτρα, τοῦ κινταλίου τὸ $\frac{1}{100}$, ϗ ἐπὶ τῶν ἄλλων μέτρων ὡσαύτως.

Πρόβλημα Β'.

168. Εἶδος ποσότητος μεῖζον ἐπ' ἔλαττον ἀγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Πεπολλαπλασιάσθω ὁ ἀριθμὸς τοῦ μείζονος εἴδους ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐμφαίνοντα, ὁσάκις ἡ εἴδει ἐλάττων μονὰς ἐμπεριέχεται τῇ τῷ εἴδει μείζονι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Τῆς ὀργυιᾶς πόδας περιεχούσης 6, ἀγομένων, φέρε, 5 ὀργυιῶν εἰς πόδας, πολλαπλασιασθήτω 5 ἐπὶ 6, ϗ προκύψουσι πόδες 30· τῆς δὲ τετραγωνικῆς ὀργυιᾶς δακτύλους τοιούτους περιεχούσης 5184, ἀναχθήσονται 5 τετραγωνικαὶ ὀργυιαὶ ἐπὶ δακτύλους, πολλαπλασιασθέντος 5 ἐπὶ 5184· ὅθεν ἔσαι 25920.

Β'. Τῆς λίτρας 16 περιεχούσης οὐγγίας, 7 φέρ' εἰπεῖν λίτραι ἀναχθήσονται ἐπ' οὐγγίας πολλαπλασιασθέντος 7 ἐπὶ 16, ἐξ ὧν προκύψουσιν οὐγγίαι 112.

Γ'. Ἐντεῦθεν οὖν ϗ νομισμάτων λίτραι 8 ἀναχθήσονται εἰς σολδία, πολλαπλασιασθέντος 8 ἐπὶ 12· ϗ γρόσια εἰς παράδας, ἐπὶ 40· ϗ φιορίνια εἰς σαυροφόρα, ἐπὶ 60· ἀλλὰ ϗ μοῖραι εἰς λεπτὰ, ϗ ταῦτα, εἴπη παρείκοι, εἰς δεύτερα κτ., πολλαπλασιάσασιν ἐπὶ 60 (103).

Δ'. 6 Ἡμέραι ἀναχθήσονται εἰς λεπτὰ, ἀμέσως πολλαπλιασθέντος 6 ἐπὶ 1440 (166), ἢ γοῦν πρῶτον μὲν ἐπὶ 24· ἐξῆς δὲ τὸ προκύπτον ἐπὶ 60.

ΔΕΙΞΙΣ. Απλέςατος δὲ ὁ ταύτης τῆς μεθόδȣ λόγος· εἴγε μιᾶς ὀργυιᾶς, φέρε, 6 περιεχȣ́σης πόδας, 5 ὀργυιὰι ταὐτὸν δυνήσονται ποσὶ πεντάκις 6· ἀνάγκη ἄρα τὸν ἀριθμὸν 5, τὸν τὸ μεῖζον ἐκδηλȣ̃ντα εἶδος, πολλαπλασιάσαι ἐπὶ τὸν 6, τὸν ἐμφαίνοντα, ὁσάκις ὁ πȣ̃ς τῇ ὀργυιᾷ ἐμπεριέχεται.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τῆς γῆς ἐξ ὑποθέσεως πρὸς τὸν ἑαυτῆς ςρεφομένης ἄξονα περιφορὰν ὅλην ἐν ὥραις 24, ἕκαςος τῶν ὑπὸ τὸν ἰσημερινὸν οἰκȣ́ντων συνάμα τῇ γῇ περιςρέφεται περιφορὰν λεγῶν 9000· πόσȣς ἄρα πόδας διανύει ἐν δευτέρῳ ὥρας λεπτῷ;

α΄. Ανήχθωσαν 9000 λέγαι ἐπ' ὀργυιὰς (168), ἑξῆς δ' ἐπὶ πόδας· ὅθεν προκύψȣσι πόδες 123228000. β΄. ἀνήχθωσαν ἐπὶ λεπτὰ δεύτερα αἱ ὧραι (166)· ὅθεν προελεύσεται λεπτὰ δεύτερα 86400. γ΄. διῃρήσθω ὁ τῶν ποδῶν ἀριθμὸς διὰ τȣ̃ τῶν δευτέρων λεπτῶν· εὑρεθήσεται δὴ οἰκήτωρ ἕκαςος τῶν ὑπὸ τὴν ἰσημερινὴν διατρέχων λεπτȣ̃ δευτέρȣ πόδας 1426.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ζητηθήτω παραςαθῆναι ἐν ςαθμοῖς τὸ δεκτικὸν τινος ἄγγȣς. Τȣτὶ ȣ̃ν ςαθμηθὲν πληρωθήτω ἐπ' ἀκριβὲς ὕδατος κοινȣ̃· εἰ μὲν ȣ̃ν συνάμα τῷ ὕδατι βάρος ἕλκει λιτρῶν 60, πόσας ςάμνȣς περιέξει; ἢ εἰ ϗ τȣτὶ βȣλόιμεθα, πόσȣς κυβικȣ̀ς δακτύλȣς; διῃρήσθωσαν 60 λίτραι διὰ 3 (160), ὅθεν προκύψȣσι ςάμνοι 20, ἢ πολλαπλασιασθήτωσαν 60 ἐπὶ 32 (161), ὅθεν προκύψȣσι πόδες κυβικὸι 1920, ȣ̃ς περιέχει τȣ̃ ἄγγȣς ἡ χωρητικότης.

Πρόβλημα Γ΄.

169. Ελαττον εἶδος ἐπὶ μεῖζον ἀναγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Αὕτη ἡ πρᾶξις, ἐναντία ἔσα τῇ προεκτεθείσῃ, διαίρεσιν ἀπαιτεῖ τε τὸ ἔλαττον εἶδος ἐμφαίνοντος ἀριθμε διὰ τε, ὁσάκις μονὰς μία τε ἐλάττονος ἐμπεριέχεται τῇ μείζονι, ἐνδεικνῦντος.

Α΄. Ἀναχθήσονται ἄρα, πόδες μὲν ἐπ᾽ ὀργυιὰς, διελεσι δὶ 6· δάκτυλοι δ᾽ ἐπ᾽ ὀργυιὰς, δὶ 72· ἢ γεν πρῶτον μὲν διὰ 12, εἶθ᾽ ἔτω δὶ 6 τὸ πηλίκον· γραμμαὶ δ᾽ ἐπὶ πόδας, διὰ 144, κτ. (149). Πόδες ἐν 506 πόσας ὀργυιὰς συνιςῶσι; διελὼν πόδας 506 δὶ 6, εὑρήσεις ὀργυιὰς 84, ϗ πόδας 2.

Β΄. Ἀναχθήσονται πόδες τετραγωνικοὶ εἰς ὀργυιὰς τοιαύτας, διελεσι διὰ 36· δάκτυλοι δὲ (δῆλον ὅτι τὰ πάντα τετραγωνικὰ) εἰς πόδας, ϗ γραμμαὶ εἰς δακτύλες, διὰ 144· δάκτυλοι δ᾽ ἐπ᾽ ὀργυιὰς, ἤτοι ἀμέσως διὰ 5184 (155), ἢ πρῶτον μὲν διὰ 144, ἑξῆς δὲ διὰ 36 (120). Πόσας ἆρα πόδες 8524 συμπληρεσιν ὀργυιάς; διὰ 36 διαιρέσεως γενομένης, πρόεισι πηλίκον 236 ὀργυιαὶ, ϗ πόδες 28.

Γ΄. Ἀναχθήσονται δὲ ϗ πόδες κυβικοὶ εἰς ὀργυιὰς τοιάςδε, ϗ δάκτυλοι δὲ ἐπὶ πόδας, ϗ γραμμαὶ ἐπὶ δακτύλες κτ. διελεσι διὰ 1728· δάκτυλοι δ᾽ ἐπ᾽ ὀργυιὰς, διὰ 373248 (156), ἢ πρῶτον μὲν διὰ 1728, εἶτα τὸ πηλίκον διὰ 216 (129). Πόσας ἆρ᾽ ὀργυιὰς συμπληρεσι πόδες 5674310; διαιρεθεὶς οὗτος ὁ ἀριθμὸς διὰ 373248, δίδωσιν ὀργυιὰς 15, λειπομένων δακτύλων 75590, οἳ διαιρεθέντες διὰ 1728 (156), διδόασι πόδας κυβικὲς 43 μετὰ καταλοίπε 1286 κυβικῶν δακτύλων.

Δ΄. Τὰ δὲ ἡμιςάμνια ἀναχθήσονται ἐπὶ λίτρας, διαιρεθέντα διὰ 2· αἱ ἐγγίαι δ᾽ ἐπὶ ἡμιςάμνια, δὶ 8, αἱ δ᾽ αὗται εἰς λίτρας, διὰ 16 κτ. 236, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἐγ-

γίαι, διαιρεθεῖσαι διὰ 16, ἀποδιδόασι λίτρας 14, ϗ 12 ȣγγίας.

Ε΄. Τὰ δὲ σολδία εἰς λίτρας, διαιρȣ́μενα διὰ 20· οἱ δὲ παράδαι εἰς γρόσια ἀνάγονται, διαιρȣ́μενοι διὰ 40, τὰ δέγε ϛαυροφόρα ἐπὶ φιορίνια, διὰ 60 (131. κτ.).

ϛ΄. Τέλος δὲ, αἱ ὧραι εἰς ἡμέρας φέρονται, διαιρȣ́μεναι διὰ 24· τὰ δὲ λεπτὰ εἰς ὥρας, ϗ ἐπὶ πρῶτα τὰ δεύτερα, διαιρȣ́μενα διὰ 60· λεπτὰ ȣ͂ν 67054 πόσας συγκροτȣ͂σιν ἡμέρας· ὁ 67054, διαιρεθεὶς δἰ 60, παράγει πηλίκον ὥρας 1125 ϗ 4 λεπτά· ὁ δὲ 1125, διαιρεθεὶς δἰ 24, δίδωσιν ἡμέρας 46 ϗ ὥρας 21· συμπληρȣ͂νται ȣ͂ν ἡμέραι 46, ϗ ὧραι 21, ϗ λεπτὰ 4.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ρ῾ᾷϛα δὲ κατανοηθήσεται, ὡς ἑκατέρα τῶν ἀποδοθεισῶν πράξεων ξυντελεῖ ἀμοιβαδὸν θατέρᾳ εἰς βάσανον· ἵνα, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἀναχθῶσι λίτραι 35 ἐπὶ σολδία, πολλαπλασιάζεται ὁ 35 ἐπὶ τὸν 20· ἵνα δὲ βασανισθῇ τὰ τῆς πράξεως, ἐπαναγόμενος ὁ προκύπτων 700 εἰς λίτρας τῇ δἰ 20 διαιρέσει, ὀφείλει ἀποδȣ͂ναι αὖθις λίτρας 35, ϗ ἀνάπαλιν.

Πρόβλημα Δ΄.

170. Ἀναγαγεῖν ὅλον ἐπὶ κλάσμα.

ΛΥΣΙΣ. Εἰ μὲν μόνον ἐν εἴδει κλάσματος δέοι ἀριθμὸν ὅλον, οἷον τὸν 6, παραϛήσασθαι, γενήσεται ῥᾷϛα, γραφέντος $\frac{6}{1}$ (139).

Εἰ δὲ ζητεῖται ἀναγαγεῖν ὅλον ἐπὶ κλάσμα, ȣ͂ εἴη δεδομένος ὁ παρονομαϛὴς, πεπολλαπλασιάσθω τὸ ὅλον ἐπὶ τὸν παρονομαϛὴν, ϗ σεσημειώσθω ὁ προκύπτων ὡς διὰ τȣ͂ παρονομαϛȣ͂ διαιρȣ́μενος (138.)

Ζητεῖται, φέρ' εἰπεῖν, ἀναγαγεῖν τὸν 4 εἰς πέμπτα, πεπολλαπλασιάσθω ἓν 4 διὰ 5, ϗ γεγράφθω $\frac{20}{5}$· ἐπεὶ δὲ ὄντως ἐκ τȣ̃ $\frac{20}{5}$ προέρχεται ὅλον τῷ 4 ἰσȣ́μενον (146), ἀσφαλῶς ἔχει ἡ μέθοδος (145).

Ζητεῖται ἀναγαγεῖν τὸν 7 ἐπὶ εἰκοςά· τῷ ἓν τȣ̃ 7 διπλασίῳ προσεπιγεγράφθω δεξιόθεν ο (103)· Τέλος δὲ ἐχηματίσθω ȣ̃τω $\frac{140}{20}$· τȣ́τȣ δὲ ἰσȣμένȣ τῷ 7, ἀσφαλὴς ἐςὶ πάντως ἡ πρᾶξις.

Πρόβλημα Ε΄.

171. Ἐκτιμῆσαι ἐν εἴδει ἐλάττονι τὴν δύναμιν δοθέντος κλάσματος.

ΛΥΣΙΣ. Ὁ ἀριθμητὴς, διαιρȣ́μενος διὰ τȣ̃ παρονομαςȣ̃, ἐπ' εἶδος ἀναχθήσεται ἔλαττον (168).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Εἰς εὕρεσιν τῆς δυνάμεως $\frac{2}{5}$ ὀργυιᾶς κατὰ μῆκος, ἐπεὶ τόδε τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ ἰσοδυναμεῖ $\frac{1}{5}$ ὀργυιῶν 2 (140), ἀνήχθωσαν 2 ὀργυιαὶ ἐπὶ πόδας, ϗ εἰλήφθω αὐτῶν τὸ πέμπτον, ὅπερ ἐςὶ πόδες 2, καταλειπομένων ποδῶν 2, ἐφ' ᾧ διὰ 5 διαιρεθῆναι· ȣ̃τοι δὲ ἀνήχθωσαν ἐπὶ δακτύλȣς· 24 δὲ δάκτυλοι διῃρήσθωσαν διὰ 5, ὅθεν προκύψȣσι δάκτυλοι 4, λειπομένων 4, οἵτινες ἀνήχθωσαν ἐπὶ γραμμάς· 48 δὲ γραμμαὶ, διαιρεθεῖσαι διὰ 5, διδόασι γραμμὰς 9, λειπομένων 3, αἵτινες ἀναχθεῖσαι εἰς σίγματα ποιȣ̃σι 36· 36 δὲ, διαιρεθέντα διὰ 5, παράγȣσι πηλίκον σίγματα 7 ϗ $\frac{1}{5}$ σίγματος· τȣ̃τον ἄρα τὸν τρόπον $\frac{2}{5}$ ὀργυιᾶς εὑρέθησαν ἐκτιμώμενα ποδῶν μὲν 2, δακτύλων δὲ 4, γραμμῶν δὲ 9, σιγμάτων δὲ 7 $\frac{1}{5}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Πόσον ἐκδηλȣ̃σι γροσία $\frac{6}{7}$; ἢ $\frac{1}{7}$ τῶν 6 γροσίων (140)· ἀναχθέντα ȣ̃ν 6 γρόσια ἐπὶ δε-

κάρια συγκροτοῦσιν αὐτῶν 24· διῃρήσθω δὴ 24 διὰ 7· ὅθεν προκύψει πηλίκον 3 δεκάρια, μετὰ καταλοίπου 3, ἃ περιέχει παράδας 30· 30 δὲ, διαιρεθέντες διὰ 7, παρέχουσι παράδας 4, λειπομένων 2, ἃ περιέχει λεπτὰ 6· 6 δὲ διαιρεθέντα δὶ 7 διδόασιν $\frac{6}{7}$· ἰσοδυναμοῦσιν ἄρα $\frac{6}{7}$ γροσίου, 3 μὲν δεκαρίοις, παράδαις δὲ 4, καὶ $\frac{6}{7}$ λεπτοῦ ἑνός.

172. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἅπαν λείψανον διαιρέσεως, οἷον τὸ $\frac{10}{35}$, ἀεὶ δύναται ἐκληφθῆναι ἀντὶ κλάσματος (137)· ἵν' οὖν διορισθῇ ἐν εἴδει ἐλάττονι ἡ δύναμις καταλοίπου τινὸς, ἀνήχθω ἐπ' εἶδος ἔλαττον, καὶ συνεχισθήτω, ὡς καὶ πρὶν, τὰ τῆς διαιρέσεως· οἷον, περὶ οὗ πρὸ μικροῦ εἴπομεν ὑποδείγματος (117), κατελείφθησαν 10 λίτραι, διανεμηθησόμεναι στρατιώταις 35· ἀνάγονται 10 λίτραι ἐπὶ σολδία, ἃ εὑρίσκεται 200· ταῦτα δὲ διαιρούμενα διὰ 35 διδόασιν ἑκάστῳ 5, μετὰ καταλοίπου σολδίων 25, ἅπερ αὖθις ἀνάγονται ἐπὶ δηνάρια· καὶ διὰ 35 διαιρούμενα ἀπονέμουσιν ἑκάστῳ 8, λειπομένων 20, ἅτινα ἀνάγονται ἐπὶ λεπτὰ 240· διαιρεθέντα δὲ ταῦτα διὰ 35 διδόασιν ὡς ἔγγιστα ἑκάστῳ 7· οὕτως ἄρα λίτραι 640, διαμερισθεῖσαι στρατιώταις 35, ἀπονεμοῦσιν ἑκάστῳ 18 λίτρας, 5 σολδία, 8 δηνάρια, καὶ 7 λεπτά.

Πρόβλημα ς΄.

173. Ἀναγαγεῖν κλάσμα ἐφ' ἁπλουστέραν ἔκθεσιν.

ΛΥΣΙΣ. Διῃρήσθων ὅ,τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς διὰ τοῦ αὐτοῦ μείζονος, ἢ μονὰς, ἀριθμοῦ· συνίδοι δ' ἄντις, ὑφ' ὅτου ἀριθμοῦ ἂν τουτὶ ἔχοι γενέσθαι, τοῖς ἐφεξῆς ἀτενῶς προσέχων τὸν νοῦν.

Α΄. Ἅπας ἄρτιος ἀριθμὸς, πολλαπλοῦς ὢν τοῦ 2 (ὡς

καθ' ἑαυτὸ ξυμφανὲς) διαιρέσιμος ὑπάρχει ἐπ' ἀκριβὲς διὰ 2· ἐὰν ἄρα ἑκάτερος τῶν ὅρων τȣ̃ δοθέντος κλάσματος ἄρτιος ᾖ, εἰλήφθω ἑκατέρȣ τὸ ἥμισυ, ϗ αὖθις, εἰ ϗ τȣ̃το δυνατὸν, τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃δε τὸ ἥμισυ, ϗ ἐφεξῆς οὕτως· ἐπὶ τȣ̃ $\frac{8}{10}$ κλάσματος, ληφθέντος τȣ̃ ἡμίσεως ἔκ τε τȣ̃ 8 ϗ τȣ̃ 10, συςαθήσεται κλάσμα καινὸν τὸ $\frac{4}{5}$ ἴσον τῷ $\frac{8}{10}$ (143)· ἐκ δὲ τȣ̃ $\frac{8}{12}$ ληφθέντος δὶς ἐφεξῆς τȣ̃ ἡμίσεως, εὑρεθήσεται $\frac{2}{3}$ ἴσον $\frac{8}{12}$.

Β'. Ἀριθμὸς ἅπας, ἐν δεξιᾷ εἰς ο λήγων, διαιρεθῆναι δύναται διὰ 10 (101)· εἰς δὲ δύω ο λήγων, διὰ 100 κτ. ἐὰν ἄρα ἑκάτερος τῶν τȣ̃ κλάσματος ὅρων ἔχῃ πρὸς δεξιὰν ἓν ἢ πλείω ο, ἀναχθήσεται ἐφ' ἁπλȣςέραν ἔκθεσιν, ἀποχωριζομένων κοινῇ ὑπερθέντε ϗ ἔνερθεν τῶν ο, ὃ τὴν τȣ̃ κλάσματος δύναμιν διασώζει ἀμεταποίητον· ἐν ἓν $\frac{70}{100}$, ἢ $\frac{700}{1000}$, ἢ $\frac{7000}{10000}$, ἀφαιρȣμένων κοινῇ (126, 143) τῶν ο, ἅπαντα ταῦτα τὰ κλάσματα ἰσωθήσονται τῷ $\frac{7}{10}$.

Γ'. Ἀριθμὸς ἅπας, λήγων εἰς 5, διαιρεῖται ὁλοσχερῶς διὰ 5· αὐτίκα δὴ τȣ̃το καταφαίνεται ἐπὶ τȣ̃ τῶν μονάδων ἐμφαντικȣ̃ χαρακτῆρος, ὅς ἐςι 5, καθ' ὑπόθεσιν· ἀλλὰ μὴν αἱ δεκάδες, αἱ ἑκατοντάδες κτ. τȣ̃δε τȣ̃ ἀριθμȣ̃, προδήλως ȣ̃σαι τȣ̃ 10 πολλαπλαῖ (77), ἔσονται παρὰ τȣ̃το ϗ τȣ̃ 5, ȣ̃ διπλȣ̃ς ὁ 10· ἅπας ἄρα τοιόσδε ἀριθμὸς διαιρέσιμος ὑπάρχει διὰ 5.

Δ'. Ἅπας ἀριθμὸς, ȣ̃ τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων, συναφθέντων ἀλλήλοις, ὡς εἰ ἦσαν μονάδες ἁπλαῖ, ἀποτελοίη 3, ἢ πολλαπλȣ̃ν τȣ̃ 3, διαιρεῖσθαι δύναται διὰ 3· ȣ̃τω κλάσματος $\frac{288}{351}$ τȣ̃ μὲν ἀριθμητȣ̃ οἱ χαρακτῆρες συναπτόμενοι ποιȣ̃σι 18, πολλαπλȣ̃ν ὄντα τȣ̃ 3, τȣ̃ δὲ παρανομαςȣ̃, 9, ὄντα ϗ αὐτὸν τȣ̃ 3 πολλαπλȣ̃ν·

διὸ τὸ $\frac{288}{351}$, διαιρέσει ἑκατέρȣ ὅρȣ διὰ 3, γίνεται $\frac{96}{117}$, ϗ τȣ̃το αὖθις $\frac{32}{39}$· κρατεῖ δὲ τȣ̃το ἐν ἁπάσαις ταῖς τοιαῖσδε περιςάσεσιν, ὡς ἑκάςῳ πείρᾳ μαθεῖν ἔξεσι.

174. Ἐὰν ἄρα ἅτερος τῶν συντιθέντων τὸ κλάσμα ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 0, ἅτερος δὲ εἰς 5, ἢ ἑκάτερος εἰς 5, διῃρήσθων διὰ 5· ἐν ȣ̃ν τῷ $\frac{10}{25}$ διαιρεθέντων τȣ̃ τε 10 ϗ 25 διὰ 5, συςήσεται $\frac{2}{5}$· τὸ δὲ $\frac{5}{15}$ τραπήσεται ȣ̔́τως εἰς $\frac{1}{3}$.

175. Ἐν γένει δὲ, ἐὰν ὅ,τε ἀριθμητὴς ϗ ὁ παρονομαςὴς τȣ̃ δοθέντος κλάσματος πολλαπλοῖ ὦσιν ἀριθμȣ̃ τȣ̃ αὐτȣ̃, διαιρεθῆναι ἔχει ἑκάτερος διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃· ἐν ȣ̃ν τῷ $\frac{12}{18}$, παρατηρȣ̃ντες ὡς ὅ,τε 12 ϗ 18 πολλαπλοῖ ὑπάρχȣσι τȣ̃ 6, διαιρȣ̃μεν ἑκάτερον διὰ 6, ἀποφερόμενοι $\frac{2}{3}$ ἴσον τῷ $\frac{12}{18}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν ἁπάσαις ταῖς εἰρημέναις περιπτώσεσι διαιρῶ τόν τε ἀριθμητὴν ϗ τὸν παρονομαςὴν διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃, μείζονος ὄντος τῆς μονάδος· ἑκάτερος ἄρα ἀναγκαίως μειωθήσονται (110), ἥτε ἔκθεσις ἔσεται ἁπλȣςέρα, ἀμεταποιήτȣ μενȣ́σης τῆς κατὰ τὸ κλάσμα δυνάμεως.

176. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὁ μέγιςος τῶν ἀκριβῶς διαιρȣ́ντων ἑτέρȣς δύω ἀριθμὸς καλεῖται μέγιςος ϗ κοινὸς ἀμφοῖν διαιρέτης, οἷός ἐςιν ἐν 10 ϗ 15 ὁ 5.

Πρόβλημα Ζ΄.

177. Δυοῖν ἀριθμῶν δοθέντων τὸν μέγιςον κοινὸν ἀμφοῖν διαιρέτην προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Δίελε δὴ τὸν μείζω διὰ τȣ̃ ἐλάττονος, διὰ δὲ τȣ̃ λοιπȣ̃, ἐν μέρει σημειωθέντος, δίελε αὖ τὸν ἐλάττω· εἰ δὲ αὖ τι καταλειφθείη, διὰ τȣ́τȣ δίελε τὸν πρὸ τȣ̃ διαιρέτην, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· πάντων δὲ τῶν πη-

λίκων παραμελήσας, τὸν ἔσχατον διαιρέτην, ὃς λειψάνυ δίχα διαιρεῖ, ἕξεις κοινὸν ϗ μέγιστον διαιρέτην τῶν προτεθέντων ἀριθμῶν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ἐν τῷ $\frac{8}{24}$ ὁ 8, δίχα λειψάνυ διαιρῶν, ὁ μέγιστος κοινὸς τῦ τε 8 ϗ 24 διαιρέτης ὑπάρχει, ὡς δῆλον· ἐπὶ δὲ τῦ $\frac{12}{34}$, διαιρεθέντος 34 διὰ 12, καταλοίπυ μένοντος τῦ 10, δίελε αὖθις τὸν πρὸ τῦ διαιρέτην 12 διὰ τῦ λειψάνυ 10· ἐπεὶ δὲ λείπεται 2, δίελε πάλιν τὸν ἔσχατον διαιρέτην 10 διὰ 2· μηδενὸς δὲ λειπομένυ, ὁ ἔσχατος διαιρέτης 2 ἐςὶν ὁ κοινὸς ϗ μέγιστος διαιρέτης τῶν, 12, ϗ 34, ὃς ἐζητεῖτο. Τῷ ὄντι δὲ ὁ λειπόμενος 2 διαιρῶν ἄνευ λειψάνυ τὸν 10, διαιρήσει ὡσαύτως ϗ τὸν 12, ταὐτὸν εἰπεῖν τὸν 10 σὺν ἑαυτῷ· διαιρήσει ἄρα καταλοίπυ δίχα ϗ τὸν 10 σὺν δὶς τῷ 12, ὅ ἐςι τὸν 34.

Ἀλλ' ἔςαι γὰρ ὁ 2 μέγιστος κοινὸς τῦ 12 ϗ 34 διαιρέτης· ϗ γὰρ ὁ κοινὸς τῦ 12 ϗ 34 διαιρέτης ὀφείλει διαιρεῖν ἄνευ λειψάνυ ϗ τὴν διαφορὰν, ᾗ διαφέρυσιν ἀλλήλων ὁ 34 ϗ 12, εἴτ' ὖν τὸν 22· ὡσαύτως ὁ κοινὸς διαιρέτης τῦ 22 ϗ 12 ὀφείλει διαιρεῖν ϗ τὸν 10, διαφορὰν τῦ 22, ϗ 12· ὁ δὲ διαιρῶν τὸν 12, ϗ 10 ὀφείλει διαιρεῖν ϗ τὴν αὐτῶν διαφορὰν 2· ἀλλ' ὁ 2 ὐκ ἂν διαιρεθείη διὰ μείζονος ἄλλυ ἀριθμῦ, ἢ δι' ἑαυτῦ· ἄρα ὁ μέγιστος ϗ κοινὸς διαιρέτης τῦ 10 ϗ 2 ἐςὶν ὁ 2· ἐπεὶ δὲ 12 μὲν σύγκειται ἐκ 10 σὺν δύω· 34 δὲ ἐκ τρὶς 10 σὺν δὶς δύω· ἄρα ϗ τῦ 34, ϗ 12 κοινὸς ϗ μέγιστος διαιρέτης ἐςὶν ὁ 2.

178. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα διαιρῦντες ἀφικώμεθα ἐπὶ κατάλοιπον τὴν 1, συνάγειν προσήκει, ὡς ὐδεὶς παρὰ τὴν 1 εὑρίσκεται κοινὸς διαιρέτης τῶν προτεθέντων

ἀριθμῶν· ἐπὶ ἔν τοῦ $\frac{5}{9}$, διαιρεθεὶς διὰ 5 ὁ 9, καταλείπει 4, ὃς διελὼν τὸν 5, καταλείπει 1· ἔστιν ἄρα διαιρέτης κοινὸς τοῦ 5 καὶ 9 οὐδεὶς ἀλλ' ἡ 1.

Πρόβλημα Η'.

179. Κλάσμα ἀναγαγεῖν ἐφ' ὅσον ἔνεστιν ἁπλουστέραν ἔκθεσιν.

ΛΥΣΙΣ. α'. Ζήτησον τὸν μέγιστον καὶ κοινὸν τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ διαιρέτην (177)· β'. διὰ τούτου δίελε ἑκάτερον.

ΥΠΟΔΕΙΜΑ Α'. Κείσθω $\frac{14}{35}$, οὗ τῶν ὅρων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εὑρίσκεται ὁ 7, δι' οὗ διαιρεθέντες ἑκάτερος συνιστῶσι κλάσμα τὸ $\frac{2}{5}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐπὶ τοῦ $\frac{8}{64}$ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἐστὶν 8, δι' οὗ διαιρεθὲν τὸ κλάσμα συνίστησι τὸ $\frac{1}{8}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ $\frac{12}{34}$ ἐστὶν ὁ 2, δι' οὗ διαιρέσει προκύπτει $\frac{6}{17}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Οὕτω ποιοῦσι, α'. ὅ,τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος ἀποκατασταθήσονται ὅσον ἔνεστιν ἐλάχιστοι· β'. ἡ τοῦ κλάσματος δύναμις διαμενεῖ ἀμετακίνητος. Ο. Ε. Δ.

180. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ τῶν κλασμάτων ἐπὶ κοινὸν παρονομαστὴν ἀναγωγὴ οὐκ ἄντις εἴποι, ὅσης ἐστὶ χρήσεως, οὐδ' ὅσον ἐστὶ πρεργιαιτάτη τῇ τε προσθέσει, καὶ τῇ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσει, καὶ μὴν καὶ τῇ παραβολῇ τῶν κλασμάτων, ἀφ' ἧς, εἰ ἴσα εἰσὶ κλάσματα δύω, γινώσκεται· οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ τῷ εἰδέναι ἔτι δυεῖν κλασμάτων, ὁπότερον μέν ἐστι μεῖζον, ὁπότερον δ' ἔλαττον.

Πρόβλημα Θ΄.

181. *Δύω κλάσματα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀναγαγεῖν παρονομαςὴν σωζομένης τῆς δυνάμεως.*

ΛΥΣΙΣ. α΄. Πεπολλαπλασιάσθω ὅ,τε παρονομαςὴς, ϗ ὁ ἀριθμητὴς τȣ̃ πρώτȣ κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαςὴν τȣ̃ δευτέρȣ· β΄. πεπολλαπλασιάσθω ὅ,τε παρονομαςὴς ϗ ὁ ἀριθμητὴς τȣ̃ δευτέρȣ ἐπὶ τὸν ἐν τῷ πρώτῳ παρονομαςήν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κείσθω ἀναγαγεῖν ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$. Πολλαπλασιάζοντες ȣ̃ν τȣ̃ πρώτȣ τόν τε ἀριθμητὴν 2, ϗ τὸν 3 παρονομαςὴν, διὰ τȣ̃ κατὰ τὸ δεύτερον παρονομαςȣ̃ 7 ἕξομεν $\frac{14}{21}$· εἶθ' ȣ̃τω τὸν τȣ̃ δευτέρȣ ἀριθμητὴν 4, ϗ παρονομαςὴν 7 πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν τȣ̃ πρώτȣ παρονομαςὴν 3, λαμβάνομεν κλάσμα $\frac{12}{21}$ ἴσον τῷ δευτέρῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἑκατέρȣ γὰρ τῶν τȣ̃ κλάσματος ὅρων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὅς ἐςιν ὁ θατέρȣ παρονομαςὴς, πολλαπλασιασθέντος, ȣ̉δετέρȣ κλάσματος ἡ δύναμις κεκίνηται (142)· β΄. ὁ καινὸς ἑκατέρȣ παρονομαςὴς προκύπτων ἐκ τῶν πρὸ τȣ̃ δυοῖν παρονομαςῶν, ἀναγκαίως ὁ αὐτὸς ἔςαι (85). Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἵν' ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀναχθῶσι παρονομαςὴν τὰ $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, πολλαπλασιασθέντων τȣ̃ τε 3, ϗ 5 ἐπὶ 4, τὸ πρῶτον ἔςαι ἴσον τῷ $\frac{12}{20}$· πολλαπλασιασθέντων εἶτα τȣ̃ 1 ϗ 4 ἐπὶ 5 γενήσεται τὸ δεύτερον $\frac{5}{20}$.

182. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὡς εἴ τ' ἀνάπαλιν προκέοιτο κλάσματα δύω, οἷον $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀναγαγεῖν ἀριθμητὴν, δεήσει ἑκάτερον ὅρον τȣ̃ πρώτȣ πολλαπλασιάζειν ἐπὶ τὸν τȣ̃ δευτέρȣ ἀριθμητὴν, ὅθεν ἔςαι τὸ πρῶτον ἴσον $\frac{10}{15}$· εἶτα ἑκάτερον τῶν τȣ̃ δευ-

τέρου ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου, ἐξ οὗ ἔσαι τὸ δεύτερον ἴσον $\frac{10}{14}$.

Πρόβλημα Ι΄.

183. Δυοῖν κλασμάτων δοθέντων, ὧν θατέρου οἱ ὅροι μακρῷ διαφέροντές εἰσι τῶν τοῦ ἑτέρου, εὑρεῖν εἰ ταῦτα εἰλλήλοις ἰσοῦνται.

ΛΥΣΙΣ. Ἔσωσαν κλάσματα τὰ $\frac{19}{25}$ ϗ $\frac{380}{500}$, ϗ ἤχθω τὸ δεύτερον ἐφ᾽ ἁπλουσέραν ἔκθεσιν (179)· γενήσεται οὖν $\frac{19}{25}$· ἡ μέντοι ἐπιτομωτέρα ϗ γενικωτέρα ὁδός ἐσιν, ἀναγαγεῖν ἑκάτερον τῶν δοθέντων ἐπὶ κοινὸν ὄνομα (181)· οὕτως οὖν τῶν δοθέντων ἑκάτερον γενήσεται $\frac{9500}{12500}$, ἢ $\frac{95}{125}$, ὃ τὴν ἰσαλληλίαν ϗ μάλα προφανῶς δείκνυσι.

Πρόβλημα ΙΑ΄.

184. Δυοῖν διαφερόντων κλασμάτων προτεθέντων εὑρεῖν αὐτῶν τὸ μεῖζον.

ΛΥΣΙΣ. Ἔσωσαν κλάσματα τὰ $\frac{3}{4}$ ϗ $\frac{14}{18}$· δι᾽ ἀναγωγῆς οὖν ἐπὶ κοινὸν ὄνομα ἔσαι τὸ μὲν $\frac{3}{4}$ ἴσον τῷ $\frac{54}{72}$, τὸ δὲ $\frac{14}{18}$ ἴσον τῷ $\frac{56}{72}$· καταφανὲς τοίνυν, ὡς τὸ $\frac{14}{18}$ ὑπερέχει τοῦ $\frac{3}{4}$ τῷ $\frac{2}{72}$, ἢ τῷ $\frac{1}{36}$.

Πρόβλημα ΙΒ΄.

185. Πλείω κλάσματα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀναγαγεῖν παρονομασήν.

ΛΥΣΙΣ. Πεπολλαπλασιάσθω ὅ,τε ἀριθμητὴς ϗ ὁ παρονομασὴς ἑκάσου διὰ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῶν παρονομασῶν τῶν ἄλλων ἁπάντων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κείσθω ἀναγαγεῖν ἐπὶ τὸν αὐ-

τὸν παρονομαςὴν τὰ $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$ κλάσματα· πεπολλαπλασιάσθω δὴ ἐν τῷ πρώτῳ ὁ 1 ϗ 3 διὰ τȣ͂ 35, προκύπτοντος ἐκ τῶν κατὰ τ' ἄλλα δύω παρονομαςῶν 5 ϗ 7· ἔςαι ȣ͂ν τὸ πρῶτον $\frac{35}{105}$· πεπολλαπλασιάσθω εἶτα ἐν τῷ δευτέρῳ ὁ 2 ϗ 5 ἐπὶ 20, παραγόμενον ἐκ τῶν παρονομαςῶν 3, ϗ 7 τȣ͂ πρώτȣ ϗ τρίτȣ· ϗ ȣ̃τως ἔςαι τὸ δεύτερον $\frac{42}{105}$· τελευταῖον δὲ πεπολλαπλασιάσθω ἐν τῷ τρίτῳ ὁ 4 ϗ 5 ἐπὶ 15, προκύπτοντα ἐκ τῶν παρονομαςῶν τȣ͂ πρώτȣ ϗ δευτέρȣ· τοιγαρȣ͂ν ἔςαι τὸ τρίτον $\frac{60}{105}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ἑκάτερος ὅρος ἑκάςȣ ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἐπολλαπλασιάσθη ποσότητα, ἡ δύναμις ἄρα ȣ̓ μετακεκίνηται (142)· ἐπεὶ δὲ γέγονεν ἑκάςȣ κλάσματος παρονομαςὴς ὁ παραγόμενος ὑφ' ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν, ἔςαι ἄρα κοινὸς ἅπασι (87). Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἵν' ἐπὶ κοινὸν ἀναχθῶσιν ὄνομα τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, πεπολλαπλασιάσθω ἑκάςȣ ἑκάτερος ὅρος ἐπὶ τὸν προκύπτοντα ἐκ τῶν παρονομαςῶν τῶν ἄλλων· ϗ ȣ̃τως ἔσονται $\frac{160}{400}$, $\frac{200}{400}$, $\frac{300}{400}$, $\frac{280}{400}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ προσθέσεως τῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα.

186. Συνάπτειν κλάσματα δοθέντα.

Ἤχθωσαν ἅπαντα ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν, ϗ τῶν ἀριθμητῶν συναφθέντων, ὑπογεγράφθω αὐτοῖς ὁ κοινὸς παρονομαςής.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἔςων $\frac{2}{3}$ ὀργυιᾶς, καὶ $\frac{5}{7}$ ἑτέ-

ρας· πόσον ἄρ' ἐστιν αὐτῶν τὸ ἄθροισμα; ἀχθέντα οὖν ἐπὶ κοινὸν ὄνομα τὰ κλάσματα γενήσονται $\frac{14}{21}$ καὶ $\frac{15}{21}$· συναφθέντων δὲ τῶν ἐν αὐτοῖς ἀριθμητῶν· ἔσαι ἄθροισμα $\frac{29}{21}$, ἢ ὀργυιὰ μία καὶ $\frac{8}{21}$ (146).

ΔΕΙΞΙΣ. $\frac{2}{3}$ ἐστὶν ἴσον τῷ $\frac{14}{21}$, καὶ $\frac{5}{7}$ ἴσον τῷ $\frac{15}{21}$ (181)· δῆλον ἄρα ὅτι 14 τῶν ἑνὸς καὶ εἴκοσι, καὶ 15 τῶν ἑνὸς καὶ εἴκοσι ποιοῦσιν 29 τῶν 21. Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Κλασμάτων τῶν $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, ζητεῖται τὸ ἄθροισμα· ἀναγωγῆς οὖν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὄνομα γενομένης, τραπήσονται εἰς $\frac{45}{60}$, $\frac{20}{60}$, $\frac{24}{60}$· τῶν δ' ἀριθμητῶν συναφθέντων, ἔσαι τῶν τριῶν τὸ ἄθροισμα $\frac{69}{60}$, ἢ 1 σὺν $\frac{9}{60}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Πόσον ποιοῦσι $5\frac{1}{2}$ πήχεις καὶ $6\frac{3}{4}$· οἱ λοχερεῖς 5 καὶ 6 ποιοῦσιν 11· τὸ δ' ἄθροισμα τοῦ $\frac{1}{2}$, καὶ $\frac{3}{4}$ (186) ἐστι $\frac{10}{8}$, ἢ 1 καὶ $\frac{1}{4}$· τὸ ἄρα ζητούμενον ἄθροισμά ἐστι 12 πήχεις καὶ $\frac{1}{4}$.

187. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἔστωσαν τὰ $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ κλάσματα, ἃ συναφθῆναι ζητεῖται· συνιδὼν οὖν, ὡς ὁ μείζων παρονομαστὴς 12, διαιρεθεὶς δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων, παρέχεται ἄνευ καταλοίπου πηλίκον, πολὺ τοῦ τῆς πράξεως πόνου ὑφελέσθαι δύναμαι, πολλαπλασιάζων τόν τε ἀριθμητὴν, καὶ τὸν παρονομαστὴν ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον ἐκεῖνο· 12 οὖν διαιρεθεὶς διὰ τοῦ 4, πρώτου παρονομαστοῦ, παράγει πηλίκον 3, ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθέντων τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου κλάσματος, γενήσεται $\frac{3}{12}$, 12 δε πάλιν διαιρεθεὶς διὰ τοῦ κατὰ τὸ δεύτερον παρονομαστοῦ 3 δίδωσι 4 ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθέντες ὁ 2 καὶ 3 ποιοῦσι τὸ δεύτερον κλάσμα $\frac{8}{12}$· 12 δὲ αὖθις διαιρεθεὶς δι' 6 προάγει 2, ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθέντες ὅ,τε 5 καὶ 6,

τὸ τρίτον κλάσμα μεταμορφοῦσιν εἰς $\frac{10}{12}$. Τὸ οὖν ἄθροισμα τῶν τεσσάρων κλασμάτων ἔσται $\frac{28}{12}$, ἢ 2 ϗ $\frac{1}{3}$· ἀλλ' ἐργασαμένοις γὰρ κατὰ τὴν γενικὴν θεωρίαν ἔσται $\frac{216}{864}$ σὺν $\frac{576}{864}$ σὺν $\frac{720}{864}$ σὺν $\frac{504}{864}$· τὸ δ' ἄθροισμα $\frac{2016}{864}$, ὅπερ ϗ αὐτὸ ἰσοδυναμήσει τῷ 2 ϗ $\frac{1}{3}$ (146, ϗ 179).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα Α΄.

188. Ἀφαιρεῖν ἀπ' ἀλλήλων κλάσματα δοθέντα.

ΛΥΣΙΣ. Τῆς πράξεως ταύτης ἐναντίως ἐχούσης τῇ προτέρᾳ, τῶν κλασμάτων ἐπὶ κοινὸν ἀναχθέντων παρονομαστήν, τὸν ἀριθμητὴν θατέρου ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφαιρετέον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἐργάτης τις μισθῷ συνθέμενος δύω τρίτα ἔργου τινὸς ἐργάσασθαι, ἔλαβεν ἐργασάμενος αὐτοῦ 5 ἕκτα· πόσων οὖν μερῶν τοῦ ἔργου ἐπιπροσθεῖναι αὐτῷ μισθὸν προσήκει; ἢ τῆς ὑπεροχῆς τῶν $\frac{5}{6}$ ὑπὲρ τὰ $\frac{2}{3}$, ἵν' οὖν ἀφέλωμεν $\frac{2}{3}$ ἀπὸ $\frac{5}{6}$, ἀναγωγῇ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα μετασχηματίζοντες αὐτὰ εἰς $\frac{12}{18}$ ϗ $\frac{15}{18}$, ἀφαιρήσομεν ἀπὸ 15 τὸν 12· τὸ δὲ κατάλοιπον ἐστι $\frac{3}{18}$, ἢ $\frac{1}{6}$ (179) τοῦ ἔργου, ὑπὲρ οὗ ἀνάγκη μισθὸν ἔτι τῷ ἐργάτῃ τελέσαι.

ΔΕΙΞΙΣ. $\frac{2}{3}$ ϗ $\frac{5}{6}$ ἰσοδυναμοῦσι πάντως τοῖς $\frac{12}{18}$, $\frac{15}{18}$ (181)· σαφὲς ἄρα, ὅτι 15 δεκαοκτημόρια πλὴν 12 δεκαοκτημορίων ἰσοῦνται δεκαοκτημορίοις $\frac{3}{18}$. Ο. Ε. Π. ϗ Δ.

189. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἵνα δ' ἀφέλωμεν κλάσμα τὸ $\frac{3}{5}$ ἀπὸ ὅλου τοῦ 8, λαμβάνομεν μονάδα ἐκ τοῦ ὅλου, ἣν ἀνά-

γοντες εἰς πέμπτα, οἷον $\frac{5}{5}$ (170), ἀφαιροῦμεν τὸν 3 ἀριθμητὴν ἀπὸ τοῦ 5 ἀριθμητοῦ, λειπομένων $\frac{2}{5}$· ἄρα ἐστὶν ὅλη ἡ διαφορὰ 7 καὶ $\frac{2}{5}$, ὡς καὶ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον· ἐντεῦθεν ἄρα κατάδηλον, ὡς ὅτε κλάσμα, οἷον τὸ $\frac{4}{5}$, ὃ πρόκειται ἀφελεῖν ἀπ' ἄλλου, οἷον τὸ $6\frac{1}{2}$, εἴη μεῖζον τοῦ $\frac{1}{2}$, ἀφ' οὗ γενήσεται ἡ ἀφαίρεσις, ἀγαγόντες ἀμφότερα ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, εἴτ' οὖν μεταποιήσαντες εἰς $\frac{8}{10}$, καὶ $\frac{5}{10}$, δανειζόμεθα μονάδα ἐκ τοῦ ὁλοσχεροῦς, εἴτ' οὖν $\frac{10}{10}$, ἔπειτα ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ $\frac{10}{10}$ καὶ $\frac{5}{10}$, εἴτ' οὖν τοῦ $\frac{15}{10}$, ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{8}{10}$, καὶ οὕτως εὑρήσομεν τὴν ὅλην διαφορὰν οὖσαν $5\frac{7}{10}$.

Πρόβλημα Β'.

190. Στρατός τις συνέκειτο ἐκ στρατιωτῶν 90000, οὗ τὸ μὲν δέκατον ὅπλων ἐγένετο ἔργον, δύω δ' ἔννατα αἰχμαλωσίᾳ ὑπέπεσεν, ἓν δὲ πέμπτον εἰς φυγὴν ἐτράπετο· πόσος ἆρ' ἐστὶν ὁ τῶν καταλειφθέντων στρατιωτῶν ἀριθμός;

Ἤχθωσαν τὰ τρία κλάσματα $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{5}$ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, καὶ συνήφθωσαν ἀλλήλοις αὐτῶν οἱ ἀριθμηταί· ἔσται ἄρα ὁ παντοίως ἀπολωλὼς στρατὸς $\frac{235}{450}$· δίκην δὲ μονάδος ἐκληφθεὶς ὁ στρατὸς ἰσοῦται τῷ $\frac{450}{450}$· οὐκοῦν ἀφῃρήσθω ὁ ἀριθμητὴς 235 ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ 450· ἔστιν ἄρα τὸ λειφθὲν τοῦ στρατοῦ τὰ $\frac{215}{450}$· ἀλλὰ γὰρ οἱ στρατιῶται ὥσπερ εἶδός τι ἔλαττον ὑπάρχουσι πρός γε τὴν μονάδα, ἣ ἐξελήφθη ἐνταῦθα στρατός· ἀναχθήσεται ἄρα ὁ 215 εἰς τόδε τὸ ἔλαττον εἶδος, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 90000. Τοῦ δὲ προκύπτοντος 19350000 διὰ 450 διαιρεθέντος (146) τὸ πηλίκον 43000 δηλώσει τὸν ἀριθμὸν τῶν καταλειφθέντων στρατιωτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ Πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα Α΄.

191. *Κλασματίαν ἀριθμὸν ἐφ' ὁλοχερῆ πολλαπλασιάσαι.*

ΛΥΣΙΣ. *Πολλαπλασίασον ἐπὶ τὸν ὁλοχερῆ τὸν τȣ̃ κλάσματος ἀριθμητὴν, ἐάσας αὐτῷ τὸν οἰκεῖον αὐτȣ̃ παρονομαςήν.*

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. *Ὠνήσατό τις 8 πήχεις ὑφάσματος $\frac{3}{4}$ γροσίȣ τὸν πῆχυν· πόσον ἆρα καταβαλεῖ; ἢ ὀκτάκις $\frac{3}{4}$ γροσίȣ· πολλαπλασιασθέντος ȣ̃ν 3 ἐπὶ 8 καὶ γραφέντος $\frac{24}{4}$, δῆλον ὅτι καταβαλεῖ 6 γρόσια.*

ΔΕΙΞΙΣ. *Πολλαπλασιάσαι $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 8, λαβεῖν ἐςιν ὀκτάκις $\frac{3}{4}$ (72)· τρία ἄρα τέταρτα, ὀκτάκις ληφθέντα, παράγȣσιν 24 τέταρτα· ὀρθῶς ἄρα πεπολλαπλασίαςαι μὲν ὁ 3 διὰ 8, ἀπεδόθη δὲ τῷ προκύπτοντι παρονομαςὴς ὁ 4.* Ο. Ε. Π. ϗ Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. *Ἀπεδόθη μοι κεφάλαιόν τι χρημάτων σὺν ἐτησίῳ τόκῳ, ληφθέντι κατὰ λόγον τῶν 5 πρὸς 100· συναμφότερα δὲ εὑρέθησαν γρόσια 8400. Πόσον ἦν ἄρα τὸ κεφάλαιον;*

ΛΥΣΙΣ. *Τȣ̃ 5 ὄντος $\frac{1}{20}$ τῶν 100, ὁ ἐνιάυσιος τόκος ἔςαι $\frac{1}{20}$ τȣ̃ κεφαλαίȣ· ϗ δὴ $\frac{1}{21}$ τȣ̃ τόκȣ συνάμα τῷ κεφαλαίῳ (144)· ἔςαι ἄρα τȣ̃ ἀθροίσματος 8400 τὸ $\frac{1}{21}$ ὁ ζητȣμενος τόκος· πεπολλαπλασιάσθω τοίνυν $\frac{1}{21}$ ἐπὶ 8400, ὅθεν ἔςαι $\frac{8400}{21}$ (191), εἴτ' ȣ̃ν γρόσια 400 (146)· ὁ μὲν ἄρα τόκος ἐςὶν ἀργύρια 400, τὸ δέ τοι κεφάλαιον 8000.*

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἀπ' ἀθροίσματος, ὅτις ἀποτίσαι ἠθέλετο, ἀφελὼν κατὰ λόγον 4 πρὸς 100, ἀπέτισε γρόσια 4320· πόσον ἆρ' ἦν τὸ ὅλον ἄθροισμα; ὁ 4 ὑπὲρ τῶν 100 εἴτ' οὖν τὸ $\frac{1}{25}$ τοῦ ὅλου ἀθροίσματος, ἀφαιρεθὲν, ἐποίησε τὸ ἄθροισμα 4320· ἔστιν ἄρα τὸ ἀφαιρεθὲν $\frac{1}{24}$ τοῦ καταλειφθέντος, εἴτ' οὖν τοῦ 4320 (144)· Τοιγαροῦν πεπολλαπλασιάσθω $\frac{1}{24}$ διὰ 4320, ὅθεν προκύψει $\frac{4320}{24}$, εἴτ' οὖν 180, ὃς προστεθεὶς τῷ 4320 ἀποδίδωσι τὸ ὅλον 4500, ὅπερ ἔδει ἀποτίσαι.

Πρόβλημα Β'.

192. Ὁλοχερῆ, οἷον τὸν 8, ἐπὶ κλασματίαν, οἷον τὸν $\frac{3}{4}$, πολλαπλασιάσαι.

ΛΥΣΙΣ. Πεπολλαπλασιάσθω, ὡς καὶ πρότερον, τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 8.

ΔΕΙΞΙΣ. Πολλαπλασιάσαι 8 ἐπὶ $\frac{3}{4}$, λαβεῖν ἐστι τοῦ 8 τὰ $\frac{3}{4}$ (72), ἢ τὸ τέταρτον τοῦ τρὶς 8, ἢ τοῦ ὀκτάκις 3 (85), ὃ περιέσται πολλαπλασιάσασι τὸν τοῦ κλάσματος ἀριθμητὴν 3 διὰ τοῦ ὁλοχεροῦς 8, καὶ λαβοῦσι τοῦ προκύπτοντος τὸ τέταρτον· ἔσται τοίνυν $\frac{24}{4}$, ὅ ἐστιν 6, ὡς ὅτε καὶ τὸ $\frac{3}{4}$ κλάσμα ἐπῆκται ἐπὶ τὸν 8 ὁλοχερῆ. Ο. Ε. Δ.

193. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἰ προτεθείη πολλαπλασιάσαι κλάσμα ἐφ' ὁλοχερῆ, ἢ καὶ ἀντιστρόφως, ἀδιάφορον ἔσται, ὅπερ καὶ περὶ τῶν ὁλοχερῶν εἴρηται, ὁπότερον τῶν δυοῖν ἀριθμῶν εἰς πολλαπλασιαστὴν θῶμεν.

194. ΣΧΟΛΙΟΝ. Πολλαπλασιάσαι ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{1}{2}$, λαβεῖν ἐστι τοῦ ἀριθμοῦ τοῦδε τὸ ἥμισυ, τουτέστι διελεῖν διὰ 2· πολλαπλασιάσαι δὲ διὰ $\frac{1}{3}$, λαβεῖν ἐστιν αὐτοῦ τὸ τρίτον μέρος, ὃ ταυτόν ἐστι, διελεῖν διὰ 3, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως. Τὸ ἄρα προκύπτον ἐκ, φέρ' εἰπεῖν, 45 γροσ. καὶ $\frac{1}{2}$, τὸ

ἥμισύ ἐςι τȣ̃ 45, τȣτὸν εἰπεῖν, 45 διαιρεθεὶς διὰ 2· ὅθεν πρόεισι 22 γρόσια ϗ 20 παράδαι.

Πρόβλημα Γ΄.

195. Κλάσμα ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάσαι.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασίασον ἀριθμητὴν ἐπ' ἀριθμητὴν, ϗ παρονομαςὴν ἐπὶ παρονομαςὴν θατέρȣ διὰ τῶν τȣ̃ ἑτέρȣ· ϗ σημείωσον τὴν διαίρεσιν τȣ̃ πρώτȣ προκύπτοντος διὰ τȣ̃ δευτέρȣ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ὅλον τι οἰκοδόμημα ἀναβαλλόμενος οἰκοδόμος τις, ᾠκοδόμησε κατὰ μῆκος μὲν $\frac{4}{5}$, κατὰ πλάτος δὲ $\frac{2}{3}$· πόσον ȣ̓̃ν τȣ̃ μισθȣ̃ ἀπενέγκασθαι ἄξιος; τȣτὶ δηλώσει ὁ γινόμενος ἐκ $\frac{4}{5}$, ϗ $\frac{2}{3}$· πολλαπλασιασθεὶς ȣ̓̃ν ὁ 4 ἀριθμητὴς διὰ τȣ̃ 2, παράγει 8· ὁ δὲ 5 παρονομαςὴς διὰ τȣ̃ 3, προάγει 15· λήψεται ȣ̓̃ν τȣ̃ μισθȣ̃ τὸ $\frac{8}{15}$, ὅσον ἀμέλει ϗ τȣ̃ ἔργȣ ἐξήνυςαι.

ΔΕΙΞΙΣ. Πολλαπλασιάσαι $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$, λαβεῖν ἐςι τὸν $\frac{4}{5}$, ὁσάκις ἔνεςι τῷ $\frac{2}{3}$ ἡ μονὰς (72)· ἀλλὰ τῷ $\frac{2}{3}$ ἔνεςι τῆς μονάδος δύω τριτημόρια· ληπτέον ἄρα τȣ̃ $\frac{4}{5}$ τὰ δύω τριτημόρια, μᾶλλον δὲ ληπτέον δὶς ἓν τριτημόριον τȣ̃ $\frac{4}{5}$· ἐὰν ȣ̓̃ν ὁ παρονομαςὴς 5 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3, δῆλον, ὅτι τὸ κλάσμα ὑποτριπλασιάζεται· ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὸς 4 ἐπὶ 2, δῆλον ὅτι λαμβάνονται 2 τῶν ὑποτριπλασίων μερῶν· ἄρα ἀναγκαίως ἀριθμητὴς ἐπὶ ἀριθμητὴν, ϗ παρονομαςὴς ἐπὶ παρονομαςὴν, πολλαπλασιασθήσεται· ἔςι γὰρ δήπȣ ὁ $\frac{8}{15}$ δύω τριτημόρια τȣ̃ $\frac{4}{5}$, ὥσπερ $\frac{4}{15}$ ἐςὶν ἓν τριτημόριον τȣ̃ $\frac{4}{5}$. Ο. Ε. Δ.

Πρόβλημα Δ΄.

196. Πλείω ἑξῆς κλάσματα πολλαπλασιάσαι.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασίασον ἅπαντας τὲς ἀριθμητὰς, εἶθ' ἅπαντας τὲς παρονομαςὰς, ϗ σημείωσον τὴν διαίρεσιν τῦ πρώτυ διὰ τῦ δευτέρυ γινομένυ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Διαςήματός τινος μετρυμένυ, τὸ μὲν μῆκος αὐτῦ εὕρηται ὀργιᾶς $\frac{3}{4}$, τὸ δὲ πλάτος $\frac{2}{7}$, τὸ δὲ ὕψος $\frac{5}{8}$. ποςημόριον ἆρα ὑπάρχει ἅπαν τὸ διάςημα κυβικῆς ὀργιᾶς; Πολλαπλασίασον $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{8}$ λέγων· δὶς 3 ποιῦσι 6, ἑξάκις 5 ποιῦσι 30· εἶτα, τετράκις 7 ποιῦσι 28, 28κις 8 ποιῦσι 224· ἔςιν ἄρα τὸ ζητύμενον ὀργιᾶς κυβικῆς $\frac{30}{224}$.

197. ΣΧΟΛΙΟΝ. Βυλόμενος δὲ εἰδέναι ὅσον δύναται κυβικῆς ὀργιᾶς τὸ $\frac{30}{224}$· πολλαπλασίασον 30 διὰ 373248 (156), ὅθεν παράγονται δάκτυλοι κυβικοὶ 11197440, ὅς περ, διαιρεθεὶς διὰ 224, παρέξει τὸ περιεχόμενον, ἢ τὸ ςερεὸν, ὃ ζητεῖται, δακτύλων ὅτι ἔγγιςα 49988.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςι γὰρ ὁ ἐκ $\frac{3}{4}$, ϗ $\frac{2}{7}$ γινόμενος $\frac{6}{28}$ (195)· τῦτον δὲ δῆλον ὡς ἐκ ἄλλως, ἢ κατὰ τὰ ὁροθετηθέντα, πολλαπλασιάσαι δεῖ ἐπὶ $\frac{5}{8}$· ὅθεν προκύπτει $\frac{30}{224}$.

198. ΟΡΙΣΜΟΣ. Κλάσμα κλάσματος ὀνομάζεται τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{4}{5}$, ἢ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{3}{5}$ κτ., ὡς εἰ εἴποιμεν $\frac{2}{10}$ τῦ $\frac{1}{4}$ τῦ γροσίυ κτ. $\frac{1}{4}$ γὰρ γροσίυ ἐςὶν ἓν δεκάριον· δεκαρίυ δὲ δύω δέκατά εἰσι παράδαι δύω· ὅταν ἦν λέγωμεν $\frac{2}{10}$ τῦ $\frac{1}{4}$ γροσίυ, τὸ τοιόνδε καλεῖται Κλάσμα κλάσματος· ἵν' ὖν ὁρισθῇ ἡ δύναμις τῶν κλασμάτων τῦδε τῦ εἴδυς, εἰς χρῆσιν ἥκει ὁ πολλαπλασιασμός.

Πρόβλημα Ε'.

199. Διορίσαι τὴν δύναμιν τῦ κατὰ τὸ κλάσμα κλάσματος.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασίασον θάτερον ἐπὶ θάτερον τὰ κλάσματα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἡ τοῦ Ἀντωνίου περιουσία ὤφειλε διανεμηθῆναι κληρονόμοις πέντε ἑαυτοῦ υἱέσιν, ὧν εἷς, ἀγοράσας τὸ δυοῖν ἑτέρων μέρος, κληροῦται ἐν δίκῃ τῆς περιουσίας $\frac{3}{5}$· ἀλλ' αὐτὸς οὗτος ἀφίησι θανὼν υἱεῖς 4· ποσημόριον οὖν ἀποδοθήσεται ἑκάστῳ; ἢ τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν $\frac{3}{5}$· πολλαπλασίασον $\frac{3}{5}$ διὰ $\frac{1}{4}$, καὶ τὸ προκύπτον ἐμφανεῖ σοι τὸ ἐπανῆκον ἑκάστῳ μέρος, εἴτ' οὖν $\frac{3}{20}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Λαβεῖν τὸ τέταρτον τῶν $\frac{3}{5}$, λαβεῖν ἐστι $\frac{3}{5}$ τεταρτημοριάκις, εἰ τοῦτο θέμις εἰπεῖν· ἔστι δὲ τοῦτο πολλαπλασιάσαι $\frac{3}{5}$ ἐπὶ $\frac{1}{4}$. Ο.Ε.Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Πέτρος, Ἰάκωβος, καὶ Ἰωάννης ἐκτήσαντο ὁμοῦ γρόσια 35000· ὁ μὲν Πέτρος ἐδωρήσατο τῷ Παύλῳ τῆς κτήσεως ταύτης τὸ ἥμισυ· ὁ δ' αὖθις Ἀθανασίῳ ἐδωρήσατο τοῦ ἡμίσεως τὰ $\frac{3}{4}$· πόσα ἄρα γρόσια ἀπονεμηθήσονται Ἀθανασίῳ; ἢ τρία τέταρτα ἡμιτριτημορίου τῶν ῥηθέντων γροσίων· πολλαπλασίασον τοίνυν $\frac{1}{3}$ διὰ $\frac{1}{2}$, τὸ δ' ἐκ τούτων διὰ $\frac{3}{4}$, ὅθεν ἕξεισι $\frac{3}{24}$, ἢ $\frac{1}{8}$ (179)· ἀπονεμηθήσεται ἄρα τῷ Ἀθανασίῳ $\frac{35000}{8}$, ἢ γρόσια 4375.

Πρόβλημα ς΄.

200. Πολλαπλασιάσαι ὁλοχερῆ σὺν κλάσματι ἐφ' ὁλοχερῆ, ἢ ὁλοχερῆ σὺν κλάσματι ἐπὶ κλάσμα.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασίασον ἑξῆς τὸν ὁλοχερῆ καὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Πόσου τιμῶνται 8 πήχεις καὶ $\frac{3}{4}$, 5 γροσίων τιμωμένου ἑκάστου πήχεως; 8, πολλαπλασιαθεὶς ἐπὶ 5, δίδωσι γρόσια 40· $\frac{3}{4}$, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 5, παρέχεται $\frac{15}{4}$ (191), ἢ γρόσια 3 καὶ $\frac{3}{4}$· τὸ δ' ὁλικὸν προκύπτον, 43 γρόσια καὶ $\frac{3}{4}$, ἢ 43 γρόσια καὶ παράδαι 30.

ΔΕΙΞΙΣ. Οὕτω γὰρ ποιοῦσι τοσάκις λαμβάνεται ὁ πολλαπλασιαστέος, ὁσάκις ἔνεστι 1 τῷ πολλαπλασιάζοντι (72). Ο.Ε.Δ.

Πρόβλημα Ζ΄.

201. Πολλαπλασιάσαι ὁλοσχερῆ σὺν κλάσματι ἐφ' ὁλοσχερῆ σὺν κλάσματι.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασίασον πρῶτον ἅπαντα τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν ὁλοσχερῆ πολλαπλασιαστήν· εἶτα ἐξ ὑπαρχῆς, ἅπαντα τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· δεῖξις δὲ ἡ αὐτὴ τῇ προτέρᾳ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Πόση ἐστὶν ἡ περιοχὴ κήπου, οὗ μῆκος μὲν ὀργυιαὶ 6 ϗ $\frac{5}{7}$, πλάτος δὲ 4 ϗ $\frac{2}{3}$; Πολλαπλασίασον τὸν 6 σὺν $\frac{5}{7}$ ἐπὶ 4, ἐξ οὗ προκύψει 24 σὺν $\frac{20}{7}$· εἶτα δὲ 6 σὺν $\frac{5}{7}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$, ἐξ οὗ πρόεισι $\frac{12}{3}$, ἢ 4 σὺν $\frac{10}{21}$· τὰ δὲ δύω κλάσματα $\frac{20}{7}$ ϗ $\frac{10}{21}$ ἀνήχθων ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, προστεθέντα δὲ ἀποδώσουσι $\frac{490}{147}$, ἢ 3 σὺν $\frac{49}{147}$· τὸ ὁλικὸν προκύπτον, εἴτ' οὖν τὸ τοῦ κήπου ἐμβαδὸν, ἔσται 31 ὀργυιαὶ τετραγωνικαὶ ϗ $\frac{49}{147}$.

202. ΣΧΟΛΙΟΝ. Πολὺ δὲ τοῦ ἔργου ὑποτμηθήσεται, ἀναχθέντων ἐπὶ κλάσματος σχῆμα τοῦ τε πολλαπλασιαστέου, ϗ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὡς ἐν τοῖς ἐχομένοις ὑποδείγμασι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Εἰδέναι τις βούλεται, πόσους φακέλλους ὑφασμάτων, ὧν ἕκαστος κυβικῷ ποδὶ ἴσος, δύναται ἐνθεῖναι οἰκίσκῳ, οὗ 10 μὲν ὀργυιαὶ ϗ $\frac{1}{5}$ τὸ μῆκος, 6 δὲ ϗ $\frac{2}{7}$ τὸ πλάτος, 2 δὲ ϗ $\frac{3}{5}$ τὸ ὕψος;

α΄. Ζήτησον τὴν τοῦ ἐδάφους ἐπιφάνειαν, ἀνάγων τὸ μὲν μῆκος εἰς $\frac{1}{5}$, εἴτ' οὖν $\frac{51}{5}$, τὸ δὲ πλάτος εἰς $\frac{1}{7}$, ὅ ἐστι $\frac{44}{7}$· ϗ $\frac{51}{5}$ ἐπὶ $\frac{44}{7}$ πολλαπλασιάζων. Ὁ οὖν προκύπτων $\frac{2244}{35}$

τετραγωνικῆς ὀργυιᾶς (153) ἐμφανεῖ τὴν τῆ ἐδάφȣς ἐπιφάνειαν· τελευταῖον δὲ τὸ ὕψος ἀνήχθω ἐπὶ $\frac{1}{6}$, εἴτ' ὖν γενέσθω $\frac{13}{6}$, ϗ τῆ κλάσματος $\frac{2324}{36}$ ἐπιπολλαπλασιασθέντος ἐπὶ $\frac{13}{6}$, ὁ προκύπτων $\frac{30212}{216}$ ἐμφανεῖ κυβικὰς ὀργυιάς· οἱ δὲ δι' ἀναγωγῆς (171) προϊόντες κυβικοὶ πόδες 36006, ἐκδηλῆσι τὸν τῶν φακέλων ἀριθμὸν, ὓς ἂν τῷ οἰκίσκῳ ἐγκατάθειτο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα Α΄.

203. Κλάσμα δι' ὁλοχερῆς διελεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασίασον τὸν τῆ κλάσματος παρονομαςὴν ἐπὶ τὸν ὁλοχερῆ, ἐῶν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Διαιρῶν ὖν $\frac{2}{3}$ διὰ 4, λέγε, τρὶς 4 ποιῆσι 12· ϗ ὕτω γράψον $\frac{2}{12}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Διαιρεῖν $\frac{2}{3}$ διὰ 4 ζητεῖν ἐςι ποσάκις ὁ 4 ἐμπεριέχεται τῷ $\frac{2}{3}$ (104). Τῆς 1 ὖν δύω τριτημορίων ἐμπεριεχομένων τῷ $\frac{2}{3}$, ὁ 4, περιέχων μονάδας τέσσαρας, ἑκάςης διαιρȣμένης εἰς μέρη τρία, περιέξει μέρη αὐτῆς 12· δύω ὖν τῶν δώδεκα, εἰς ἃ διήρηται ὁ 4, ἐμπεριέχονται τῷ $\frac{2}{3}$, εἴτ' ὖν $\frac{2}{12}$· ὀρθῶς ἄρα πεπολλαπλασίαςαι ὁ 3 παρονομαςὴς ἐπὶ τὸν 4 ὁλοχερῆ, μείναντος τῆ αὐτῆ ἀριθμητῆ 2.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅτε ὁ τῆ κλάσματος ἀριθμητὴς ἀκριβῶς διαιρεθῆναι ἔχει δι' ὁλοχερῆς, ἡ διαίρεσις ἁπλȣςέρα

ἀποτελεῖται, ἢ ὅτε πολλαπλασιάζεται ὁ παρονομαστὴς· ἵν' οὖν διαιρεθῇ $\frac{6}{7}$ διὰ 3, διαιρέσει τοῦ 6 διὰ 3 ἔσται $\frac{2}{7}$.

Πρόβλημα Β΄.

204. Κλάσμα διὰ κλάσματος διελεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Τοῦ διαιρέτου ἀντιστραφέντος, πολλαπλασίασον δι' αὐτοῦ τὸν διαιρετέον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω διελεῖν $\frac{4}{5}$ διὰ $\frac{2}{3}$· ἀντὶ οὖν $\frac{2}{3}$ γεγονότος $\frac{3}{2}$, δι' αὐτοῦ πολλαπλασιασθήτω $\frac{4}{5}$· τὸ δὲ προκύπτον $\frac{12}{10}$, ἢ $1\frac{1}{5}$ (146) ἔσται τὸ ζητούμενον πηλίκον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ποσάκις ἔνεστι $\frac{2}{3}$ τῷ $\frac{4}{5}$ (104); τῆς οὖν μονάδος ἐνόντων αὐτῷ τεσσάρων πεμπτημορίων, τὸ $\frac{1}{3}$, ὑποτριπλάσιον ὂν τῆς μονάδος, τρὶς μᾶλλον ἐνέσται τῷ $\frac{4}{5}$, ἢ ὁσάκις ἔνεστιν ἡ μονάς· τρὶς οὖν 4 πέμπτα ἀποτελοῦσι πέμπτα 12, ἢ $\frac{12}{5}$ ὀρθῶς ἄρα πολλαπλασιάζεται ὁ τοῦ διαιρετέου ἀριθμητὴς, οἷον ὁ 4 ἐπὶ τὸν τοῦ διαιρέτου παρονομαστὴν, οἷον τὸν 3· ἀλλ' εἴπερ $\frac{1}{3}$ ἔνεστι δώδεκα πεμπτημοριάκις τῷ $\frac{4}{5}$· $\frac{2}{3}$ πάντως ἐνέσονται αὐτῷ ἐξ ἡμισείας· ὀρθῶς ἄρα $\frac{12}{5}$ διῄρηται διὰ τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην ἀριθμητοῦ, οἷον τοῦ 2, ὅπερ γίνεται, εἰ ὁ παρονομαστὴς 5 (203) τοῦ $\frac{12}{5}$, εἴτ' οὖν τοῦ διαιρετέου, πολλαπλασιασθήσεται διὰ τοῦ 2 ἀριθμητοῦ τοῦ $\frac{2}{3}$ διαιρέτου· ἐντεῦθεν διανοησόμεθα οὕτω· κλάσμα διαιρεθήσεται δι' ἑτέρου κλάσματος, πολλαπλασιάσασι πρῶτον τὸν τοῦ διαιρετέου ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν τοῦ διαιρέτου παρονομαστήν· εἶτα τὸν τοῦ διαιρετέου παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρέτου· ὃ δὴ ταὐτόν ἐστιν, εἰ τὸν διαιρέτην ἀναστρέψαντες τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκτελέσομεν· σαφέστερον δὲ γενήσεται τὸ λεγόμενον, εἰ λάβωμεν διαιρετέον μὲν τὸν $\frac{1}{4}$, διαιρέτην δὲ τὸ $\frac{1}{2}$· τὸ γὰρ πηλίκον ἐνυπάρχειν ἀνάγκη τῷ διαιρετέῳ, ὁσάκις

ἡ μονὰς τῷ διαιρέτῃ· ἔνεσι δὲ τῷ διαιρέτῃ τῆς μονάδος τὸ ἥμισυ· τὸ ἄρα ἥμισυ τȣ͂ πηλίκȣ ϗ τῷ $\frac{1}{4}$ ἐνέςαι, τἀυτὸν εἰπεῖν, ὁ διαιρετέος διπλάσιος ἔςαι τȣ͂ πηλίκȣ· εἰσὶ δὲ $\frac{2}{4}$ διπλȣ͂ν τȣ͂ $\frac{1}{4}$, ὡς δῆλον· ἄρα ϗ τὸ πηλίκον ἀνάγκη εἶναι $\frac{2}{4}$· γίνεται δὲ $\frac{2}{4}$, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν $\frac{1}{4}$ ἐπὶ $\frac{2}{1}$· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Πρόβλημα Γ΄.

205. Διελεῖν ὁλοχερῆ, οἷον τὸν 8, διὰ κλάσματος, οἷον τȣ͂ $\frac{3}{4}$.

ΛΥΣΙΣ. Ἐσχηματίσθω ὁ 8 ὅτω $\frac{8}{1}$, ϗ πεπολλαπλασιάσθω $\frac{8}{1}$ ἐπὶ $\frac{4}{3}$ (204), ἔςαι ȣ͂ν $\frac{32}{3}$ ἢ $10\frac{2}{3}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπείπερ ὁ 8 ἐκτέθειται ἐν σχήματι κλάσματος ὅτω $\frac{8}{1}$, μηδόλως μετακινηθείσης αὐτȣ͂ τῆς δυνάμεως· κατ᾽ ἐκεῖνα ἄρα ϗ ȣ͂τος διὰ $\frac{3}{4}$ διαιρεθήσεται.

Πρόβλημα Δ΄.

206. Διελεῖν ὁλοχερῆ σὺν κλάσματι δι᾽ ὁλοχερȣ͂ς, ἢ ὁλοχερῆ σὺν κλάσματι διὰ κλάσματος, ἢ ὁλοχερῆ δι᾽ ὁλοχερȣ͂ς σὺν κλάσματι, ἢ τελευταῖον ὁλοχερῆ σὺν κλάσματι δι᾽ ὁλοχερȣ͂ς σὺν κλάσματι.

ΛΥΣΙΣ. Ἐν γένει, τȣ͂ διαιρετέȣ ἢ τȣ͂ διαιρέτȣ συγκειμένȣ ἐξ ὁλοχερȣ͂ς ϗ κλάσματος, ἅπας ἀνήχθω ἐπὶ κλάσμα.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ Α΄. Ἵνα διαιρεθῇ $4\frac{2}{3}$ διὰ 5, τȣ͂ 4 εἰς τρίτα μεταποιȣμένȣ, εἶτ᾽ ȣ͂ν γινομένȣ $\frac{14}{3}$, διῃρήσθω $\frac{14}{3}$ διὰ 5 (203)· πηλίκον ȣ͂ν ἔςαι $\frac{14}{15}$.

Β΄. Ἵνα διαιρεθῇ $6\frac{3}{4}$ διὰ $\frac{2}{5}$, ἀναγομένȣ τȣ͂ 6 ἐπὶ τέταρτα, διῃρήσθω $\frac{27}{4}$ διὰ $\frac{2}{5}$ (204), ἐξ οὗ πηλίκον προκύψει $\frac{135}{8}$, ἢ $16\frac{7}{8}$.

Γ΄. Ἵνα διαιρεθῇ 4 διὰ $2\frac{3}{7}$, ἀνήχθω 2 ἐπὶ ἕβδομα, ϗ διῃρήσθω 4, ἢ $\frac{4}{1}$ διὰ $\frac{17}{7}$. Τὸ δὲ πηλίκον ἔσαι $\frac{28}{17}$.

Δ΄. Ἵνα τελευταῖον διαιρεθῶσι $3\frac{4}{5}$ διὰ $6\frac{1}{7}$, ἀνήχθω ὁ μὲν διαιρετέος ἐπὶ πέμπτα, γενόμενος $\frac{19}{5}$· ὁ δὲ διαιρέτης ἐπὶ ἕβδομα, γεγονὼς $\frac{43}{7}$· τέλος δὲ διῃρήσθω $\frac{19}{5}$ διὰ $\frac{43}{7}$· τὸ δέτοι πηλίκον ἔσαι $\frac{133}{215}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν ϗ τῆς αὐτῶν προσθέσεως ϗ ἀφαιρέσεως.

207. Ἐξ ὧν ἔφθημεν περὶ κλασμάτων εἰπόντες, ῥᾷςα κατανοεῖται ὁ λόγος τῶν πράξεων, αἳ γενήσονται ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ὀνομασθέντων ἀριθμῶν (54)· ἀλλ᾽ ἔςι γὰρ πρὸ ἔργȣ διδάσκεσθαι τὰ περὶ τȣ́των τῶν ἀριθμῶν, ὅτι μικρȣ̃ πᾶσαι αἱ εἰωθεῖαι συμβαίνειν τῷ κοινωνικῷ βίῳ λογιςικαὶ πράξεις περὶ τὰς συμμιγεῖς ποσότητος ςρέφονται.

208. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σαφὲς δέτοι προσθεῖναι ποσότητας ἑτεροειδεῖς μὴ ἐξεῖναι, ὡς, φέρ᾽ εἰπεῖν, γρόσια, παράδας κτ., ἢ ὀργυιὰς, πόδας κτ., ἀμήχανον γὰρ συνάψαι ὀργυιαῖς πόδας, ἢ παράδαις γρόσια· ἀλλὰ μηδ᾽ ἀφελεῖν ἑτεροειδεῖς ἑτεροειδῶν.

Πρόβλημα.

209. Συνάπτειν ἀλλήλοις ἀριθμȣ̀ς συμμιγεῖς.

ΛΥΣΙΣ. Εἰς τȣ̃το δὴ χρησόμεθα τοῖς ἑξῆς κανόσι.

Α΄. Τεθείσθωσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς τάξεως αἱ ὁμοειδεῖς ποσότητες, γεγραμμέναι ἐκ τῶν ἄνω ἐπὶ τὰ κάτω, μο-

νάδες ὑπὸ μονάδας κτ., ὡς τὰς εἴδει μείζȣς ἐν ἀριςερᾷ κεῖσθαι τῶν ἡσσόνων.

Β΄. Εἰλήφθω τὸ ἄθροισμα τȣ ἥττονος εἴδȣς, ϗ ἀνήχθω ἐπὶ τὰς τȣ ἐφεξῆς εἴδȣς μονάδας· τὸ ἀναχθῆναι μὴ δυνάμενον, ὑπογεγράφθω ὑπὸ τὴν τȣ εἴδȣς τȣτȣ σήλην.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Καταγραφήτις δαπάνης παρίςησι τȣ́ςδε τȣ̀ς γεγραμμένȣς συμμιγεῖς ἀριθμȣ̀ς, ὧν ζητεῖται τὸ ἄθροισμα· συνήφθωσαν οὖν πρῶτον τὰ λεπτὰ, ὧν τὸ 54 ἄθροισμα περιέχει παράδας 18 ϗ λεπτὸν ο· γεγράφθω τοίνυν ο ὑπὸ τὰ λεπτὰ, ϗ μετακεκομίσθων 18 ἐπὶ τὸν τῶν παράδων χῶρον· ȣ̓͂τος δὲ συναφθεὶς, δίδωσι παραδας 95· οἳ, ἀναχθέντες ἐπὶ γρόσια, ποιȣ̃σι 2 γρόσ. ϗ παρ. 15. γεγράφθω τοιγαρȣ̃ν 15 ὑπὸ τȣ̀ς παράδας, ϗ μεταβιβασθήτωσαν γρόσ. 2. ἐν τῷ χώρῳ τῶν γροσίων, ἃ συνήφθωσαν ϗ ταῦτα, ὡς ἔθος.

γρόσ.	παρ.	λεπτ.
135	17	5
8	0	11
1250	15	4
45	8	9
700	0	7
7099	18	0
355	7	8
40	12	10
9634	15	0

ΔΕΙΞΙΣ. Ὁ ταύτης τῆς πράξεως λόγος ἐςὶν, ὅτι 54 λεπτά εἰσι $\frac{54}{3}$, ἢ παράδαι 18 (167), 95 δὲ παράδαι ἀποτελȣ̃σιν $\frac{95}{40}$, εἴτ' ȣ̓͂ν 2 γρόσ. ϗ παράδας 15· ὁ αὐτὸς δὲ λόγος ἐφαρμοσθῆναι ἔχει ϗ τοῖς ἄλλοις εἴδεσι τῶν συμμιγῶν ποσοτήτων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Δεδαπάνηνται ἐν οἰκοδομῇ τινι τὰ ὁρώμενα. Τὸ ȣ̓͂ν ἄθροισμα τῶν σαυροφόρων, εἴτ' ȣ̓͂ν 164, διαιρεθὲν διὰ 60 (169), δίδωσι φιορ. 2 ϗ 41 σαυροφ.· γεγράφθω τοίνυν 41 ὑπὸ τὰ σαυροφόρα, 2 δὲ μετήχθων ἐπὶ τὸν χῶρον τῶν φιορινίων, ἃ ϗ αὐτὰ, ὡς ἔθος, συνήφθωσαν.

φιορ.	σαυρ.
240	50
6	35
317	10
58	40
3	26
626	41

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Οἰκοδόμημά τι συνέςη ἐκ τῶν ὑπεςρωμένων ἐνταῦθα διαφόρων ποσῶν τῆς τειχοποιΐας, ὀργιῶν ἀμέλει, ποδῶν, ϗ δακτύλων· τὸ ἓν τῶν δακτύλων ἄθροισμά ἐςι 296, ὃ διαιρεθὲν διὰ 144 (155) δίδωσι, πόδας μὲν 2, δακτύλȣς δὲ 8· γεγράφθω ἓν 8 ὑπὸ τȣ̀ς δακτύλȣς, μετενεχθέντων τῶν 2 ποδῶν ἐπὶ τὸν τῶν ποδῶν χῶρον. Τὸ δ' ἄθροισμα τῶν ποδῶν συμποσȣ̃ται 94, οἳ διαιρεθέντες διὰ 36 (155) παρέχȣσιν ὀργιὰς μὲν 2 πόδας δ' 22· ὑπογραφέντος δὲ 22, μετήχθω ὁ 2 ἐπὶ τὴν τῶν ὀργιῶν τάξιν.

ὀρ.	ποδ.	δακτ.
3	25	120
7	32	87
2	15	54
5	20	35
19	22	8

ΣΧΟΛΙΟΝ. Καίτοι τῆς τοιχοποιΐας ἐκ τριῶν συνεςώσης διαςάσεων, δηλονότι μήκȣς, πλάτȣς, ϗ βάθȣς, ϗ ςερεᾶς παρὰ τȣ̃το ȣ̃σης, δυνάμεθα τοῖς οἰκοδομȣ̃σι συνθέσθαι κατὰ λόγον τὸν τῆς ἐπιφανείας.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ'. Ἐξωρύξατό τις ἐκ μεταλλείȣ ςαθμὸν ἀργύρȣ ἀσήμȣ τὸν ᾧδὶ ἐκδηλȣ́μενον· τὸ τῶν δραχμῶν ἄθροισμά ἐςιν 20 ὑπογραφήτωσαν ἓν 20. τὸ δὲ τῶν λιτρῶν, 24, συγκροτȣ̃ν ὀκάδας 8· τὸ δέ τοι τῶν ὀκάδων ἐςὶν 12 αἳ σὺν ταῖς 8 ἀποτελȣ̃σιν 20.

ὀκάδ.	λίτρ.	δραχ.
5	6	7
0	5	6
3	4	3
4	9	4
20	0	20

Πρόβλημα.

210. Ἀφελεῖν ἀριθμὸν συμμιγῆ ἀφ' ἑτέρȣ τοιȣ̃δε.

ΛΥΣΙΣ Α'. Γράψον τὸν ἥττω ὑπὸ τὸν μείζονα καθ' ἣν ᾧδὶ ὁρᾷς τάξιν.

Β'. Ἕκαςον κατώτερον εἶδος τȣ̃ ἀνωτέρȣ ἄφελε,

δανειζόμενος, εἰ δέοι, μονάδα ἐκ τοῦ ἐγγὺς μείζονος πρὸς ἀριστερὰν εἴδους, ϗ μεταφέρων ἐπὶ τὸ ἧττον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κωνσταντῖνος ὁ Κοῦμας ἐγεννήθη τῇ 26 Σεπτεμβρίου τοῦ 1777· πόσον οὖν ἔτος ἄγει νυνὶ, εἴτ' οὖν τῇ 23 Ὀκτωβρίου τοῦ 1806; δεῖ οὖν ἀφελεῖν 1777 ἔτη, μῆνας 8, ϗ ἡμέρας 26, ἀπ' ἐνιαυτῶν 1806, μηνῶν 9, ἡμερῶν 23· δανεισάμενος οὖν μῆνα ἕνα, ϗ εἰς ἡμέρας 30 ἀναλύσας, ϗ ταύτας ταῖς 23 συνάψας, ἀφαιρῶ ἀφ' ἡμερῶν 53 τὰς 26, ὑπογράφων τὴν 27 διαφορὰν· ἀφαιρῶν δ' ὡσαύτως ϗ τοὺς μῆνας, ϗ ἐνιαυτοὺς, εὑρίσκω τὸν Κωνσταντῖνον ἄγοντα ἤδη ἔτος 28, ϗ ἡμέρας 27.

ἔτη	μῆν.	ἡμερ.
1806	8	53
1777	8	26
28	0	27

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἐξ ὧν ἔχοι τις ἀπολαβεῖν γροσίων μὲν 458, παράδων δὲ 7, ἔλαβε γρόσια μὲν 300, παράδας δὲ 18, πόσα οὖν λείπεται λαβεῖν; γρόσιον ἓν, ληφθὲν ἐκ τοῦ 8, ἐμφαίνει παράδας 40, οἳ συνάμα τοῖς 7 ἀποτελοῦσι 47 κτ.

γρόσ.	παράδ.
458	7
300	18
157	29

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἐξ ἀγροῦ τινος, περιέχοντος ὀργυιὰς μὲν τετραγωνικὰς 1500, πόδας δὲ τοιούτους 18, ὠνήσατό τις μέρος ὀργυιῶν 645 ϗ ποδῶν 25· πόση ἐστὶ τοῦ χωρίου ἡ περιλειφθεῖσα περιοχή; προσλαβὼν ὀργυιὰν ἐμφαίνουσαν πόδας 36 (155) ϗ συνάψας τοῖς 18, ἄφελε ἀπὸ 54 τὸν 25, ἀπὸ δὲ 1499 τὸν 645, ϗ ἕξεις, ὡς ὁρᾷς, τὸ ζητούμενον.

ὀργ.	ποδ.
1500	18
645	25
854	29

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Πρόβλημα.

211. Ποσότητας συμμιγεῖς πολλαπλασιάζειν.

ΛΥΣΙΣ. Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦδε τοῦ προβλήματος δυσὶ χρῶνται μεθόδοις, ὧν ἡ μὲν τὸ πρῶτον ἀνάγει τὰς ποσότητας εἰς ἥττονα εἴδη, εἶθ' οὕτω πολλαπλασιάζειν παρακελεύεται θάτερον τῶν κλασμάτων ἐπὶ θάτερον· ἡ δ' ἑτέρα καλεῖται Πολλαπλασιασμὸς διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν· καὶ ἡ μὲν πρώτη ἐστὶ γενικωτέρα, ἀσφαλεστέρα τε ἐπὶ τῆς πράξεως, καὶ οἷον ἐφαρμογή τις τῶν ἀποδειχθέντων ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν κλασμάτων, ἡ δὲ, ὡς βραχύτερον διαπεραινομένη, ἀεὶ μικροῦ προτιμᾶται τῆς πρώτης· τούτων οὖν τῶν μεθόδων, καίτοι ἀλλήλων διαφερουσῶν, ἀρίστη ἡ ἑτέρα θατέρᾳ καθίσταται βάσανος· ὁ γάρ τοι λογιστὴς δέος ἅπαν ἀπώσεται πόῤῥω τοῦ μὴ ἀκριβῶς γενέσθαι τὸν πολλαπλασιασμὸν, θατέρᾳ χρησάμενος· ἀλλὰ διαλευκανοῦμεν γὰρ ἑκατέραν διὰ τῶν ἐφεξῆς ὑποδειγμάτων.

212. Α΄. ΜΕΘΟΔΟΣ. Ἀνάγαγε πάντα τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἓν κλάσμα, ὡσαύτως δὲ καὶ ἅπαντα τὸν πολλαπλασιαστήν· εἶτα πολλαπλασίασον τὰ κλάσματα διὰ θατέρου θάτερον, καὶ τὸ προκύπτον ἀνάγαγε ἐφ' ὁλοχερῆ ἀριθμόν.

213. Β΄. ΜΕΘΟΔΟΣ. Πολλαπλασιάσας ὁλοχερῆ ἐφ' ὁλοχερῆ, λαβὲ ὑπὲρ τῆς ἑκάστου κλάσματος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ δυνάμεως τὸ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὃ

αὐτῷ ἐπανήκει, ϗ σύναψον πάσας ταύτας τὰς εὑρεθείσας ποσότητας.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Πόσου τιμῶνται 5 ϗ $\frac{3}{4}$ πήχεις ὑφάσματος κατὰ λόγον τοῦ πήχεως πρὸς 3 γρόσια ϗ 10 παράδας.

Διὰ τῆς Α'. Μεθόδου. α'. Ὁ πολλαπλασιαστέος, ἀναχθεὶς ἐπὶ τέταρτα, καθίσταται $\frac{23}{4}$· ὁ δὲ πολλαπλασιαστής, ἀναχθεὶς ἐπὶ παράδας, εἴτ' οὖν τεσσαρακοστά, γίνεται $\frac{130}{40}$, εἴτ' οὖν $\frac{13}{4}$. β'. πολλαπλασιασθεὶς ὁ $\frac{23}{4}$ ἐπὶ $\frac{13}{4}$, δίδωσι $\frac{299}{16}$. γ'. τὸ $\frac{299}{16}$, ἀναχθὲν ἐφ' ὁλοχερῆ, ἀποτελεῖ γρόσια 18, λειπομένων 11, ἃ περιέχουσι παράδας 440· $\frac{440}{16}$ δέ ἐστιν ἴσα παράδαις 27 ϗ $\frac{1}{2}$, εἴτ' οὖν ϗ λεπτὰ 1 $\frac{1}{2}$. Τὸ οὖν ὅλον προκύπτον ἔσται 18 γρόσια, 27 παράδαι, ϗ λεπτὰ 1 $\frac{1}{2}$.

Διὰ τῆς Β'. Μεθόδου. Πρόδηλον, ὅτι 5 πήχεις τιμῶνται γροσίων πεντάκις 3, εἴτ' οὖν 15, ἃ σεσημειώσθωσαν· πεντάκις δὲ 10 παράδαι ἀποτελοῦσιν 1 γρόσιον ϗ 10 παράδας, ἃ ϗ αὐτὰ σημειούσθωσαν. Περὶ δὲ τῶν $\frac{3}{4}$ πηχ. εἰλήφθω α'. ἡ δύναμις τοῦ ἡμιπηχίου· ἐπεὶ οὖν ὁ πῆχυς τιμᾶται γροσ. 3. παράδ. 10, τὸ ἡμιπήχιον τιμηθήσεται γροσ. 1. παρ. 25, ἅπερ ὑπογεγράφθωσαν. Τὸ

5 πήχ. $\frac{3}{4}$	3 γροσ.	10 παρ.
γρόσ.	παρ.	λεπτ.
15	0	0
1	10	0
1	25	0
0	32	1 $\frac{1}{2}$
18	27	1 $\frac{1}{2}$

δὲ περιλειπόμενον τέταρτον τιμηθήσεται ἡμίσεως, ἢ ὅσον τετίμηται τὸ ἡμιπήχιον, ὅ ἐστι παράδων 32 ϗ λεπτῶν 1 $\frac{1}{2}$. Τέλος δέ, συμποσωθέντες ἅπαντες οὗτοι οἱ ἀριθμοί, εὑρεθήσονται, ὡς ϗ πρίν, 18 γρόσια, 27 παράδαι, ϗ λεπτὰ 1 $\frac{1}{2}$.

Δεῖξις τῆς πρώτης Μεθόδου. Ἔστι γὰρ αὐ-

τῇ ἐφαρμογῇ τῆς ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἀποδεδειγμένης εἰς πολλαπλασιασμὸν θεωρίας (200, 201)· καὶ μὴν, καὶ ἀναγωγῇ αὐτῶν (171).

Δεῖξις τῆς δευτέρας Μεθόδου. Λαμβάνεται γὰρ ἕκαστον τῶν διαφόρων εἰδῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὁσάκις ἡ παροῦσα μονὰς ἐμπεριλαμβάνεται τῷ πολλαπλασιαστῇ ἔντε τοῖς ὁλοσχερέσι, καὶ τοῖς κλασματίαις τῶν ἀριθμῶν· ὁ ἄρα προκύπτων τοσάκις περιέξει τὸν πολλαπλασιαστέον, ὁσάκις τὴν μονάδα ὁ πολλαπλασιάζων (74). Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἐν Παρισίοις ὠνήσατό τις 5 λίτρας καὶ 6 οὐγγίας ὠνίου κατὰ λόγον λιτρῶν νομίσματος 2 καὶ 7 σολδίων πρὸς τὴν λίτραν τοῦ βάρους· πόση οὖν ἐστιν ἡ ὅλη τιμή;

Α΄. Ὁ πολλαπλασιαστέος, εἴτ' οὖν τὸ 5 λιτρῶν, 6 οὐγγιῶν, βάρος ἀνήχθω ἐπὶ οὐγγίας, εἴτ' οὖν δεκαεκτημόρια (170)· καὶ ἔσονται $\frac{86}{16}$· ὁ δὲ πολλαπλασιαστής, ἀναχθεὶς ἐπὶ σολδία, εἴτ' οὖν εἰκοστημόρια, γενήσεται $\frac{47}{20}$· πολλαπλασιασθεὶς δὲ ὁ $\frac{86}{16}$ ἐπὶ $\frac{47}{20}$, παράγει προκύπτον $\frac{4042}{320}$, ὅπερ, ἐφ' ὁλοσχερῆ ἀναχθὲν, δίδωσι πρῶτον 12 λίτρας, λειπομένων 202, αἵτινες πολλαπλασιασμῷ διὰ 20 γίνονται 4040 σολδία· 4040 σολδία, διαιρεθέντα διὰ δηναρίων 320, προάγουσι 12 σολ. λειπομένων 200 σολ., ἅτινα πολλαπλασιασμῷ διὰ 12 δηναρίων, ἀποτελοῦνται 2400· οὗτος δὲ, διαιρεθεὶς διὰ 320, προάγει 7 δηνάρια, λειπομένων 160, ἅτινα πολλαπλασιασμῷ διὰ 12 γίνονται λεπτὰ 1920· οὗτος δὲ, διαιρεθεὶς διὰ 320, προάγει λεπτὰ 6· ἡ ἄρα ὅλη τιμή ἐστι 12 λίτρ. 12 σολδ. 7 δηναρ. 6 λεπτά.

Β΄. Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν. Πρῶτον δὴ 5

λίτραι τῦ πολλαπλασιαςέϐ τιμῶνται πεντάκις 2 λιτρῶν, εἶτ' ὖν 10· εἶτα πεντάκις 7 σολδία ἀποτελῦσι 35, ἢ λίτραν μίαν ϗ 15 σολδία· περὶ δὲ τῶν 6 ὀγγιῶν, ἐπείπερ ὁ 6 ὀκ ἐςι μέρος σύμμετρον τῦ 16, εἶτ' ὖν τῆς ἐν ςαθμῷ λίτρας· εἰλήφθω πρῶτον ἡ τιμὴ τῶν 4 ὀγγιῶν, αἵ εἰσι τὸ τῆς λίτρας τέταρτον, ὃ τιμηθήσεται τῦ τετάρτϐ τῆς τιμῆς λίτρας μιᾶς, ϗ δὴ τῦ τετάρτϐ νομίσματος λιτρῶν 2, σολδίων 7, ταὐτὸν εἰπεῖν 11 σολδίων ϗ 9 δηναρίων· αἱ δὲ περιλειφθεῖσαι ὀγγίαι 2 τιμηθήσονται τῦ ἡμίσεως, ὖ εὕρομεν ὑπὲρ ὀγγιῶν 4, ὅ ἐςι τὸ ἥμισυ 11 σολδίων ϗ 9 δηναρίων, ταυτὸν εἰπεῖν, 5 σολδία 10 δηνάρια, ϗ 6 λεπτά· προσθέσει ὖν εὑρεθήρεται τὸ αὐτὸ τῷ φθάσαντι ἄθροισμα.

5 λίτρ. 6 ὀγγ. | 2 λίτρ. 700 λεπ.

λίτρ.	σολ.	δην.	λεπ.
10	0	0	0
1	15	0	0
0	11	9	0
0	5	10	6
12	12	7	6

214. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειωτέον δὲ τοῖς πρωτοπείροις, ὡς ἐπὶ τῆς πρακτικῆς ὡς τὰ πολλὰ παραμελῦνται κλάσματα, ὧν ἡ δύναμις ἥττων ϗ τῶν ἐλαχίςων ἐςὶ νομισμάτων, οἷα ἡμῖν ὖ συνήντησεν ἐπὶ τῶν προλαβόντων ὑποδειγμάτων· τὰ τοιαῦτα γάρ τοι μικρῦ δεῖν ἀνεπαίσθητα, ϗ ὀδεμίαν ἐπιφέρει τοῖς νομίσμασιν ἐλάττωσιν, οἵαν ἔχειν καίτινα ἐπαισθητὸν λόγον· εἰ δ' ἡμεῖς ἐπί τε τῶν προλαβόντων, ϗ δὴ ϗ τῶν ἑπομένων ὑποδειγμάτων ϗ ἐπὶ τὰ λεπτὰ ἐφικνϐμεθα, τϐτὶ ἅπαν ἡμῖν ξυντελεῖ πρὸς ἀκρίβειαν τῦ λογισμῦ πλείω, ναὶ μὴν ϗ ἵνα αἱ δετταὶ μέθοδοι, ἴσα ἑκάςῃ προάγϐσαι ἀθροίσματα, ϗ ἴσα ἀλλήλοις δυνάμεναι τελεώτατα ἐλεγχθῶσι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Εἰδέναι τις βϐλεται τὴν τιμὴν

20 ὀκάδων, 100 δραχμῶν, ὠνίϐ κατὰ λόγον τῆς ὀκᾶς πρὸς 10 γρόσια, ϗ παράδας 8.

Ὅλος μὲν ὁ πολλαπλασιαςέος, ἀναχθεὶς ἐπὶ δραχμὰς, ποιεῖ $\frac{8100}{400}$, ἢ $\frac{81}{4}$· ὁ δὲ πολλαπλασιαςὴς, ἀναχθεὶς ἐπὶ παράδας, ποιεῖ $\frac{408}{40}$, ἢ $\frac{51}{5}$· ἐκ δὲ τῶν $\frac{81}{4}$, ϗ $\frac{51}{5}$ γίνεται $\frac{4131}{20}$· ὃς ἀναχθεὶς ἐφ᾽ ὁλοσχερῆ ποιεῖ γρόσια 206 ϗ παράδας 22.

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν. Δεκάκις 20 ποιϐσι γρόσια 200, ἃ γεγράφθωσαν· 8 παράδαι, τὸ πέμπτον ὄντες τϐ̃ γροσίϐ, ἀποδώσϐσι τὸ πέμπτον τῶν 20, εἴτ᾽ ϐ̃ν γρόσια 4, ἃ ϗ αὐτὰ γεγράφθωσαν· 100 δὲ δραχμαὶ, τεταρτημόριον ϐ̃σαι οὐκᾶς, παρέξϐσι τεταρτημόριον τῆς τιμῆς, εἴτ᾽ ϐ̃ν γρόσια 2, παράδας 22, ἃ τέλος ϗ αὐτὰ ὑποςρωθήτωσαν· τὸ ϐ̃ν ὅλον ἔςαι γρόσια 206 ϗ παράδαι 22, ὡς ϗ διὰ τῆς πρώτης εὕρηται μεθόδϐ.

20 ὀκ. 100 δρ.	10 γρόσ. 8 παρ.
γρόσ.	παράδ.
200	0
4	0
2	22
206	22

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ὠνήσατό τις ἄργυρον, ἕλκοντα βάρος 10 λιτρ. 10 ϐ̓γγιῶν, ϗ 1 δραχμῆς, κατὰ λόγον τῆς λίτρας πρὸς 2 φιορίνια, 15 γροσίκια, 2 ςαυροφόρα· πόση ἄρ᾽ ἔςιν ὅλη ἡ τιμή;

Ὁ μὲν πολλαπλασιαςέος, ἀχθεὶς ἐπὶ δραχμὰς, γίνεται $\frac{1361}{128}$ (157)· ὁ δὲ πολλαπλασιαςὴς, ἀχθεὶς ἐπὶ ςαυροφόρα, γίνεται 167 μετὰ παρονομαςϐ̃ τϐ̃ 60 (164)· τὸ δ᾽ ἐκ τϐ́των προκύπτον ἐςὶ $\frac{227287}{7680}$· τϐ̃το δὲ, ἀναχθὲν ἐφ᾽ ὁλοσχερῆ, τϐ̃ μὲν πρώτϐ λειψάνϐ πολλαπλασιασθέντος διὰ 20, τϐ̃ δὲ δευτέρϐ διὰ 3, ἡ ὅλη τϐ̃ ἀργύρϐ τιμὴ εὑρεθήσεται 29 φιορίνια, 11 γροσίκια, 2 ςαυροφ. καταλειπομένϐ τϐ̃ κλάσματος $\frac{5220}{7680}$ ςαυροφ.

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν· 2 φιορίνια, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 10 σταθμικὰς λίτρας, ἀποδιδόασιν 20 φιορίνια. Περὶ δὲ τῶν 15 γροσικίων, εἰ μὲν ἰσοδυνάμουν 1 φιορινίῳ, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 10 λίτρας σταθμοῦ, παρέχον ἂν φιορίνια 10· εἰσὶ μέντοι $\frac{3}{4}$ φιορινίου ἑνός· ἰσοδυναμοῦσιν ἄρα $\frac{3}{4}$ τῶν 10 φιορινίων· $\frac{2}{4}$ δὲ, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν 10 φιορινίων ἐστὶ φιορ. 5, ἃ γεγράφθωσαν· ἓν δὲ τέταρτον ἔσται τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεως, εἴτ' οὖν 2 φιορ. καὶ 10 γροσίκια, ἃ γεγράφθωσαν· 2 δὲ σταυροφ. πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 10 λίτρας, ποιοῦσι σταυροφ. 20, ἢ γροσ. 6 καὶ 2 σταυροφ., ἃ καὶ ταῦτα γεγράφθωσαν.

10 λίτρ. 10 οὐγγ. καὶ 1 δραχ. | 2 φιορ. 15 γροσ. 2 σταυροφ.

φιορ.	γροσ.	κραϊτ.
20	0	0
5	0	0
2	10	0
0	6	2
1	7	2 $\frac{1}{2}$
0	6	2 $\frac{7}{8}$
0	0	1 $\frac{1}{4}$
0	0	0 $\frac{7}{128}$
29	11	2 $\frac{78}{128}$

Μέτιμεν ἤδη ἐπὶ τὸν δεύτερον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὅρον τῶν οὐγγιῶν· 8 οὖν οὐγγίαι τιμηθήσονται ἡμίσεως τῆς τιμῆς τῆς λίτρας, εἴτ' οὖν ἡμίσεως τῶν 2 φιορινίων, 15 γροσ., 2 σταυροφ., εἴτ' οὖν 1 φιορ. 7 γροσ. καὶ $\frac{1}{2}$· αἱ δύω δὲ περιλειφθεῖσαι οὐγγίαι τιμηθήσονται $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀρτίως ὑπὲρ 8 εὑρημένου οὐγγιῶν, εἴτ' οὖν 6 γροσ. 2 σταυροφ. καὶ $\frac{3}{4}$ σὺν $\frac{1}{8}$, ἢ $\frac{7}{8}$ (187).

Μεταβαίνομεν τέλος ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· 1 δραχμὴ τιμηθήσεται $\frac{1}{8}$ οὐγγ., εἴτ' οὖν $\frac{1}{16}$ τοῦ ἄρτι περὶ 2 οὐγγ. εὑρημένου, ὅ ἐστι 1 σταυροφ. καὶ $\frac{1}{4}$ σὺν $\frac{7}{128}$ σταυροφ. (203)· τὰ δὲ $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{4}$ ἀναχθέντα ἐπὶ $\frac{1}{128}$ (187), καὶ συναφθέντα τῷ $\frac{7}{128}$ (186) ποιοῦσι 1 σταυροφ. σὺν καταλοίπῳ $\frac{87}{128}$, ἴσον τῷ $\frac{5220}{7680}$ τῷ πρὸ μικροῦ ἐπὶ τῆς πρώτης με-

θόδου εὑρεθέντι· συνάψει δὲ ἡ ὅλη τιμὴ εὑρεθήσεται ἴση τῇ προευρεθείσῃ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ε΄. Ἠγοράσέτις ἐν Κωνσταντινουπόλει 6 πήχεις ϗ $\frac{2}{3}$ ὑφάσματος, πῆχυν ἕκαστον 8 γροσίων ϗ παράδων 35.

Ὁ πολλαπλασιαστέος, ἀναχθεὶς ἐπὶ τρίτα, γίνεται $\frac{20}{3}$· ὁ πολλαπλασιαστὴς, ἀναχθεὶς ἐπὶ παράδας, καθίσταται $\frac{355}{40}$· τὸ δ' ἐκ τούτων προκύπτον $\frac{7100}{120}$, ἢ $\frac{710}{12}$ ἴσον 59 γρ. 6 παρ. ϗ $\frac{2}{3}$ (146).

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν· 8 ἀργύρια πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 6, ποιοῦσιν ἀργύρια 48· οἱ 38 παράδαι εἰ ἦσαν 40 εἴτ' οὖν 1, πολλαπλασιασθὲν ἂν ἓν γρόσιον ἐπὶ 6 πήχεις, παρεῖχε γρόσια 6· νῦν δὲ τὸ μὲν ἐξ 20 παρ. δίδωσι τὸ ἥμισυ τῶν 6, εἴτ' οὖν 3· οἱ δὲ 10 τῶν λειφθέντων 15 ἀποδώσουσι τὸ ἥμισυ τοῦ ἄρτι περὶ 20 εὑρημένου, εἴτ' οὖν 1 γρόσιον ϗ παρ. 20· τέλος δὲ παρ. 5 ἀποδώσουσι τοῦ περὶ 20 ἡμίσεως τὸ ἥμισυ.

6 πηχ. $\frac{2}{3}$	8 γροσ. 35 παρ.
γρόσ.	παρ.
48	0
3	0
1	20
0	30
2	38$\frac{1}{3}$
2	38$\frac{1}{3}$
59	6$\frac{2}{3}$

Μέτιμεν ἤδη ἐπὶ τὰ $\frac{2}{3}$ πήχεως· $\frac{1}{3}$ πηχ. ἀποδώσει τὸ τρίτον τῆς τιμῆς ἑνὸς πήχεως, εἴτ' οὖν τὸ τρίτον γροσ. 8 ϗ παρ. 35, ὅ ἐστι 2 γρόσ. ϗ παρ. 38 $\frac{1}{3}$. Δὶς οὖν γραφέντος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦδε, ἀποληφθήσεται ϗ $\frac{2}{3}$ πήχ. ἡ τιμή.

215. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τοῖς οἰκοδομήμασι, καίτοι τριῶν εὐμοιροῦσι διαστάσεων, ἀμέλειτοι μήκους, πλάτους, ϗ βάθους, λογισθήσεται μέν τοι μόνον τὸ μῆκος, ἅτε δὴ τῶν ἄλλων δυοῖν οἷον πλάτους ϗ βάθους συνηγνωμένων τῷ μήκει κατὰ συνθήκην· τούτων οὖν δι' ὀργιῶν φέρ' εἰπεῖν, ποδῶν, δακτύλων κτ. ἐκδηλουμένων, ἡ ποδὸς δύναμις ἔσται $\frac{1}{6}$ ὀρ-

γυιᾶς, ἡ δὲ τȢ̃ δακτύλȣ $\frac{1}{12}$ ποδὸς κτ.· κατὰ δὴ ταύτην τὴν ὑπόθεσιν πολλαπλασιασθήσεται τὸ ἑπόμενον ὑπόδειγμα. Ἐπὶ μέν τοι ὑποδειγμάτων ἄλλων τῶν ἐν ἐπιφανείαις, ἡ ποδὸς δύναμις ἔςαι $\frac{1}{36}$ ὀργυιᾶς· ἡ δὲ δακτύλȣ $\frac{1}{144}$ τῆς τȣ̃ ποδὸς, ϗ ἑξῆς ȣ̃τω (155)· ἐν δὲ τοῖς ςερεοῖς ὁ πȣ̃ς ἔςαι $\frac{1}{216}$ ὀργυιᾶς· ὁ δὲ δάκτυλος $\frac{1}{1728}$ ποδὸς κτ. (156).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ς'. Πόσον ἆρα προσήκει ἀποδȣ̃ναι ὑπὲρ ὀργ. 2, ποδ. 3, ϗ δάκτ. 5 τοιχοποιΐας, κατὰ λόγον γροσ. 2 παραδ. 10 ϗ λεπ. 2 πρὸς τὴν ὀργυιάν;

Ὁ μὲν πολλαπλασιαςέος, ἀχθεὶς ἐπὶ δακτύλȣς, γίνεται $\frac{185}{72}$, τȣ̃ δακτύλȣ ὄντος $\frac{1}{72}$ ὀργυιᾶς· ὁ δὲ πολλαπλασιαςὴς, ἀχθεὶς ἐπὶ λεπτὰ, γίνεται 272· τȣ̃ δὲ λεπτȣ̃ $\frac{1}{120}$ ὄντος γροσίȣ, ἔςαι ὁ πολλαπλασιαςὴς $\frac{272}{120}$· τὸ ἐκ τȣ́των γινόμενον $\frac{50320}{8640}$ εὑρίσκεται ἴσον γροσ. 5, παράδαις 32, λεπτ. 2 ϗ $\frac{768}{864}$, εἴτ' ȣ̃ν ϗ $\frac{8}{9}$.

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν· 2 ὀργυιαὶ δὶς ληφθεῖσαι, ποιȣ̃σι γρόσ. 4· περὶ δὲ τῶν 10 παράδ. 2 δεκάκις ληφθεῖσαι, ποιȣ̃σι παράδ. 20, οἳ γεγράφθωσαν· ὡσαύτως περὶ τῶν λεπτῶν, 2 δὶς ποιȣ̃σι λεπ. 4, ἃ ϗ αὐτὰ γεγράφθω· μέτιμεν νῦν ἐπὶ τὸν δεύτερον τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃ ὅρον· 3 ȣ̃ν πόδες, ὀργυιᾶς ἥμισυ ὄντες, τιμηθήσονται ἡμίσεως τῆς ὀργυιᾶς, εἴτ' ȣ̃ν ἡμίσεως τῶν 2 γροσ. 10 παράδ. 2 λεπ. ὅ ἐςι γροσ. 1 παραδ. 5 λεπ. 1 ἅπαντα γεγράφθωσαν· ἕνεκα δὲ τῶν 5 δακτ. εἰλήφθωσαν πρῶτον 4, οἵτινες ὄντες $\frac{1}{3}$ ποδὸς, ταυτὸν εἰπεῖν $\frac{1}{9}$ τριῶν ποδῶν, παρέχȣσιν $\frac{1}{9}$ τȣ̃ ἄρτι

2 ὀρ. 3 πόδ. 5 δακτ. | 2 γροσ. 10 παρ. 2 λεπ.

γρο.	παρ.	λεπ.
4	20	4
1	5	1
0	5	$\frac{1}{9}$
0	1	$\frac{28}{09}$
5	32	$2\frac{32}{36}$

ὑπὲρ τριῶν ποδῶν εὑρημένου, ὅπερ ἐςὶ 5 παρ. ϗ λεπ. $\frac{1}{9}$· ὁ δέ γε περιλειφθεὶς ποῦς τιμηθήσεται τεταρτημορίου τοῦ ἔναγχος εὑρημένου ὑπὲρ δακτύλων 4, εἴτ' οὖν παρ. 1 καὶ λεπτοῦ $\frac{28}{36}$· τὸ δ' ὁλικὸν ἄθμοισμα ἔςαι 5 γροσ. παραδ. 32 ϗ ϗ λεπτὰ 2 ϗ $\frac{32}{36}$ λεπ. εἴτ' οὖν $\frac{8}{9}$ (183).

Περὶ τοῦ ἐν ὀργυιαῖς πολλαπλασιασμοῦ.

216. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἠγόρασέ τις χωρίον πρὸς οἰκοδομὴν οἴκου, περιεκτικὸν ὀργυιῶν μὲν τετραγωνικῶν 50, 24 δὲ ποδῶν, 12 δὲ δακτύλων, κατὰ λόγον τῆς ὀργυιᾶς πρὸς 100 γρόσια. Πόσα τοίνυν ἀποδώσει.

ΛΥΣΙΣ. Τῆς ὀργυιᾶς περιεχέσης πόδας 36 (215), τοῦ δὲ ποδὸς δακτύλους 144, ὁ πολλαπλασιαςὴς, ἀναχθεὶς ἐπὶ δακτύλους, καθίςαται 262668· τοῦ δὲ δακτύλου $\frac{1}{5184}$ ὀργυιᾶς ὄντος (155), τραπήσεται ὁ πολλαπλασιαςὴς εἰς $\frac{262668}{5184}$, οὗ τοῦ ἀριθμητοῦ πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ὁλοσχερῆ 100, ϗ τοῦ προερχομένου ἐντεῦθεν κλάσματος $\frac{26266800}{5184}$ ἐφ' ὁλοσχερῆ ἀναχθέντος, εὑρεθήσονται 5066 γρόσια, 35 παράδαι, 2 λεπτὰ, καὶ κατάλοιπον $\frac{4032}{5184}$, ἢ $\frac{7}{9}$ (179).

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν. Αἱ 50 ὀργυιαὶ διδόασι γρόσια 5000· 24 δὲ πόδες ὄντες $\frac{2}{3}$ ὀργυιᾶς (155) τιμηθήσονται $\frac{2}{3}$ τῶν 100· εἰλήφθω τοίνυν τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν 100, ὅπερ ἐςὶ 33 γρόσια, 13 παράδαι, 1 λεπτὸν, ἅπερ γεγράφθω δίς· οἱ δὲ 12 δάκτυλοι, ἐπεὶ δωδεκατημόριόν εἰσι τοῦ ποδὸς, τιμηθήσονται

50 ὀργ. τετρ. 24 ποδ. 12 δακτ. | 100 γρόσ.

γρ.	παρ.	λεπ.
5000	0	0
33	13	1
33	13	1
0	9	$\frac{112}{144}$ ἢ $\frac{7}{9}$
5066	35	$2\frac{7}{9}$

$\frac{1}{144}$ τοῦ πρὸ μικροῦ εὑρημένου ὑπὲρ ποδῶν 12, ἢ τῶν 33

γροσίων, 13 παράδων, 1 λεπτοῦ, ὅπερ ἐςὶ παράδων 9 ϗ λεπτοῦ $\frac{112}{144}$, ἢ $\frac{7}{9}$ (183)· προσθέσει δὲ τελευταῖον εὑρίσκεται τὸ διὰ ταύτης τῆς μεθόδου προκύψαν ἄθροισμα ἴσον τῷ διὰ τῆς πρώτης.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Πεδίου, οὗ μῆκος μὲν 20 ὀργιῶν, ϗ ποδῶν 5, ϗ δακτύλων 9· πλάτος δὲ, ὀργιῶν 6, ϗ ποδῶν 4, ϗ δακτύλων 7· πόσον ἐςὶ τὸ ἐμβαδόν;

ΛΥΣΙΣ. Ὁ πολλαπλασιαςέος ἀνήχθω ἐπὶ δακτύλους, γενόμενος 1509 (149), τοῦ δὲ κατὰ μῆκος δακτύλου ὄντος $\frac{1}{72}$ ὀργιᾶς κατὰ μῆκος, συςαθήσεται κλάσμα τὸ $\frac{1509}{72}$· ὁ δὲ πολλαπλασιαςὴς, ἀναχθεὶς ὡσαύτως ἐπὶ κλάσμα γενήσεται $\frac{487}{72}$· τὸ δ' ἐκ τούτων τῶν κλασμάτων προκύπτον, ὅ ἐςι $\frac{734883}{5184}$, ἀναχθὲν ἐφ' ὁλοχερῆ, παρέχει πρῶτον ὀργιὰς τετραγωνικὰς 141 (153), λειπομένου 3939, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 36 (τόσοι γὰρ πόδες τετραγωνικοὶ ἔνεισι τῇ ὀργιᾷ), παράγει 141804· ὃς, διαιρεθεὶς διὰ 5184, δίδωσι πόδας τετραγωνικοὺς 27, λειπομένων 1836· ὃς, πολλαπλασιασθεὶς διὰ 144 (155), προάγει 264384· ὃς, διαιρεθεὶς διὰ 5184, παρέχεται ἐπ' ἀκριβὲς 51 πόδας τετραγωνικούς. Τὸ δ' ὅλον, 141 ὀργ. τετρ. 27 πόδ. τετραγ., ϗ 51 τοιοίδε δάκτυλοι.

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν· 20 ὀργιαὶ τοῦ πολλαπλασιαςέου, πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ 6 ὀργιὰς τοῦ πολλαπλασιαςοῦ, ποιοῦσιν 120 ὀργιὰς τετραγωνικάς· οἱ δὲ 5 πόδες, εἴπερ ἦσαν 6, ἀναπληροῦντες ὀργιὰν κατὰ μῆκος, πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ 6 ὀργιὰς κατὰ πλάτος, παρεῖχον ἂν ὀργιὰς τετραγωνικὰς 6· νῦν δὲ πόδες 5 παρέξουσι $\frac{5}{6}$ τῶν 6 τετραγωνικῶν ποδῶν· εἰλήφθω οὖν $\frac{2}{6}$ τῶν 6 τετραγωνικῶν ὀργιῶν, ἢ $\frac{1}{3}$, ὃ δὴ παρέχει 2

τετραγωνικὰς ὀργυιὰς, αἵτινες γεγράφθωσαν δὶς ὑπὲρ τῆς τιμῆς

20 ὀργ. 5 ποδ. 9 δακτ. | 6 ὀρ. 4 πόδ. 7 δακ.

τῶν $\frac{4}{6}$, ἢ τῶν 4 ποδῶν· ὁ δέ γε πέμπτος ποῦς τιμηθήσεται ἡμίσεως τοῦ ὑπὲρ δύω ποδῶν εὑρεθέντος, ἢ ὀργυιᾶς μιᾶς. Περὶ δὲ τῶν 9 δακτύλων, ἐπεὶ ἤδη ἑωράκαμεν ὅτι 1 ποῦς τοῦ πολλαπλασιαστέου ὥς γε πρὸς τὸν 6 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀποδιδοίη 1 ὀργυιὰν, 9 δάκτυλοι, ὄντες $\frac{3}{4}$ ποδὸς κατὰ μῆκος, ἀποδώσουσι $\frac{3}{4}$ τῶν 36 τετραγωνικῶν ποδῶν· ληφθὲν ἄρα $\frac{1}{4}$ τῶν 36, ὅ ἐστιν 9, γεγράφθω τρὶς κατὰ συνέχειαν.

ὀργ. τετρ.	πόδ.	δακ.
120	0	0
2	0	0
2	0	0
1	0	0
0	9	0
0	9	0
0	9	0
6	24	0
6	24	0
0	20	0
0	3	0
0	60	72
0	10	60
0	2	63
141	27	51

Μέτιμεν ἤδη ἐπὶ τὸν δεύτερον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὅρον· 20 ὀργυιαὶ, πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ 4 πόδας, ἀποδώσουσι πάντως $\frac{2}{3}$, οὗ διδόασιν 20 ὀργυιαὶ, πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ πόδας 6, ἤτοι 1 ὀργυιὰν, ὅ ἐστι ταυτὸν $\frac{2}{3}$ τῶν 20 τετραγωνικῶν ὀργυιῶν· εἰλήφθω οὖν $\frac{1}{3}$ τῶν 20 τετραγωνικῶν ὀργυιῶν, ὅ ἐστιν 6 ὀργ. 24 πόδ., ἃ γεγράφθω δίς· 5 δὲ πόδες, πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ 4 πόδας, ἀποδώσουσιν 20 τετραγωνικοὺς πόδας (153)· 1 δὲ ποῦς τοῦ πολλαπλασιαστέου, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 4 πόδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀποδώσει 4 πόδας τετραγωνικούς· 9 δὲ δάκτυλοι, $\frac{3}{4}$ ὄντες ποδὸς, παρέξονται $\frac{3}{4}$ 4 τετρ. ποδ., ὅ ἐστι 3 πόδας τετραγωνικούς. Μεταβαίνομεν κἀπὶ τὸν 7 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· 1 ποῦς κατὰ μῆκος, πολλαπλασιάσας 20 ὀργυιὰς, ἢ 120 πόδας κατὰ μῆκος, ἀποδίδωσιν 120 τετραγωνικοὺς πόδας· 6 ἄρα δάκτυλοι τούτων ἀπο-

δώσουσι τὸ ἥμισυ, εἴτ᾽ οὖν 60 πόδας τετραγωνικούς· ὁ δὲ καταλειφθεὶς δάκτυλος ἀποδώσει $\frac{1}{6}$ τῶν 60, 10 πόδας· ὑπὲρ δὲ τῶν 5 τοῦ πολλαπλασιαστέου ποδῶν, ἐπὶ 1 ποῦς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ παρέχει πόδας 5 τετραγωνικούς· ἄρα 6 αὐτῶν δάκτυλοι παρέχουσι τὸ ἥμισυ, εἴτ᾽ οὖν 2 πόδας, 72 δακτύλους· ὁ δὲ κατάλοιπος δάκτυλος ἀποδώσει τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦδε τοῦ ἡμίσεως, εἴτ᾽ οὖν δακτύλους 60. Τελευταῖον δὲ 9 δάκτυλοι, ἐπὶ 7 πολλαπλασιασθέντες δακτύλους, ποιήσουσι δακτύλους τετραγωνικοὺς 63. Προσθέσει δὲ, εὑρεθήσεται τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν, ὃ ϗ πρότερον, εἴτ᾽ οὖν ὀργυιαὶ 141 τετραγωνικαὶ, 27 πόδες, 51 δάκτυλοι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Θαλάμου τετραγωνικοῦ, ἔστι μὲν τὸ μῆκος ὀργυιῶν 2, ποδῶν 4, καὶ δακτύλων 3· τοσόνδε δὲ ϗ τὸ πλάτος· πόση ἄρ᾽ αὐτοῦ τοῦ ἐδάφους ἡ ἐπιφάνεια;

Ὅ,τε πολλαπλασιαστέος ϗ ὁ πολλαπλασιαστὴς, ἀναχθέντες ἐπὶ δακτύλους, συνιστῶσι κλάσματα τὰ $\frac{195}{72}$ ϗ $\frac{195}{72}$, ὑφ᾽ ὧν γίνεται $\frac{38025}{5184}$· ἀναγωγῆς δὲ γενομένης, προΐασιν 7 ὀργυιαὶ τετρ. μετὰ λειψάνου 1737, ὃς ἀχθεὶς ἐπὶ 36, ποιεῖ 62532· διαιρεθεὶς δ᾽ οὕτος, φέρει 12 πόδ. τετραγ. μετὰ λειψάνου 324· ὁ δὲ, πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ 144· τὸ δὲ προκύπτον διαιρεθὲν ἀποτελεῖ δακτύλους 9· ἡ ἄρα ὅλη ἐπιφάνειά ἐστιν ὀργυιῶν 7, ποδῶν 12, ϗ δακτύλων 9.

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν. Δὶς δύω ὀργυιαὶ ποιοῦσι 4 ὀργυιὰς τετραγωνικάς· 4 πόδες τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 2 ὀργ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ποιοῦσι $\frac{2}{3}$ ὀργ. τετραγ. 2, εἴτ᾽ οὖν 1 ὀργ. ϗ 12 πόδας· 3 δάκτυλοι $\frac{1}{4}$ εἰσὶ ποδὸς, εἴτ᾽ οὖν $\frac{1}{16}$ τῶν 4· οὗτοι οὖν ἀποδώσουσι $\frac{1}{16}$ τοῦ ἤδη περὶ 4 ποδ. εὑρημένου, ὅ ἐστι 3 πόδας· ὁ δὲ 4 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ

ἀποδώσει α΄. $\frac{2}{3}$ ὀργ. 2 τῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου, εἴτ' οὖν 1 ὀργ. καὶ 12 ποδ. β΄. τετράκις 4 πόδες, 16 πόδας τετραγωνικούς. γ΄. 3 δάκτυλοι, $\frac{1}{4}$ τῶν 4 ποδῶν, εἴτ' οὖν πόδα 1· ὁ δέ γε 3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ (ἐπεὶ 1 ποῦς ἐπ' ὀργυιὰς 2, εἴτ' οὖν πόδας 12, πολλαπλασιασθεὶς, ποιεῖ πόδας τετραγωνικοὺς 12), δακτύλους σημαίνων, παρέξει $\frac{1}{4}$, ἢ πόδας 3· ὡσαύτως, ἐπεὶ 1 ποῦς ἐπὶ 4 τοῦ πολλαπλασιαστέου πόδας παράχοι ἂν 4 πόδ. τετραγ· 3 δάκτ. παρέξουσιν $\frac{1}{4}$, ἢ πόδα 1· τέλος, 3 δακτ. ἐπὶ 3 δακτ. ποιοῦσιν 9 τετραγ. δακτ.

2 ὀργ. 4 ποδ. 3 δάκτ.	2 ὀργ. 4 πόδ. 3 δάκτ.	
ὀργ. τετρ.	πόδ.	δάκτ.
4	0	0
1	12	0
0	3	0
1	12	0
0	16	0
0	1	0
0	3	0
0	1	9
7	12	9

Περὶ τοῦ ἐν στερεοῖς συμμιγοῦς πολλαπλασιασμοῦ, ἐν ᾧ τινες τῶν προαποδοθέντων κανόνων τῇ πράξει ἐφαρμόζονται.

217. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Διορυγήν τις βουλόμενος ἐν τῇ γῇ ὀρύξαι, μήκους μὲν 6 ὀργ. 5 ποδ.· πλάτους δὲ, 4 ὀργ. 2 πόδ. βάθους δὲ, 1 ὀργυιᾶς, 5 ποδ. πυνθάνεται, πόσοι ἄρ' ἐνέσονται κυβικοὶ πόδες;

α΄. Ἀναγαγὼν τό,τε μῆκος καὶ πλάτος ἐπὶ κλάσματα τὰ $\frac{41}{6}$ καὶ $\frac{26}{6}$, πολλαπλασίασον αὐτὰ ἐπ' ἄλληλα· τὸ δὲ προκύπτον $\frac{1066}{36}$ δηλώσει τῆς ἐπιφανείας τὰς τετραγωνικὰς ὀργυιὰς τοῦ ἀνορυγησομένου χώρου.

β΄. Ἀναγαγὼν τὸ βάθος ἐπὶ κλάσμα $\frac{11}{6}$ δι' αὐτοῦ πολλαπλασίασον τὸ $\frac{1066}{36}$. Τὸ δὲ προκύπτον $\frac{11726}{216}$,

ἄνευ ἀναγωγῆς ἐκδηλοῖ πόδας κυβικοὺς 11726 (156), οὓς περιέξει ἡ διορυχθησομένη γῆ.

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν. Ἀρχόμενος λάμβανε τὸ γινόμενον ὑπὸ ὀργ. 6 ϗ 5 ποδ. ϗ 4 ὀργ. ϗ 2 ποδ., ὡς πέπρακται 6 ὀργ. 5 ποδ. μήκους | 4 ὀργ. 2 ποδ. πλάτους.

προλαβόντως· τετράκις 6 ποιοῦσιν 24 τετραγωνικὰς ὀργυιάς· 3 πόδες τῶν ἐν τῷ 5 ἀποδώσουσι τὸ ἥμισυ τῶν 4 ὀργυιῶν, εἴτ' οὖν 2 τετραγωνικὰς ὀργυιάς· οἱ δὲ 2 λειπόμενοι πόδες ἀποδώσουσιν $\frac{1}{3}$ τῶν 4 ὀργ., εἴτ' οὖν 1 ὀργ. ϗ 12 πόδας τετραγωνικούς· 2 πόδες τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀποδώσουσιν $\frac{1}{3}$ τῶν 6 ὀργ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εἴτ' οὖν 2 ὀργυιὰς τετραγωνικάς· τέλος δέ, δὶς 5 πόδες παρέξουσι 10 πόδας τετραγωνικούς· συνάψει δέ, εὑρίσκονται 29 ὀργυιαὶ τετραγ., ϗ 22 πόδες τοιοῦτοι.

ὀργ. τετρ.	ποδ.
24	0
2	0
1	12
2	0
0	10
29	22

ἐπὶ 1 ὀργ. 5 πόδας τοῦ ὕψους.

Πολλαπλασίασον εἶτα τὸ προκύπτον ἐπὶ 1 ὀργ. 5 ποδ. τοῦ βάθους· 29 ὀργυιαὶ τετραγωνικαὶ ἐπὶ 1 ὀργυιὰν τοῦ βάθους, ποιοῦσι 29 ὀργυιὰς κυβικάς· 18 πόδες τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εἴτ' οὖν τὸ ἥμισυ τετραγωνικῆς ὀργυιᾶς ἐπὶ 1 ὀργ. παρέχουσι τῆς κυβικῆς ὀργυιᾶς τὸ ἥμισυ, εἴτ' οὖν 108 πόδας κυβικούς· οἱ κατάλοιποι 4 πόδες παρέξουσι $\frac{1}{9}$, 24 ποδ. κυβικ.· 5 δὲ πόδες τοῦ πολλαπλασιαστοῦ παρέξουσι $\frac{5}{6}$, ὅ ἐστι α΄. τὸ τῶν 29 ἥμισυ, ἢ 14 ὀργυιὰς κυβικὰς ϗ $\frac{1}{2}$. β΄. τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν 29 ὀργυιῶν, εἴτ' οὖν 9 ὀργυιάς, ϗ 144 πόδας. γ΄. πεντάκις 22, ἢ 110 κυβικοὺς πόδας· ὁ οὖν ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν ποδῶν εὕρηται ὁ αὐτὸς τῷ ϗ διὰ τῆς πρώτης μεθόδου.

ὀργ.κυβ.	ποδ.κυβ.
29	108
0	24
14	108
9	144
0	110
54	62
ἢ	11726

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Σωρεία σίτου, ἐν ἀποθήκῃ κειμένου, ἐστὶ μῆκος μὲν ὀργυιὰ, ϗ 4 πόδες· πλάτος δὲ 1 ὀργυιὰ ϗ 3 ποδ.· ὕψος δὲ 1 ὀργυιὰ, ϗ 1 ποῦς. Τὸ δὲ μέτρον τοῦ σίτου ἐξ ὑποθέσεως περιέχει ἕνα πόδα σὺν ἡμίσει κυβικόν. Πόσα εἰσὶ πάντα τὰ μέτρα;

Τὸ μῆκος ϗ τὸ πλάτος, ἀναχθέντα ἐπὶ πόδας πολλαπλασιασμῷ, παράγουσιν 90 πόδας τετραγωνικοὺς, οἳ ἀχθέντες ἐπὶ τὸ ὕψος, παράγουσι πόδας κυβικοὺς 630· ϗ ἐπειδὴ τὸ μέτρον ἐστὶ ποῦς σὺν ἡμίσει κυβικὸς, 1 ποῦς κυβικός ἐστι $\frac{2}{3}$ τοῦδε τοῦ μέτρου· πολλαπλασιασθεὶς ἄρα ὁ 630 διὰ $\frac{2}{3}$ παράγει $\frac{1260}{3}$, ἢ μέτρα 420.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἄγγος τι εὕρηται περιέχον μῆκος μὲν 9 ποδῶν, 5 δακτύλων, 1 γραμμῆς· πλάτος δὲ, 4 δακτ. ϗ 6 γραμ., ὕψος δὲ 7 ποδῶν· εὑρεῖν οὖν πόσας ὕδατος στάμνους περιέχει· δίχα τῆς τοῦ μέτρου χρήσεως.

9 πόδ., ϗ 5 δάκτ., ϗ 1 γραμ., ἀναχθέντα ἐπὶ γραμμὰς, συνιστῶσι $\frac{1357}{12}$ τοῦ δακτύλου· 4 δὲ πόδ. ϗ 6 γραμ. συνιστῶσι $\frac{54}{12}$· τὸ δ᾽ ἐκ τούτων προκύπτον, $\frac{73278}{144}$ τετρ. δακτ.

7 πόδες ὕψους, ἀναχθέντες ἐπὶ δακτύλους, παρέχουσιν 84 δακτύλους, ἐφ᾽ οὓς πολλαπλασιασθὲν τὸ $\frac{73278}{144}$, παράγει $\frac{6155352}{144}$, ὃ δι᾽ ἀναγωγῆς παρέχει δακτύλους κυβικοὺς $42745\frac{1}{2}$· ὁ δὲ, διαιρεθεὶς διὰ 96 (158), δίδωσι στάμνους 445 ὅτι ἔγγιστα, ἃς τὸ ἄγγος περιέξει.

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν· 4 δάκτυλοι τοῦ πολλαπλασιαστοῦ παρέξουσι $\frac{1}{3}$ τῶν 9 ποδῶν, εἴτ᾽ οὖν 3 πόδας τετραγωνικούς· τετράκις 5 ποιοῦσι δακτύλους 20· ἐπεὶ δὲ 1 δάκτυλος τοῦ πολλαπλασιαστέου παρέχει 4 δακτύλους τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· 1 γραμμὴ παρέξει $\frac{1}{12}$ τῶν 4 δα-

τύλων, ἢ $\frac{1}{3}$ τοῦ τετραγωνικοῦ δακτύλου, εἴτ' οὖν 48 γραμμάς. Αἱ δὲ 6

9 ποδ. 5 δακτ. 1 γρ. | 4 δακτ. 6 γραμ.

τοῦ πολλαπλασιαστοῦ γραμμαὶ, οὖσαι $\frac{1}{2}$ δακτύλου, ἀποδώσουσιν $\frac{1}{8}$ τοῦ ἄρτι περὶ 4 δακτύλων εὑρημένου· $\frac{1}{8}$ δὲ τῶν 3 τετραγωνικῶν ποδῶν ἐστὶ δάκτυλοι 54· $\frac{1}{8}$ δὲ τῶν

ποδ.τετρ.	δακτ.τρ.	γρ.τετρ.
3	20	48
0	54	0
0	2	72
0	0	6
3	76	126

20 δακτύλων ἐστὶ 2 δάκτυλοι καὶ γραμμαὶ 72· $\frac{1}{8}$ δὲ τῶν 48 γραμμῶν ἐστιν 6 γραμμαί. Τὸ οὖν προκύπτον ἐστὶ, 3 πόδες τετραγ., 76 δάκτυλοι τετραγ., καὶ 126 γραμ. τετρ. ἃ πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ τοὺς 7 τοῦ ὕψους πόδας· τρὶς 7 ποιοῦσιν 21 πόδας κυβικούς· 72 δάκτυλοι, πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ πόδας 7, παρέχουσι τὸ ἥμισυ τῶν 7 κυβικῶν ποδῶν (155), ἢ 3 πόδας σὺν 864 δακτύλοις (156)· 4

ποδ.κυβ.	δακ.κυβ.	γραμ.κυβ.
21	0	0
3	864	0
0	336	0
0	42	0
0	21	0
0	10$\frac{1}{2}$	0
24	1273$\frac{1}{2}$	0

δάκτυλοι οἱ λειφθέντες, οἵτινες εἰσι $\frac{1}{18}$ τῶν 72, ἀποδώσουσιν $\frac{1}{18}$ τῶν 3 ποδῶν, 864 δακτύλων, εἴτ' οὖν δακ. 336.

Ὑπὲρ τῶν 126 γραμμῶν· 1 δάκτυλος, ἢ 144 γραμμαὶ, δίδωσι $\frac{1}{144}$ τῶν 7 κυβικῶν ποδῶν, ἢ 84 κυβικοὺς δακτύλους· 72 ἄρα γραμμαὶ παρέξουσι τὸ ἥμισυ, εἴτ' οὖν 42· 36 δὲ παρέξουσι τὸ ἥμισυ τοῦδε τοῦ ἡμίσεως, εἴτ' οὖν 21· αἱ δὲ περιλειπόμεναι 18 γραμμαὶ, τὸ καινὸν ἥμισυ, εἴτ' οὖν 10 δακτύλους καὶ 864 γραμμὰς, ἢ 10 $\frac{1}{2}$. Προσθέσει δὲ, καὶ ἀναγωγῇ τῶν κυβικῶν ποδῶν ἐπὶ δακτύλους, εὑρεθήσονται, ὥσπερ καὶ πρὶν, δάκτ. κυβ. 42745$\frac{1}{2}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ'. Ἀερομηχανήτις περιέχει κατὰ

μὲν μῆκος 46 ποδ. 6 δακ., κατὰ πλάτος δὲ 15 ποδ., 20 δὲ πόδας ϗ 4 δακτύλȣς κατὰ βάθος. α΄. πόσȣς κυβικȣ̀ς πόδας ἀέρος περιέχει αὕτη; β΄. τȣ̃ βάρȣς τȣ̃ ἀέρος, ᾧ πεφύσηται ἡ μηχανὴ, τριτημορίȣ ἐξ ὑποθέσεως γενομένȣ συνεργείᾳ τȣ̃ ῥευςȣ̃, πόσον ἔςαι τὸ βάρος, ὃ ἡ ἀερομηχανὴ ἀνέξει;

Διά τε τῆς πρώτης ϗ δευτέρας μεθόδȣ εὑρίσκεται ἡ ἀερομηχανὴ χωρȣ̃σα πόδας κυβικȣ̀ς 14182· ȣ̂τοι δὲ ἀέρος ὄντες, ἀπολέσαντες, ὡς ὑποτίθεται, $\frac{1}{3}$ τȣ̃ οἰκείȣ βάρȣς, ἀνισοβαρεῖς ἔσονται τῷ ἀτμοσφαιρικῷ ἀέρι, ἢ τῷ ὁριζοντείῳ (162)· τὸ ȣ̂ν βαςασθησόμενον βάρος ἰσοδυναμήσει $\frac{2}{3}$ τῶν 14182 κυβικῶν ποδῶν τȣ̃ ἀέρος· α΄. εἰλήφθω ταῦτα τὰ $\frac{2}{3}$, ἃ ποιȣ̃σι πόδας κυβικȣ̀ς 9454· β΄. ἐπεὶ 1 πȣ̀ς κυβικὸς ἀτμοσφαιρικȣ̃ ἀέρος βάρος ἕλκει $\frac{1}{950}$ τῶν 54 λιτρῶν (160, 162), πεπολλαπλασιάσθω 9454 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{54}{950}$ (192), ϗ ἀναγωγῇ εὑρεθήσεται ἀνέχειν ἡ ἀερομηχανὴ δυναμένη βάρος λιτρῶν 537.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ϛ΄. Μηχανȣργός τις, εἰδέναι χρήζων πόσον ἐςὶ τὸ ὑπὸ γέφυραν διατρέχον ἐν χρόνῳ δεδομένῳ ὕδωρ, εὑρίσκει τὸ τȣ̃ ποταμȣ̃ πλάτος ποδῶν 30, ϗ τὸ μεσαίτατον βάθος 10 ποδῶν· τέλος δὲ, παρατηρῶν διὰ τȣ̃ ἐκκρεμȣ̃ς, εὑρίσκει ὅτι ἡ μεσαιτάτη ταχυτὴς τȣ̃ ὕδατός ἐςι τοιάδε, οἵα διατρέχειν πόδας $3\frac{1}{2}$ λεπτȣ̃ δευτέρȣ. Πόσον ȣ̂ν ὕδατος διαῤῥεύσει ἐν ὥρᾳ μιᾷ;

ΛΥΣΙΣ. Τὸ διαῤῥέον ὕδωρ ἐν λεπτῷ δευτέρῳ ἐςὶν ὕλη περιέχȣσα 30 πόδας μήκȣς, $3\frac{1}{2}$ πλάτȣς, ϗ 10 βάθȣς· τȣ̂τ' ἔςι πόδες κυβικοὶ 1050, οἳ διαῤῥέȣσιν ἐν λεπτῷ δευτέρῳ· ἡ ἄρα ποσότης τȣ̃ ὕδατος τȣ̃ ἐν ὥρᾳ μιᾷ διαῤῥέοντος δηλωθήσεται πολλαπλασιασθέντος 1050 διὰ 3600 (166)· ταυτὸν εἰπεῖν, ἔςαι ποδῶν κυβικῶν 3780000.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Πρόβλημα Α΄.

218. *Μόνȣ τȣ͂ διαιρετέȣ συμμιγȣ͂ς ὄντος, ϗ τῶν τȣ͂ πηλίκȣ μονάδων ὁμοφυῶν ὀφειλȣσῶν εἶναι ταῖς τȣ͂ διαιρετέȣ, τὴν διαίρεσιν ἀπεργάσασθαι.*

ΛΥΣΙΣ. *Διῃρήσθω πρῶτον τὸ μεῖζον εἶδος τȣ͂ διαιρετέȣ· τὸ δὲ λείψανον, εἰ εἴη, ἀνήχθω ἐπὶ τὸ ἑπόμενον εἶδος τȣ͂ διαιρετέȣ, ϗ, συναφθέντος ϗ τȣ͂ ἐν τῷ ἑπομένῳ τῷδε χώρῳ ἀριθμȣ͂, διῃρήσθω τὸ ἄθροισμα διὰ τȣ͂ διαιρέτȣ· γενέσθω δὲ αὐτὸ τȣ͂το κἀπὶ τȣ͂ κοινȣ͂ καταλοίπȣ, εἰ εἴη, ϗ ȣ͂τως ἑξῆς.*

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. 546 *λίτραι*, 17 *σολδία*, 6 *δηνάρια διανεμηθήσονται ἀνθρώποις* 10· *πόσον ἔςαι ἑκάςȣ*; 546 *λίτραι, διαιρεθεῖσαι διὰ* 10, *παρέχȣσι πρῶτον* 54 *λίτρας* (127), *μετὰ λειψάνȣ* 6 *λιτρῶν· ὧν ἀναχθεισῶν ἐπὶ σολδία, ϗ τȣ͂δε τȣ͂ ἀριθμȣ͂ τῶν σολδίων συναφθέντος τῷ* 17, *διῃρήσθω τὸ ἄθροισμα* 137 *διὰ* 10· *πηλίκον ȣ͂ν ἔςαι* 13 *σολδία ϗ κατάλοιπον* 7· *ȣ͂τος δὲ, ἐπὶ δηνάρια ἀναχθεὶς, ϗ συναφθεὶς τῷ* 6, *διῃρήσθω διὰ* 10, *ὅθεν ἔςαι πηλίκον* 9 *δηνάρια. Τὸ ἄρα ἑκάςȣ μέρος ἔςαι* 54 *λίτραι*, 13 *σολδία*, *ϗ* 9 *δηνάρια.*

ΔΕΙΞΙΣ. *Αὕτη γὰρ ἡ περίπτωσις ταυτίζεται, ᾗ δῆλον, τῇ τῶν τῆς διαιρέσεως καταλοίπων* (172)· *πράττειν ἄρα καὶ ἐνταῦθα δεῖ κατ' αὐτὴν ἐκείνην τὴν μέθοδον.*

ΒΑΣΑΝΟΣ. Τὸ *πηλίκον* 54 *λίτραι*, 10 *σολδ.* 9

δηνάρ., πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 10, ἀποδοῦναι ὀφείλει τὸν διαιρετέον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἀπέδωκέ τις 15 γρόσια, παράδας 30, ὑπὲρ 6 ὀκάδων ὠνίων· πόσ᾽ ἆρ᾽ ὑπὲρ ἑκάστης;

15 γρόσια, διαιρεθέντα διὰ 6, διδόασι 2 γρόσια καὶ λεῖψανον 3, ἅτινα, ἀναχθέντα ἐπὶ παράδας, καὶ συναφθέντα τοῖς 30, γίνονται 150· οὗτος δὲ, διαιρεθεὶς δι᾽ 6 δίδωσι παράδ. 25· ἑκάστη ἄρα τῶν ὠνίων οὐκᾶ τιμᾶται 2 γροσίων καὶ 25 παράδων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Πόσην πρόσοδον διδοῦσι γρόσια 1945 καὶ 20 παράδαι, φερόντων 4 τῶν 100;

Παρατηρηθέντος ὅτι 4 ἐστὶν $\frac{1}{25}$ τῶν 100, ἔσται ἡ ζητουμένη προσόδος $\frac{1}{25}$ παντὸς τοῦ τῶν ἀργυρίων ἀθροίσματος. Τοιγαροῦν 1945, διαιρεθέντα δι᾽ 25, διδοῦσι 77 γρόσια λειπομένων 20, ἅτινα, ἀναχθεῖτα ἐπὶ παράδας, καὶ τοῖς 20 συναφθέντα, γίνονται 820, ὃς, διαιρεθεὶς δι᾽ 25, δίδωσι 32 παράδας καὶ $\frac{4}{5}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ὑπὲρ 8450 φιορινίων λαμβάνω τόκον 504 φιορίνια καὶ 40 σαυροφόρα· πόσα ὑπὲρ ἑκάστου;

Ἐπείπερ ὁ διαιρετέος 504 φιορίνια καὶ 40 σαυροφ. ἐστὶν ἐλάττων τοῦ διαιρέτου, ἀνήχθω ἐπὶ σαυροφ., καὶ συνήφθω τοῖς 40· τὸ δ᾽ ὅλον 30280, διαιρεθὲν διὰ 8450, δίδωσι σαυροφόρα 3. Τὸ δὲ κατάλοιπον 4930, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 4 (164, 218), καὶ διαιρεθὲν καὶ τοῦτο ἀποδίδωσι 2 φέννιγα σὺν λειψάνῳ $\fr2{28}{845}$ φεννίγου.

Πρόβλημα Β΄.

219. Τοῦτε διαιρετέου καὶ διαιρέτου ὁμοφυῶν ὄντων, ὥσπερ ἐπὶ τοῦ ἐσχάτου τῶν ἐκτεθέντων ὑποδειγμάτων· τῶν δὲ

τοῦ πηλίκου μονάδων ὀφειλουσῶν ἑτεροφυῶν εἶναι τοῦ διαιρετέου, ποιῆσαι ἐν τάυτῃ τῇ περιπτώσει τὴν διαίρεσιν.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Ἀνήχθω ὅ,τε διαιρετέος ϗ ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον εἶδος τῶν τοῦ διαιρετέου, ϗ διῃρήσθω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς διὰ τοῦ δευτέρου. β΄. πεπολλαπλασιάσθω τὸ κατάλοιπον, εἰ τύχοι, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἐμφαίνοντα, ποσάκις μονὰς τοῦ ἤδη εἰς πηλίκον γραφησομένου εἴδους ἐμπεριέχεται τῇ μονάδι τοῦ ἄρτι γεγραμμένου πηλίκου· ἐπὶ δὲ τούτου τοῦ προκύπτοντος ἐπανειλήφθω τὰ τῆς διαιρέσεως, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Πόσας λίτρας ὠνήσομαι ὠνίων διὰ λιτρῶν νομίσματος 17, σολδίων 9, δηναρίων 10, κατὰ λόγον τριῶν νομίσματος λιτρῶν πρὸς τὴν λίτραν τοῦ ὠνίου;

ΛΥΣΙΣ. Αἱ τοῦ πηλίκου μονάδες ἔσονται πάντως λίτραι σταθμοῦ, ἑτεροειδεῖς δήπου τῶν τοῦ διαιρετέου. α΄. τοιγαροῦν ἀνήχθω ὅ,τε διαιρετέος ϗ ὁ διαιρέτης ἐπὶ δηνάρια· 4198, διαιρεθέντα διὰ 720 παρέχουσι 5 λίτρας σταθμοῦ· τὸ τοίνυν μετὰ τοῦτο ἄμεσον πηλίκον ἔσονται οὐγγίαι, ὧν 16 περιέχει 1 λίτρα· πεπολλαπλασιάσθω δὴ τὸ λείψανον 548 ἐπὶ 16· τὸ δὲ προκύπτον 9568, διαιρεθὲν διὰ 720, παρέχει οὐγγίας 13, λειπομένων 208, αἳ, ἐπεὶ τὸ ἑξῆς πηλίκον ἔσται δραχμαὶ, πεπολλαπλασιάσθων ἐπὶ 8· ὁ δὲ 1664 προκύπτων, διαιρεθεὶς διὰ 720, δίδωσι δραχμὰς 2, μετὰ καταλοίπου $\frac{224}{720}$ δραχμῆς.

ΒΑΣΑΝΟΣ. Πολλαπλασιασθέντος τοῦ εὑρημένου πηλίκου ἐπὶ 3 λίτρας (211) πρόεισιν ὁ διαιρετέος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ὅ,τε διαιρετέος ϗ ὁ διαιρέτης ἐν τῷ ἐπὶ δηνάρια ἀνάγεσθαι, ἐπὶ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιαθέντες ἀριθμὸν ἑκάτερος, ἀμετακίνητον πάντως τὸ πηλίκον διασώσουσι· ἀλλὰ, πρὸ τῆς ἀναγωγῆς, 17

λίτραι νομίσματος, διαιρέμεναι διὰ 3 λιτρῶν τοιέτων, παρέχεσι 5 λίτρας ϛαθμε μετὰ λειψάνε 2: ϗ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν ἄρα ἀνάγκη προκύψαι πρῶτον πηλίκον 5 λίτρας ἐν ϛαθμῷ. Περὶ δέ γε τε δευτέρε πηλίκε, ἐπειδὴ ἑκάϛη αὐτε μονὰς ὑποδεκχεξαπλασία ἐϛὶ τῆς τε πρώτε, δεόντως ἄρα τὸ κατάλοιπον πεπολλαπλασίαϛαι ἐπὶ 16, κτ. Ο. Ε. Δ.

Πρόβλημα Γ′.

220. Διελεῖν ἀριθμὸν συμμιγῆ ἢ ἀμιγῆ δι' ἀριθμε συμμίγες.

ΛΥΣΙΣ. Ἀνήχθω ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ ἐλάχιϛον τῶν ἐν ἑαυτῷ εἰδῶν· ἔτως ἂν ἀμιγες γεγονότος ϗ τε διαιρέτε, ῥᾷϛα ἡ διαίρεσις γενήσεται κατὰ τὰ ἄρτι ὀροθεντηθέντα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α′. 6 ὀργυιαὶ, ϗ 5 πόδες κατὰ μῆκος, τετίμηνται 47 λιτρῶν ϗ 3 σολδίων· πόσε ἂρ' ἕκαϛος πες; ὁ διαιρέτης, εἴτ' ἂν 6 ὀργυιαὶ ϗ 5 πόδες, ἀναχθεὶς ἐπὶ πόδας 41, ἀμιγὴς ἀποτελεῖται· διαιρεθέντων ἂν 47 λιτρῶν ϗ 3 σολδίων διὰ 41 (218), εὑρεθήσεται ἡ ἑκάϛε ποδὸς τιμὴ 1 λίτρα, ϗ 3 σολδία.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β′. Περιηγητής τις ἐν σπάνει καταϛὰς τῆς δαπάνης, ὁρᾷ ἑαυτὸν εὐμοιρεντα μόνον γροσίων 88 ϗ παράδων 8· δαπανᾷ δὲ καθ' ἑκάϛην γρόσσια 8, ϗ παράδας 16· πόσον ἂρα χρόνον ἔτι αὐτῷ ἀρκέσεσιν ἃ ἔχει χρήματα;

Τε διαιρέτε τὰ 8 γρόσια ϗ 16 παράδαι ἀνήχθωσαν ἐπὶ παράδας, οἵτινες ἔσονται 336, εἴτ' ἂν ἀριθμὸς ἀμιγής· ἀνήχθω δὲ ὡσαύτως ἐπὶ παράδας ϗ ὁ διαιρετέος· 3528, διαιρεθέντες διὰ 336, ποιεσιν ἡμέρας 10,

λειπομένων 168, ᾶ, ἤτοι ἐφ' ὥρας ἀνήχθωσαν, πολλαπλασιαζόμενα δὶ 24, ϗ διηρήσθωσαν διὰ 336, ὅθεν προκύψεσιν ὧραι 12· ἢ γεγράφθωσαν ἐν σχήματι κλάσματος, εἴτ' ἓν $\frac{168}{336}$, ὅπερ, ἐφ' ἁπλεςέραν ἔκθεσιν ἀναχθὲν, παρέξει $\frac{1}{2}$ ἡμέραν· ἕξει ἄρα ἡμῖν ὁ περιηγητὴς δαπανᾷν ἡμέρας 10 ϗ ὥρας 12.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων.

221. ΑΙΤΗΜΑ. Αἰτῶ δὴ μονάδα, ἣν ἄντις βϑλοιτο, λέγω δὲ οἷον ὀργιὰν, ὀκᾶν, πλανήτην κτ. συντίθεσθαι ἐκ δέκα καινῶν μονάδων, ἢ μερῶν ἰσαλλήλων· ἑκάςη ἓν τῶν καινῶν τϑτων ἐςὶν $\frac{1}{10}$ τῆς πρώτης. Αἰτῶ δὲ ϗ ἑκάςην τῶν δευτέρων τϑτων μονάδων συγκεῖσθαι ἐξ ἄλλων δέκα· ἑκάςη ἓν τῶν τρίτων τϑτων μονάδων ἐςὶ τῶν δευτέρων μὲν ἑκάςης $\frac{1}{10}$, τῶν δὲ πρώτων $\frac{1}{100}$· ἐὰν δ' αἰτήσω ἔτι ϗ ἑκάςην τϑτων συντίθεσθαι αὖ ἐκ δέκα ἄλλων· τϑτων τῶν τετάρτων ἑκάςη μονάς ἐςι $\frac{1}{10}$ μὲν τῶν τρίτων, $\frac{1}{100}$ τῶν δετέρων, $\frac{1}{1000}$ δὲ τῶν πρώτων, καὶ ὕτως ἐφεξῆς· ἐντεῦθεν ἆρα ἀναφύενται τὰ καλϑμενα *δεκαδικὰ κλάσματα*.

222. ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. Α΄. Ἅπαν ἄρα δεκαδικὸν κλάσμα παρονομαςὴν ἔχει 1 σὺν ἑνὶ ἢ πλείοσι 0· οἷον $\frac{5}{10}$, $\frac{27}{100}$ κτ.

223. Β΄. Ἐὰν ἀρισερόθεν ἐπὶ τὰ δεξιὰ χωρῶσι τάδε τὰ κλάσματα κατὰ τὴν σχετικὴν αὐτῶν δύναμιν, ἀρχόμενα ἐκ τῶν δεκαδικῶν, ἡ δύναμις αὐτῶν ἐλαττωθήσε.

ται κατὰ τὰς ἐκ διαδοχῆς μονάδας τῶν ἀριθμῶν ἐν τοιᾶδε τάξει, δεκατημόρια, ἑκατοςημόρια, χιλιοςημόρια, μυριοςημόρια, ἑκατοντάκις χιλιοςημόρια, μιλλιονιοςημόρια κτ.

224. ΥΠΟΔΕΙΜΓΑ. Τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν θηρωμένοις, εὑρίσκεται, ὅτι ἡ διάμετρος αὐτῆς, ἀντὶ μονάδος ληφθεῖσα, τριπλασιαζομένη, ἰσῆται τῇ περιφερείᾳ σὺν $\frac{1}{10}$, σὺν $\frac{4}{100}$ σὺν $\frac{1}{1000}$ σὺν $\frac{5}{10000}$ κτ. τῆς διαμέτρε· ἐὰν ἓν γραφῇ πρῶτον μὲν ὁ ὁλοχερὴς 3, εἶτα πρὸς δεξιὰν αὐτῦ οἱ ἀριθμηταὶ 1, 4, 1, 5, κατὰ τὴν τάξιν τῶν δυνάμεων, ἀποχωριζόμενοι τῦ ὁλοχερῦς διὰ τῆς (,) ὑποδιαςολῆς κατὰ τόνδε τὸν τρόπον 3,1415, ἡ μὲν 1, ἡ ἀμέσως τῷ 3 παρακειμένη, δηλώσει $\frac{1}{10}$· 4 δὲ, δηλώσϋσι $\frac{4}{100}$· 1 δὲ, $\frac{1}{1000}$· 5 δὲ, $\frac{5}{10000}$.

225. Γ΄. Παρετετηρηκότες ἄρα, ὅτι ὁ μὲν κατὰ δεξιὰν τῆς ὑποδιαςολῆς πρῶτος χαρακτὴρ δεκατημόρια σημαίνει, ὁ δὲ δεύτερος ἑκατοςημόρια ϗ ἑξῆς ὕτω, ῥᾷςα εὑρήσομεν τὴν ἑνός τινος χαρακτῆρος δύναμιν, ἀναγινώσκοντες ἐπὶ τῶν μετὰ τὴν διαςολὴν χαρακτήρων κατὰ τάξιν ὕτω· δεκατημόρια, ἑκατοςημόρια, χιλιοςημόρια κτ. ἑςτ᾽ ἂν ἐφικώμεθα τῦ χαρακτῆρος ἐκείνυ· οἷον, εὑρεῖν πρόκειται ἐν τῷ 1,000052 τὴν δύναμιν τῦ 5, ἐπεὶ εὑρίσκεται ἐν τοῖς ἑκατοντάκις χιλιοςημορίοις, ἔςιν ἄρα $\frac{5}{100000}$, 2 δὲ ἐμφαίνει μιλλιονιοςημόρια ἢ $\frac{2}{1000000}$.

226. Δ΄. Ἅμα ἐν τῷ ὀφθῆναι τὴν τάξιν, ἢ τὸν χῶρον, ἐφ᾽ ὃ ἐςιν ὁ δεκαδικὸς χαρακτὴρ, γνωσθήσεται ἡ δύναμις, μηδὲ τὴν ἀρχὴν τῦ παρονομαςῦ γραφέντος· ὕτως ἰδὼν τὸν 5 ἐπὶ τῦ πέμπτυ χώρυ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ ὑποδείγματι, συνάγω ἐκ τέτυ, ὅτι ὁ παρονομαςὴς αὐτῦ ἐςὶ 1 παρακολυθέντων αὐτῇ ϗ 0 πέντε, ἢ 100000.

227. Ε΄. Ἐκκειμένων πρὸς δεξιὰν τῦ ὁλοχερῦς τῶν

δεκατημορίων, εἶτα τῶν ἑκατοστημορίων κτ., καθ' ἣν ἤδη σεσημειώκαμεν τάξιν, πᾶσα μονὰς, πρὸς τὸ δοκοῦν ἀπό τινος εἰλημμένη χαρακτῆρος, ἀεὶ τὸ δεκαπλάσιον δύναται τῆς τοῦ πρὸς δεξιὰν ἀμέσεως γειτνιάζοντος χαρακτῆρος· οὕτως ἐπὶ τοῦ 3, 1, 4, 5· 1 τῶν τοῦ 3 ὁλοσχεροῦς σημαίνει $\frac{10}{10}$· ταύτης μέντοι σημαίνει μόνον $\frac{1}{10}$ μονὰς τῶν τοῦ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν χαρακτῆρος· 1 δὲ ἐκ τῶν τοῦ 4 καθ' ἑαυτὴν μέν ἐστι $\frac{1}{100}$· ἀλλὰ 1, ἢ $\frac{1}{10}$, ὃ κεῖται πρὸς ἀριστερὰν τοῦ 4 δεκαπλάσιον δύναται τοῦ $\frac{1}{100}$, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

228. Ϛʹ. Εἰκὸς ἄρα δέκα μονάδας χώρου τινὸς ἰσχύειν ἀεὶ ἴσον μιᾷ τοῦ ἐγγὺς πρὸς ἀριστερὰν παρακειμένου, οὕτω $\frac{10}{1000}$ ἐστιν ἴσον $\frac{1}{100}$, $\frac{10}{100}$ ἴσον $\frac{1}{10}$, $\frac{10}{10}$ ἴσον μονάδι ὁλοσχερεῖ.

229. Ζʹ. Ταὐτὸν ἄρα, ὃ καὶ τοῖς ὁλοσχερέσι τῶν ἀριθμῶν, ξυμβαῖνον καὶ τοῖς δεκαδικοῖς ὁρᾶται κατά γε τὴν σχετικὴν αὐτῶν δύναμιν· ἐκεῖθι γὰρ μονάδες δέκα ἀριθμοῦ τινος ἰσοσθενοῦν μονάδι τοῦ ἀμέσως πρὸς ἀριστερὰν παρακειμένου (33)· καθάπερ ἤδη καὶ ἐν τοῖς δεκαδικοῖς.

230. Ηʹ. Ἵν' ἐν χαρακτῆρσιν ἐκτεθῇ κλάσματι δεκαδικὸν, διὰ λόγου ἐκπεφρασμένον, γράφοντες τὸν ὁλοσχερῆ, ἢ, εἰ μὴ παρείη ὁλοσχερὴς, 0, καὶ τιθέντες πρὸς δεξιὰν τοῦ ὁλοσχεροῦς ὑποδιαστολὴν, πρὸς δεξιὰν αὐτῆς γράφομεν τὸν τοῦ κλάσματος ἀριθμητὴν τόσους πλὴν ἑνὸς περιέχοντα χαρακτῆρας, ὅσους περιέχει ὁ παρονομαστὴς, αὐτοῦ δὲ τοῦ παρονομαστοῦ παραμελοῦμεν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ. Εἰς ἔκθεσιν λεγῶν 4 καὶ $\frac{5}{10}$ λέγας, τεθείσθω εἷς μόνος χαρακτὴρ ἐν δεξιᾷ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἅτε δυοῖν εὐμοιροῦντος τοῦ παρονομαστοῦ χαρακτήρων, γραφέντων 4,5· ὑπὲρ δὲ $\frac{6}{100}$, γεγράφθω· 0,06, τι-

θεμένων δύω χαρακτήρων κατὰ δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς διὰ τοὺς τοῦ παρονομαστοῦ τρεῖς· ἐπεὶ δὲ μηδεὶς πάρεστιν ὁλοχερής, τίθεται ο ἀντὶ τῶν ὁλοχερῶν· ὅτι δὲ 6 ἐκδηλοῖ ἑκατοστημόρια, δεκατημορίων χήτει, γράφεται ἐν τῷ αὐτῶν χώρῳ ο· ὑπὲρ δὲ $\frac{37}{10000}$, γεγράφθω 0,0037. Τὸ γὰρ $\frac{37}{10000}$ ἐστὶ $\frac{30}{10000}$ σὺν $\frac{7}{10000}$· ἀλλὰ $\frac{30}{10000}$ ἐστὶν ἴσον $\frac{3}{1000}$ (173. Β΄.)· ἄρα τίθετει ὁ 3 ἐν τῷ τῶν χιλιοστῶν χώρῳ, σημειουμένων δύω ο κατ᾽ ἀριστερὰν, τὰ μὲν ὑπὲρ τῶν δεκατημορίων, ὑπὲρ δὲ τῶν ἑκατοστημορίων θάτερον.

231. Θ΄. Τοὐναντίον ἄρα, ἵν᾽ ἐκφρασθῶσιν οἱ ἐκ τεθειμένοι δεκαδικοὶ χαρακτῆρες, ἐξέσται ἐκ τῶν εἰρημένων, ἢ ἑκάστῳ χαρακτῆρι ἀπονεῖμαι τὸν κατὰ τὸν οἰκεῖον χῶρον ἐπανήκοντα οἱ παρονομαστὴν, ἢ ἅμα πᾶσι παρονομαστὴν ἀποδοῦναι, ἐκδηλούμενον διὰ 1, συνεφελκούσης δεξιόθεν τοσαῦτα ο, ὅσοι πάρεισιν ἐν τοῖς δεξιοῖς τῆς ὑποδιαστολῆς χαρακτῆρες.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Πλανήτου τινὸς ἡ διάμετρος, τῆς κατὰ τὴν γῆν διαμέτρου ὡς μονάδος τεθείσης, εὑρίσκεται οὖσα 25,235· ἀπαγγελοῦμεν οὖν· 25 γῆς διάμετροι σὺν $\frac{2}{10}$ σὺν $\frac{3}{100}$ σὺν $\frac{5}{1000}$ τῆς διαμέτρου· ἢ γοῦν ἀφοσιοῦντες τῷ 235 ἀριθμητῇ παρονομαστὴν 1 σὺν τρισὶ ο· ἀπαγγελοῦμεν ἐπὶ 25 σὺν $\frac{235}{1000}$· 25 διάμετροι γῆς σὺν 235 χιλιοστοῖς τῆς διαμέτρου.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἐπὶ 0,0502, ἀπαγγελοῦμεν, ἢ $\frac{5}{100}$ σὺν $\frac{2}{10000}$· ἢ τιθέντες παρονομαστὴν 1 σὺν τέσσαρσι ο, ὡς τεσσάρων ὄντων χαρακτήρων πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ ποιοῦντες $\frac{502}{10000}$· 502 μυριοστημόρια.

232. Ι΄. Ὅσα ἂν γραφῶσι ο κατὰ δεξιὰν τῶν τοιῶνδε κλασμάτων, οὐ μὴ μετακινηθήσεται ἡ τοῦ κλάσμα-

τος δύναμις· ὅτως ὐδὲν διενήνοχε 0,3000, ἢ 0,3, εἴτ' ὂν $\frac{3}{10}$· καθ' ἑαυτὸ δὲ τὐτὶ φανερόν· πάντα γὰρ τὰ δεξιόθεν τῦ 3 μηδενικὰ ἐκδηλῦσι μόνον ὅτι παρὰ τὰ $\frac{3}{10}$ μηδέν ἐςι μήτε ἑκατοςημόριον, μήτε χιλιοςὸν κτ.. Ὥσπερ ἀμέλει τὰ κατ' ἀριςερὰν τῶν ὁλοχερῶν, ὡς ἐπὶ τῦ 47, κατὰ τόνδε τὸν τρόπον, 00047, ἐκδηλῦσι μόνον, ὅτι μηδεμία πάρεςιν ἑκατοντὰς, μήτε χιλιὰς κτ. Ἄλλως· εἰς ἔκφρασιν 0,3000 λαμβάνεται παρονομαςὴς 10000 (231)· ἀλλὰ $\frac{3000}{10000}$ ἐςὶν ἴσον τῷ $\frac{3}{10}$, ἢ 0,3· ἄρα κτ.

233. ΙΑ΄. Ὁσοιδηποτῦν τῶν δεξιόσε θετικῶν χαρακτήρων, ὐδέποτε ἰσοδυναμήσυσι 1 τῶν ἐκ τῶν λαιῶν· ὕτως ὁ 2,0, φέρ' εἰπεῖν, μείζων ἐςὶν ἢ 1,9999999· ἵνα γὰρ ὗτος ἐκείνῳ ἐξισωθῇ δεήσει 1 προσθεῖναι τῷ ἐν δεξιοῖς ἑβδόμῳ 9, ἥτις παρεχομένη τὸν 2 ὁλοχερῆ, ἀφανίζει πάντας τὺς 9, ὡς δὴ ϗ ὁρᾶται ἐν τῇ ἑπομένῃ προσθέσει· ἄρα ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ὐδὲν ὅλως ἐπαύξυσι τὴν τῦ ὁλοχερῦς 2 δύναμιν (232).

$$\begin{array}{r} 1,9999999 \\ 1 \\ \hline 2,0000000 \end{array}$$

234. Διὰ τῦ αὐτῦ λογισμῦ πᾶς τις πεισθήσεται, ὡς ὅσοι δήποτε θετικοὶ χαρακτῆρες τῶν ἐν τῇ δεξιᾷ ὐδέποτε ἰσοδυναμῦσι μονάδι τῦ ἐν λαιοῖς χαρακτῆρος· καὶ γὰρ 0,3, ἢ $\frac{3}{10}$ μείζων ἐςὶ τῦ 0,299999999 τῇ ποσότητι $\frac{1}{1000000000}$.

235. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἐκθέσθαι ὑπὲρ παντὸς πράγματος, ἓν εἶδος μέτρυ, ϗ τὸν τρόπον, καθ' ὃν ῥᾶςα λογισθήσονται αὐτῦ τὰ μέρη.

ΛΥΣΙΣ. Α΄. Δυνατὸν ἂν εἴη διὰ κοινῦ ψηφίσματος διορίσαι τῦ μήκυς μέτρον, ἢ γραμμὴν κατὰ μῆκος, εἰλημμένην πρὸς τὸ δοκῦν, τὸν βασιλικὸν καλύμενον, φέρ' εἰπεῖν, πόδα· τοιῦτόν τι σχέδιον θεωρηθείη ἂν κοινὸν ἐπὶ

πάσης ἐπικρατείας, ϗ πάντα τὰ τῶν ἀνθρώπων ἔργα παραβληθείησαν τῷ τοιῷδε σχεδίῳ. Διαιρεθείη δὲ τοδὶ τὸ μέτρον τὸ, ὡς ὅρος συγκρίσεως, ἐκληφθησόμενον, εἰς δέκα ἰσάλληλα μέρη, ἃ σημανθείη, εἰ δόξειεν, ὀνόματι καινῷ, κληθέντα, φέρ' εἰπεῖν, δάκτυλοι. Ταῦτα δὲ τῷ δεκατημόρια, ἢ δάκτυλοι, ὑποδιαιρεθείησαν ἂν ἔτι εἰς ἄλλα δέκα μέρη, ἃ κληθείησαν, εἰ ϗ τοῦτο δόξειε, γραμμαὶ, οὖσαι ϗ αὐταὶ τοῦ δακτύλου δεκατημόρια, ϗ κατὰ τὸ ἀκόλουθον ἑκατοστημόρια τοῦ ποδὸς, ϗ ἀεὶ οὕτω.

Β'. Ὁ τετραγωνικὸς ποῦς, συνιστάμενος ἐκ τοῦ κατὰ μῆκος ποδὸς, εἴη ἂν τὸ τῶν ἐπιφανειῶν μέτρον· ὁ δὲ κυβικὸς ἐκ τοῦ τετραγωνικοῦ ποδὸς, εἴη ἂν τὸ τῶν στερεῶν ϗ ὑγρῶν μέτρον· ἑκάτερα δὲ διαιρεθείη ἂν εἰς δέκατα, ἑκατοστὰ, χιλιοστὰ κτ.

Γ'. Περὶ δέ γε τῶν σταθμῶν, κυβικὸς εἷς ποῦς ὕλης ἧστινοσοῦν, τῆς μέντοι κατὰ καιροὺς μὴ μεταλλοιουμένης, οἷον μολύβδου, κληθείη ἂν Τάλαντον. Παραβληθείη δὲ τούτῳ τῷ σταθμῷ διὰ ζυγοῦ δικαιοτάτου πάνθ' ὅσα βάρος ἔχει ἐν τῷ μετ' ἀλλήλων κοινωνικῷ βίῳ. Τουτὶ δὲ τὸ βάρος διαιρεθείη ἂν ϗ αὐτὸ εἰς δέκα μέρη ἰσάλληλα, ἃ κληθείη, εἰ δόξειε, λίτραι· αἱ δὲ εἰς δέκα ἄλλα μέρη, ἃ κληθείησαν οὐγγίαι, ὧν ἑκάστη εἰς δέκα ἄλλα ἰσάλληλα, ἃ δραχμαὶ κληθείησαν κτ.

Δ'. Περὶ δὲ τῶν νομισμάτων, ληφθείη ἂν κυβίσκος ἀργύρου καθαροῦ, ὃς εἴη ἀκριβῶς δεκαδικὸν τοῦ κυβικοῦ ποδὸς, οἷον $\frac{1}{1000}$· αὕτη δὲ ἡ μονὰς, ἢ τὸ τῶν νομισμάτων μέτρον. διαιρεθείη ἂν ἐκτιμηθὲν εἰς δεκαδικὰ, ὧν ἕκαστον κληθείη δέκατον· τὸ δὲ αὖ εἰς ἄλλα δεκατημόρια, ὧν ἕκαστον κληθείη ἂν ἑκατοστόν· αὕτη δὲ εἰς καινὰ δεκατημόρια, ἃ κληθείη ἂν χιλιοστὰ κτ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ο῾ γὰρ ἔτω τεθεὶς πῦς, ἢ ἐν ἀκριβὲς τῦ ποδὸς δεκατημόριον, εἴη ἂν τὸ μόνον μέτρον ὑπὲρ παντὸς πράγματος· ὁ δὲ λογισμὸς τῶν διαφόρων μερῶν τῦδε τῦ μέτρυ, ἀεὶ ὄντων δεκαδικῶν, γένοιτ᾽ ἂν ἐν τῇ αὐτῇ εὐμαρείᾳ, εἰ μὴ ϗ πλείονι, ὥσπερ ϗ ὁ τῶν ὁλοχερῶν (229). Ο. Ε. Π. ϗ Δ.

236. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο῾ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων λογισμὸς, εἰ ϗ μηκέτι τῷ κοινωνικῷ βίῳ εἰς χρῆσιν παρείληπται, τοῖς μέν ται Γεωμέτραις εὐχρηςότοτος ὑπάρχει· δι᾽ αὐτῦ γὰρ, ὡς ὀψόμεθα, ῥιζῶν ἐξαγωγὰς, λογαρίθμων τε, ϗ ἡμιτόνων κτ. πίνακας ἐπιτηδεύυσι.

237. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Λείψανον διαιρέσεως, ἢ κλάσμα τὸ τυχὸν ἐπὶ δεκαδικὰ ἀναγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Γράψον ο πρὸς δεξιὰν τῦ λειψάνυ, ἢ τῦ ἀριθμητῦ, ϗ δίελε τὸ ὅλον διὰ τῦ διαιρέτυ, ἢ τῦ παρονομαςῦ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Τῦ 73 διὰ 5 διαιρεθέντος, πηλίκον προέκυψε 14, ϗ κατάλοιπον 3· ο ἒν γραφέντος ἐν δεξιᾷ τῦ καταλοίπυ 3, $\frac{30}{5}$ δίδωσιν 6· ἅπαν ἄρα τὸ πηλίκον ἔςαι 14,6 (230).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Υ῾πὲρ τῦ λειψάνυ, ἢ κλάσματος $\frac{9}{20}$, γράψον ο ἐν δεξιᾷ τῦ 9, ϗ δίελε 90 διὰ 20· πηλίκον ἔςαι 4 μετὰ καταλοίπυ 10· τύτυ δὲ πρὸς δεξιὰν γράψον ο, ϗ διέλε 100 διὰ 20, ὅθεν ἔςαι πηλίκον 5· ἔςιν ἄρα τὸ δεκαδικὸν κλάσμα ο, 45 ἡ δύναμις τῦ $\frac{9}{20}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε᾽κ τῦ ἐν δεξιᾷ τεθέντος ο, ὁ διαιρετέος 90, γεγονὼς δεκάκις μείζων, παρέξει πηλίκον 4 ὡσαύτως δεκάκις μεῖζον· ἐμφαίνει ἄρα ὁ 4 δεκατημόρια· πρὸς δεξιὰν δὲ τῦ ἐκ ταύτης τῆς διαιρέσεως πηλίκυ 10 γρα-

φέντος ἔτι ο, ὁ νέος διαιρετέος ἀποκαταςήσεται ἑκατονταπλάσιος. Τὸ ἄρα πηλίκον 5 ἐμφαίνει ἑκατοςημόρια· ἀλλὰ ο, 45 δηλοῖ $\frac{4}{10}$ σὺν $\frac{5}{100}$ (231) ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Πλανήτȣ τινὸς περιφέρειά ἐςιν ἴση $\frac{1065000}{113}$ λέγας· ἵν' ἦν ἐκτιμηθῇ ἡ τῆς περιφερείας ταύτης δύναμις, εὑρίσκεται τὸ κατ' ἀρχὰς (146) ἐν ὁλοχερέσι λέγαι 9424, μετὰ καταλοίπȣ 88· γραφέντος ȣ̃ν ἐν δεξιᾷ τȣ́τȣ ο, διῃρήσθω 880 διὰ 113, ὅθεν ἔςαι πηλίκον 7 μετὰ καταλοίπȣ 89. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἐπανειλημμένης τῆς διαιρέσεως, εὑρεθήσεται ἔντε ὁλοχερέσι ϗ δεκαδικοῖς πηλίκον 9424, 7787610619469026 5 κτ.

238. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἰδεῖν ἔξεςιν ἐπὶ τȣ̃δε τȣ̃ ὑποδείγματος, ὡς ἔσθ' ὅτε τελείως ἐπὶ δεκαδικὰ ἀναχθῆναι λείψανον διαιρέσεως ἢ κλάσμα, ἀνένδεκτον· καίτοι ἀεὶ εὑρεθῆναι δύναται ἀριθμὸς δεκαδικῶν ὡς ἔγγιςα τȣ̃ ἀληθȣ̃ς γινόμενος. Ἐπὶ γὰρ τȣ̃δε τȣ̃ ὑποδείγματος, συνεχιζομένης τῆς διαιρέσεως γραφῆναι δύνανται ἐν δεξιᾷ τȣ̃ ἐσχάτȣ χαρακτῆρος δεκαδικȣ̃ 5, νέοι χαρακτῆρες ἄπειροι δεκαδικοὶ, οἵτινες ἅμα ȣ̃τε μονάδι τȣ̃ 5 ἰσοδυναμȣ̃σι (234)· ȣ̃τως ἄρα τὸ καταλειφθὲν μετὰ τὸν χαρακτῆρα 5, ȣ̓κ ἰσοδυναμεῖ ȣ̃τε μονάδι τῶν τȣ̃ 5, τȣτέςι ἐπὶ τȣ̃ δεκάτȣ ἑβδόμȣ χώρȣ· ἐκτέθειται ἄρα ἡ ζητȣμένη τȣ̃ πηλίκȣ δύναμις ἐλάττων σχεδὸν $\frac{1}{100000000000000000}$ λέγας, εἴτ' ȣ̃ν ἐλάττων ἢ $\frac{1}{100000000000}$ σίγματος (149).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ὡσαύτως περὶ τȣ̃ $\frac{2}{3}$ εὑρεθήσονται ο,666666666 κτ.

239. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Συνάψαι δεκαδικὰ κλάσματα.

ΛΥΣΙΣ. Ποίησον ὡς κᾂν τοῖς ὁλοχερέσι, γράφων

μετὰ προσοχῆς πάντα τὰ δεκαδικὰ κατὰ ϛήλην μίαν ἄνωθεν ἐπὶ τὰ κάτω, ὡσαύτως ἅπαντα τὰ ἑκαϛημόρια ϗ ἑξῆς ἔτω.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔϛω συναπτέα 15, 37, ϗ 0,005, ϗ 4, 3, ϗ 0,89· γράψον ἓν ὁλοχερεῖς ὑπὸ ὁλοχερεῖς, κλάσματα ὑπὸ κλάσματα, ὡς ὁρᾶται ἐνταῦθα· μέτελθε εἶτα τὰ τῆς συνάψεως, ὡς κἂν τοῖς ὁλοχερέσιν· ἔϛαι δὴ ἄθροισμα 20 ϗ $\frac{565}{1000}$.

```
 15,37
  0,005
  4,3
  0,89
-------
 20,565
```

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπερείδεται ἡ τῆς πράξεως θεωρία ἐπὶ τοῖς σεσημειωμένοις (228)· δέκα, φέρ' εἰπεῖν ἑκατοϛημόρια συνισῶσιν ἓν δεκατημόριον, ϗ δέκα δεκατημόρια, μίαν μονάδα τῶν ὁλοχερῶν.

ΥΠΟΔΕΙΔΜΑ Β΄.

```
 35,9
  0,07
118,2054
  1,8
  0,99
  8,70907
---------
165,67447
```

240. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Ἀφελεῖν κλάσματα δεκαδικά.

ΛΥΣΙΣ. Ὥσπερ ἐπὶ τῆς προσθέσεως, ἔτω κἀνταῦθα γράψον ὁλοχερεῖς ὑπὸ ὁλοχερεῖς, κλάσματα ὑπὸ κλάσματα, ἕκαϛον χαρακτῆρα κατὰ τὴν σχετικὴν αὐτῦ δύναμιν· ποίησον εἶτα τὴν ἀφαίρεσιν, ὥσπερ ἐπὶ τῶν ὁλοχερῶν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἄγγος τι χωρεῖ ἐγγίας 15, 072 πλὴν 3,98· γράψον ἔν. . . .

Ἀφαιρέσεως δὲ γενομένης, ὡς κἀπὶ τῶν ὁλοχερῶν, εὑρίσκεται 11, 092.

```
15,072
 3,98
------
11,092
```

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἀπὸ λεγῶν 9 ἀφελεῖν ζητεῖται 5,0942· γράψον τέσσαρα 0 ἐκ δεξιῶν τῦ 9, ὅπερ ἥκιϛα λυμαίνεται τὴν αὐτῦ δύναμιν (232), ϗ ἄφελε, ὥσπερ ὡροθέτηται.

```
9,0000
5,0942
------
3,9058
```

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ μὲν δεῖξις ἡ αὐτή ἐςι τῇ τῆς προσθέσεως· ἡ δ' ἀμφοτέρων βάσανός ἐςιν ἡ αὐτὴ, ἥτις κἀπὶ τῶν ὁλοσχερῶν.

241. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Πολλαπλασιάσαι κλάσματα δεκαδικά.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασίασον τὰ δοθέντα δεκαδικὰ, ὡς εἰ ἦσαν ἀριθμοὶ ὁλοσχερεῖς· εἶτα διαχώρισον ἐκ δεξιῶν τοῦ προκύπτοντος τοσούτους χαρακτῆρας, ὅσα ἦσαν κοινῇ τῷ τε πολλαπλασιαςέῳ καὶ τῷ πολλαπλασιαςῇ δεκαδικά.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Πρόκειται τετραγωνίσαι, εἴτ' οὖν ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαι τὸν 2,05· πολλαπλασίασον τοίνυν κατὰ τοὺς ἐν τοῖς ὁλοσχερέσιν ἀποδοθέντας κανόνας· καὶ ἐπεὶ πάρεισι δύω δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τῷ πολλαπλασιαςέῳ, καὶ τοσοίδε τῷ πολλαπλασιαςῇ, διαχώρισον τέσσαρας χαρακτῆρας ἐκ δεξιῶν τοῦ προκύπτοντος· ἔςαι οὖν οὕτω 4,2025.

	2,05
	2,05
	10 25
	0 0
	410
	4,20 25

ΔΕΙΞΙΣ. 2,05 ἐςὶ 2 σὺν $\frac{5}{100}$, εἴτ' οὖν $\frac{205}{100}$ (170), ἀλλαμὴν $\frac{205}{100}$, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ $\frac{205}{100}$, παράγει $\frac{42025}{10000}$· τοῦτο δέ ἐςι τῷόντι ταυτὸν τῷ 4 $\frac{2025}{10000}$· τουτέςι ταυτὸν τῷ 4,2025 (230)· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

242. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δὲ τῷ προκύπτοντι μὴ παρῶσιν ἱκανοὶ χαρακτῆρες, ἵν' ἀποχωρισθῆναι ἔχωσιν, ὅσοι ὑπάρχουσι δεκαδικοὶ τῷ τε πολλαπλασιαςῇ καὶ πολλαπλασιαςέῳ, τοσαῦτα ο θετέον κατὰ τὰ λαιὰ τοῦ προκύπτοντος, ὥςε ἐξεῖναι τοὺς ἀναγκαίους χαρακτῆρας καταχωρίσαι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Κείσθω οὖν πολλαπλασιάσαι 0,007 διὰ 0,0004· λέγε δὴ τετράκις 7 ποιοῦσιν 28, καὶ ἐπεὶ ἑπτὰ πάρεσι δεκαδιὰ ἀμφοῖν τῷ τε πολλαπλασια-

στῇ ϗ τῷ πολλαπλασιαστέῳ, τίθει μηδενικὰ 5 κατὰ τὰ λαιὰ τοῦ 28, ϗ πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς (242)· ὅθεν ἔσται 0,0000028.

ΔΕΙΞΙΣ. 0,007 ἐστὶν ἴσον $\frac{7}{1000}$ (838) ϗ 0,0004 ἐστὶν ἴσον $\frac{4}{10000}$· ἄρα $\frac{7}{1000}$ πολλαπλασιασθὲν διὰ $\frac{4}{10000}$ δίδωσι $\frac{28}{10000000}$, ὅπερ δύναται ἴσα τῷ 0,0000028 (230).

243. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄. Εὑρεῖν τὴν δύναμιν κλάσματος δεκαδικοῦ, ὀργυιᾶς, λίτρας κτ. ἐμφαίνοντος.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασίασον τὸ κλάσμα διὰ τοῦ ἐμφαίνοντος, ὁσάκις μονὰς τοῦ γραπτέου εἴδους ἐμπεριέχεται τῇ μονάδι τοῦ παριστωμένου κλάσματος.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Πόσοις ποσὶ, δακτύλοις κτ. ἰσοδυναμοῦσι 4,532 ὀργυιᾶς κατὰ μῆκος; δέον οὖν λαβεῖν πρῶτον τοὺς πόδας, πολλαπλασίασον 4,532 ἐπὶ 6, ὅθεν προκύπτει 27,192· πολλαπλασίασον εἶτα τὸ 0,192 ἐπὶ 12 ἵν' εὕροις τοὺς δακτύλους· προκύψει οὖν 2,304· ἑξῆς δὲ πολλαπλασίασον 0,304 ἐπὶ 12 εἰς εὕρεσιν τῶν γραμμῶν· ὅθεν ἔσται 3,648· τέλος δὲ εἰς στιγμάτων εὕρεσιν πολλαπλασίασον ἐπὶ 12 τὸν 0,648· ὅθεν πρόεισι 7,776, ἢ ὅτι ἔγγιστα 8 στίγματα· ἡ ἄρα ὅλη δύναμις, 27 πόδες, 2 δάκτυλοι, 3 γραμμαὶ, 8 στίγματα. Ὁ δέ γε τῆς πράξεως ταύτης λόγος ἕπεται ἐξ ὧν φθάσαντες εἰρήκαμεν (171, 172 κτ.).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. 0,98 κυβικοῦ ποδὸς πόσοις κυβικοῖς δακτύλοις κτ. ἰσοδυναμοῦσι; ὁ μὲν 0,28 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 1728 (156), παράγει 1693,44· ὁ δὲ 44 ἐπὶ 1728, τὸν 760,32· ὁ δὲ 32 ἐπὶ 1728, τὸν 552,96· ἡ ἄρα ὅλη δύναμις, 1693 δάκτυλοι κυβικοὶ, 760 γραμμαὶ, 552 στίγματα κυβικά.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Πόσου τιμῶνται 5,45 ὀργυιᾶς κατὰ μῆκος, κατὰ λόγον τῆς ὀργυιᾶς πρὸς γρόσια 5. Πεπολλαπλασιάσθω πρῶτον ἐπὶ 5· ἐκ δὲ τοῦ προκύπτοντος 27,25, πεπολλαπλασιάσθω ὁ 25 ἐπὶ 40 (243)· ὅθεν προκύψει 10,00· οὕτως ἄρα 5,25 ὀργυιᾶς τιμῶνται γροσίων 27 καὶ 10 παράδων.

244. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Διελεῖν δεκαδικὰ κλάσματα.

ΛΥΣΙΣ. α'. Ἴσωσον τοὺς ἔντε τῷ διαιρετέῳ κἀν τῷ διαιρέτῃ τῶν δεκαδικῶν χώρους, προσιθεὶς, εἰδέοι, κατὰ θατέρου τὰ δεξιὰ ὅσα ἀπόχρη τῶν ο (232). β'. μέτελθε τὰ τῆς διαιρέσεως, ὥσπερ ἐπὶ τῶν ὁλοχερῶν. γ'. εἴτι περιλειφθείη, θέμενος αὐτῷ κατὰ δεξιὰν ο, ἐπανάλαβε τὴν διαίρεσιν, ὡς γέγονεν (237), ὅθεν ἀναφύοντα τὰ δεκαδικά.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἵνα διαιρεθῇ 8,44, διὰ 4, 22, παρατετηρηκότες ὅτι ὁ ἐν τῷ διαιρετέῳ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ἴσουται τῷ τῶν ἐν τῷ διαιρέτῃ, διαιροῦμεν 844 διὰ 422· πηλίκων δ' ἔσαι λειψάνου ἄτερ ὁ 2 ὁλοχερής.

ΔΕΙΞΙΣ. 8,44 ἴσον τῷ $\frac{844}{100}$ (170), καὶ 4,22 ἴσον $\frac{422}{100}$· σαφὲς ἄρα ὅτι $\frac{422}{100}$ δὶς ἔνεςιν ἐπ' ἀκριβὲς τῷ $\frac{844}{100}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἵνα διαιρεθῇ 125,202 διὰ 54, 2, γραπτέον δύω ο πρὸς δεξιὰν τοῦ διαιρέτου, ἵν' ἔχῃ καὶ αὐτὸς ὅσα δεκαδικὰ πάρεισι τῷ διαιρετέῳ· 125202 διαιρεθεὶς διὰ 54200 δίδωσιν ἐν ἀρχῇ τὸν ὁλοχερῆ 2 μετὰ λειψάνου 16802, οὗ πρὸς δεξιὰν θετέον ο· διαιρέσει δὲ προκύπτει 3 πρῶτον δεκαδικὸν μετὰ καταλοίπου 5420· γραπτέον ἔτι ο ἐν δεξιοῖς τοῦδε τοῦ λειψάνου· καὶ εὑρεθήσεται 1 δεύτερον δεκαδικὸν σὺν οὐδενὶ καταλοίπῳ· τὸ ἄρα ὅλον πηλίκον ἔσαι 2,31.

ΔΕΙΞΙΣ. 125,202 ἐςὶν ἴσον τῷ $\frac{125202}{1000}$ (170)· 54,2 δὲ ἴσον τῷ $\frac{542}{10}$, ἢ τῷ $\frac{54200}{1000}$· σαφὲς ἄρα ὅτι 54200 χιλιοςὰ δὶς ἐμπεριέχονται χιλιοςοῖς 125202. Τὸ ἄρα πρῶτον πηλίκον ὀφείλει εἶναι ὁ 2 ὁλοχερής· ἐκ δὲ τῦ προςεθέντος ο ἐν τοῖς δεξιοῖς τῦ πρώτυ λειψάνυ· μονὰς μία τῶν ἐν τῷ ἀμέσως γραφησομένῳ πηλίκῳ 3 ὑποδεκαπλασία ἔςαι 1 μιᾶς τῶν ἐν τῷ πρὸ τύτυ πηλίκῳ 2· 3 ἄρα σημανεῖ $\frac{3}{10}$ κτ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἵνα διαιρεθῇ 4 διὰ 2,5· προςεθέντος ο τῷ 4, διῃρήσθῳ 40 διὰ 25· τῷ δ' αὖ λειψάνῳ 15 προςεθήτω ο· ϗ πηλίκυ προκύψαντος $\frac{6}{10}$, ἐπεὶ μηδὲν καταλείπεται, ἔςαι τὸ ὅλον πηλίκον 1,6.

Βάσανος τῆς πράξεως. Ἐφ' ἑκάςυ τῶν προεκτεθέντων τριῶν ὑποδειγμάτων, τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθὲν ἀποδίδωσι τὸν διαιρετέον (241).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Μεθόδων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδε τῶν Τριῶν.

245. Ο τρόπος, καθ' ὃν, τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, τέταρτος προσευρίσκεται, ὃς περιέχει τοσάκις τὸν τρίτον, ὁσάκις ὁ δεύτερος τὸν πρῶτον, Μέθοδος τῶν τριῶν ἀκέει.

246. Εὑρίσκεται δὲ ὁ τέταρτος ἔτος, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ τρίτος διὰ τε δευτέρε, ὁδ' ἐντεῦθεν προκύπτων διαιρεθῇ διὰ τε πρώτε τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐργάται δύω ἐτεκτήναντο ὀργιὰς 6· πόσας ἂν τεκτανεσιν ἐργάται 5; γράψον ἐφεξῆς, 2, 6, 5· εἶτα πολλαπλασίασον τὸν 6 δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τὰ 5 τρίτε, τὸν δ' ἐντεῦθεν προκύπτοντα 30 διέλε διὰ τε 2 πρώτε ἀριθμε· τὸ ἂν 15 πηλίκον ἐςὶν ἀριθμὸς τῶν, ὧν εἰργάσαντο ἐργάται 5, ὀργιῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπειδὴ ἐργάται δύω εἰργάσαντο 6 ὀργιὰς, εἷς ἄρα εἰργάσατο τῶν 6 τὸ ἥμισυ, ἢ $\frac{6}{2}$ ὀργιᾶς· 5 ἄρα ἐργάται ἐργάσονται πεντάκις τὸ $\frac{6}{2}$, εἴτ' ἂν $\frac{30}{2}$, ὅ ἐςιν ὀργιαὶ 15· σαφὲς ἄρα ἐντεῦθεν, ὡς ἐχρῆν πολ-

λαπλασιάσαι μὲν τὸν 6, δεύτερον ἀριθμὸν, ἐπὶ τὸν 5 τρίτον, τὸν δ' ἐντεῦθεν προκύπτοντα διελεῖν διὰ τȢ πρώτȢ. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τῷ Συμβολικῷ λογισμῷ δειχθήσεται γενικώτερόν τε ϗ ἀκριβέστερον, ὃ ἤδη ἐν ἀριθμοῖς ειδικῶς δέδεικται· τοῖς γὰρ νυνὶ ἀποδεδομένοις ἀγαπήσȢσιν, οἷς ἂν μὴ ἐξείη μὲν ἐπὶ πολὺ ἐνδιατρίψαι τοῖς μαθηματικοῖς, ἐφιεμένοις ἀλλ' Ȣ̂ν ἅλις τῷ τῆς ἀριθμητικῆς λογισμῷ ἐγγεγυμνᾶσθαι.

247. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Πάνθ' ὅσα ἐπιλύονται διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδȢ, ϗ διὰ τῆς ἀποδεδομένης τῶν κλασμάτων θεωρίας ἐπιλυθήσεται· ἐπὶ γὰρ τȢ ἐκτεθέντος ὑποδείγματος ἄνευ τῆς εἰρημένης μεθόδȢ ὅτως ἄντις συλλογίσαιτο· ἄνθρωποι δύω εἰργάσαντο ὀργυιὰς 6· εἷς ἄρ' αὐτῶν εἰργάσατο $\frac{6}{2}$, ἢ $\frac{3}{1}$, ἢ 3· πέντε ἄρα ἐργάσονται πεντάκις 3, εἴτ' Ȣ̂ν 15.

248. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐπὶ βασάνῳ δὲ ταύτης τῆς μεθόδȢ, τεθέντων τȢ μὲν τρίτȢ ἀριθμȢ̂, καὶ τȢ ἄρτι εὑρημένȢ τετάρτȢ ἐν τοῖς χώροις τȢ̂ πρώτȢ ϗ τȢ̂ δευτέρȢ· τȢ́των δὲ γενομένων, τȢ̂ μὲν τρίτȢ, τȢ δὲ τετάρτȢ, γενέσθω καινὴ μέθοδος τῶν τριῶν· ἐν Ȣ̂ν τῷ φθάσαντι ὑποδείγματι, ἔνθ' εὕρηται τέταρτος ὁ 15, ἀντὶ 2, 6, 5, 15, γεγράφθωσαν 5, 15, 2, 6· ϗ πεπολλαπλασιάσθω ὁ δεύτερος ὅρος 15 διὰ τȢ 2 τρίτȢ· ὁ δ' ἐντεῦθεν προκύπτων 30 διῃρήσθω διὰ τȢ̂ 5 πρώτȢ τῶν ἀριθμῶν· πηλίκȢ Ȣ̂ν προκύπτοντος 6, συνάγεται ἐκ τȢ́τȢ ὅτι ἡ πρώτη μέθοδος, ἐξ ἧς ἐπορίσθη ὁ 15, ὑγιῶς διαπέπρακτο. Ὁ δὲ τȢ́τȢ λόγος, ὅτι ἐπὶ τῆς δευτέρας διαθέσεως εἰ ἀληθεύει, ὡς ὁ 6 τέταρτος ὅρος περιέχει τοσάκις τὸν 2 τρίτον, ὁσάκις περιέχει ὁ 15 τὸν 5, ἐπάναγκες

κἀπὶ τῆς πρώτης τὸν εὑρημένον τέταρτον ὅρον 15 τοσάκις περιέχειν τὸν 5, ὁσάκις ὁ 6 τὸν 2· ἄρα ὁ διὰ τῆς πρώτης μεθόδȣ εὑρεθεὶς τέταρτος ἀριθμὸς 15 ἐςὶν ὁ ζητȣ́μενος (245).

249. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἀδιάφορον ἄρ᾽ ἔςαι, ὁπότερον ἄντις θείη τῶν ὅρων δεύτερον, ἢ τρίτον· ἐπὶ γὰρ τȣ̃ προτεθέντος ὑποδείγματος ἀδιαφόρως ἔχει ἐκτεθῆναι, ἢ 2, 6, 5, ἢ 2, 5, 6· εἴτε γὰρ πεντάκις 6, εἴτε ἑξάκις 5, τὸν αὐτὸν προκύπτοντα 30 παρέξȣσι, ὃς διὰ τȣ̃ 2 πρώτȣ διαιρεθεὶς ἀεὶ παρέξει τέταρτον τὸν 15.

250. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἀλλ᾽ ἀδιάφορον ἐπὶ ταύτης τῆς μεθόδȣ ȣ̓χ᾽ ἧττον ἔςαι, εἴτε μείζων εἴη τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ δεύτερος, εἴτ᾽ ἐλάττων, τȣ̃ πρώτȣ· ἐπιεικῶς γάρ, εἰ ἐπὶ τȣ̃ φθάσαντος ὑποδείγματος ὑποθώμεθα 6 ἐργάτας διηνυκότας ὀργιὰς 2, ϗ εἰδέναι βȣληθῶμεν, ὁπόσας ἂν διανύσειαν 15 ἐργάται, συλλογισόμεθα ȣ̃τω· 6 ἐργάσαντο 2 ὀργιάς, εἷς ἓν ἐργάσεται $\frac{2}{6}$, ϗ δὴ 15 ἐγάσονται δεκαπεντάκις τὸ $\frac{2}{6}$, εἴτ᾽ ȣ̃ν ὀργιὰς 5· ἐντεῦθεν ἄρα καταφανές, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας περιπτώσεως γραφέντων 6, 2, 15, δεήσει ὡς κἀπὶ τῆς πρώτης πολλαπλασιάζειν τὸν 2 δεύτερον ὅρον ἐπὶ τὸν 15 τρίτον, ϗ τὸν ἐκ τȣ́των προκύπτοντα 30 διαιρεῖν διὰ τȣ̃ πρώτȣ 6· ἐξέςαι δ᾽ εἰπεῖν κανταῦθα (245), ὅτι ὁ εὑρεθεὶς τέταρτος 5 περιέχει τȣ̃ τρίτȣ ὅρȣ 15 τὸ τρίτον, ὥσπερ ϗ ὁ 2 δεύτερος περιέχει τȣ̃ 6 τὸ τρίτον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. 2000 ςρατιῶται λαμβάνȣσιν ἐκ τȣ̃ κοινȣ̃ ταμιείȣ 80000 ἀργύρια. Πόσα ἄρα λήψεται ςρατος ἀνθρώπων 55640; γράψον τοίνυν 2000, 80000, 55640· ϗ πολλαπλασίασον τὸν δεύτερον ὅρον ἐπὶ τὸν τρίτον, ὅθεν γενήσεται 4451200000, ὃς διὰ 2000 δι-

αιρεθεὶς ἀποδώσει 2225600 ἀργύρια τῷ προτεθέντι ςρατῷ.

Διὰ τῆς τῶν κλασμάτων μεθόδȣ. Επειδὴ 2000 ςρατιῶται λαμβάνȣσι 80000, εἷς ἄρα λήψεται $\frac{80000}{2000}$, ἢ 40 ἀργύρια· πολλαπλασίασον τοίνυν 55640 ἐπὶ 40, ϗ εὑρήσεις, ὡς ϗ προτȣ̃, ἀργύρια 2225600.

251. ΣΧΟΛΙΟΝ. Οπηνίκα δὲ, καθάπερ ἐπὶ τȣ̃ προεκτεθέντος ὑποδείγματος, τὸ κλάσμα, ὃ δίδωσιν ἡμονὰς, ἀναχθῆναι δύναται ἐφ᾽ ὁλοχερῆ, ἢ ἐπ᾽ ἔκθεσιν ἁπλȣςέραν. α΄. ὁλογισμὸς ἐπιτομώτερον διανυσθήσεται, διὰ τῶν κλασμάτων πραττόμενος· β΄. συντελέσει δὲ ϗ ἐπὶ βασανισμῷ τῆς κοινοτενȣ̃ς τῶν τριῶν μεθόδȣ ὁ δεύτερος λογισμός.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. κατέβαλέ τις γρόσια 45 ϗ παράδας 10 ὑπὲρ πήχεων 6 $\frac{2}{3}$ ὑφάσματος. Πόσας ȣ̃ν ἀναλόγως καταβαλεῖ ὑπὲρ 13 $\frac{1}{2}$ πήχεων; γράψον δὴ πήχεις $6\frac{2}{3}$, γρόσια 45 ϗ 10 παράδας, πήχεις $13\frac{1}{2}$· τὸν δὲ δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τȣ̃ τρίτȣ πολλαπλασιάσας, ϗ τὸν ἐντεῦθεν πρυκύπτοντα διελὼν διὰ τȣ̃ τρίτȣ, ἕξεις γρόσ. 91 παράδ. 25 ϗ $\frac{1}{4}$ παρᾶ ὑπὲρ τῆς ζητȣμένης τιμῆς·

Διὰ τῆς τῶν κλασμάτων μεθόδȣ· 6 πήχεις ϗ $\frac{2}{3}$, ἢ $\frac{20}{3}$ τιμῶνται 45 γροσίων, ϗ 10 παραδῶν, εἷς ἄρα πῆχυς τιμηθήσεται $\frac{3}{20}$ (*) τῶν 45 γροσίων ϗ

(*) Εὰν γὰρ $\frac{20}{3}$ τιμῶνται 45 γροσίων, ϗ 10 παραδῶν, εἰς ἕυρεσιν τῆς τιμῆς ἑνὸς πήχεως συνιςῶμεν τὴν ἑξῆς τῶν τριῶν μέθοδον: $\frac{20}{3}$, 45 γρόσ., 10 παραδ., 1 πῆχυς· τȣ̃ ȣ̃ν γινομένȣ ἐκ 45 γροσ., 10 παραδῶν, ϗ 1, ὄντος 45 γροσίων, 10 παράδων (78), λοιπὸν

10 παραδῶν, ὅ ἐςι 6 γροσίων ϗ παραδῶν $31\frac{1}{2}$ (303) 13 ἄρα πήχεις τιμηθήσονται δεκάκις ϗ τρὶς 6 γροσίων, ϗ παραδῶν $31\frac{1}{2}$· τὸ δὲ ἡμιπήχιον τῦ ἡμίσεως τῶν 6 γροσίων, ϗ $31\frac{1}{2}$ παραδῶν, ὅπερ ἐςὶν ὡσαύτως 91 γρόσια, ϗ παράδαι $35\frac{1}{4}$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Πηγῆς τινος τετρακρύνυ, ὁ μὲν πρῶτος κρυνὸς πληροῖ τὴν δεξαμενὴν ἐν ὥραις 2, ὁ δὲ δεύτερος, ἐν 3, ὁ δὲ τρίτος, ἐν 4, ὁ δὲ τέταρτος, ἐν 5· ἐν πόσῳ ἄρα χρόνῳ συλλήβδην πληρώσυσιν αὐτήν; 1 ὥρα παρέξει τὸ ἥμισυ τῦ πρώτυ, τὸ $\frac{1}{3}$ τῦ δευτέρυ, τὸ $\frac{1}{4}$ τῦ τρίτυ, τὸ $\frac{1}{5}$ τῦ τετάρτυ· ταῦτα ῦν τὰ κλάσματα ἀνήχθωσαν ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν, ϗ συνήφθωσαν ἀλλήλοις, ὧν ἔςαι ἄθροισμα $\frac{154}{120}$· λέγε δὴ ῦν: εἰ ἐπὶ τὸ πληρωθῆναι $\frac{154}{120}$ μέρη τῆς δεξαμενῆς ἀπαιτεῖται 1 ὥρα, ἢ λεπτὰ 60 τοῖς τέσσαρσι κρυνοῖς, πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται ἐπὶ τὸ πληρωθῆναι $\frac{120}{120}$ αὐτῆς μέρη, ἢ αὐτὴν ὅλην τὴν δεξαμενὴν, ἣν ἤδη καλῶ 1; γράψον ῦν $\frac{154}{120}$, 60 λεπτὰ, 1. τὸ δὲ προκύπτον ἐκ τῆς 1 ϗ τῦ 60, εἶτ' ῦν τὸν 60 διελὼν διὰ $\frac{154}{120}$ (205) ἕξεις 46 λεπτὰ, 45 δεύτερα, 11 τρίτα ϗ $\frac{106}{154}$ ἑνὸς τρίτυ τὸν χρόνον, ὃν δαπανήσυσιν οἱ τέσσαρες κρυνοὶ συλλήβδην εἰς πλήρωσιν τῆς δεξαμενῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῆς ἀντιςρόφυ τῶν τριῶν Μεθόδυ.

252. Ὅταν μὲν, τῦ τρίτυ τῶν τριῶν δεδομένων ἀ-

ἐςι διελεῖν αὐτὸν διὰ τῦ $\frac{20}{3}$, εἶτ' ῦν πολλαπλασιάσαι (205) ἐπὶ $\frac{3}{20}$ ἐκεῖν εἰς πῆχυς τιμηθήσεται $\frac{3}{20}$ τῶν 45 γροσίων, παράδ· 10.

ριθμῶν μείζονος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος, ὁ ζητέμενος τέταρτος μείζων ᾖ τȣ̃ δευτέρȣ· ἢ γȣ̃ν, τȣ̃ τρίτȣ ἐλάττονος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος, ϗ ὁ τέταρτος ἐλάττων ᾖ ἢ ὁ δεύτερος, τηνικαῦτα ἡ τῶν τριῶν μέθοδος καλεῖται ὀρθὴ, περὶ ἧς διείληπται ἐν τῷ φθάσαντι Κεφαλαίῳ· ὅταν δὲ, τȣ̃ τρίτȣ τῶν ἀριθμῶν μείζονος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος, ὁ τέταρτος τȣναντίον ᾖ ἐλάττων τȣ̃ δευτέρȣ· ἢ γȣ̃ν, τȣ̃ τρίτȣ ἐλαττονος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος, ὁ τέταρτος μείζων ᾖ, ἢ ὁ δεύτερος, ἡ μέθοδος τῶν τριῶν καλεῖται τηνικαῦτα Πλαγία, ἢ Ἀντίςροφος, περὶ ἧς ἐνταῦθα ὁ λόγος.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. 4 ἄνθρωποι εἰργάσαντό τι ἐν ἡμέραις 30· ζητεῖται ȣ̃ν ἐν πόσαις ἡμέραις τὸ αὐτὸ ἔργον ἐργάσαιντ' ἂν ἄνθρωποι 10; ἐὰν ȣ̃ν ἑξῆς γραφῶσι: 4 ἄνθρωποι, 30 ἡμέραι, 10 ἄνθρωποι, ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητȣμένων ἡμερῶν, ὅςἐςιν ὁ ζητέμενος τέταρτος ὅρος, ϗ ὃν αὐτίκα ὀψόμεθα ὄντα 12, ἔςαι ἐλάττων, ἢ ὁ 30 δεύτερος ὅρος, καίτοι τȣ̃ τρίτȣ ὅρȣ, εἴτ' ȣ̃ν τȣ̃ 10 μείζονος ὄντος ἢ ὁ 4 πρῶτος· φανερὸν γὰρ, ὡς εἰ 4 ἄνθρωποι 30 ἡμέρας ἐδαπάνησαν εἰς τὴν ἐργασίαν, 10 ἄνθρωποι δαπανήσȣσιν ἐλάττȣς ἡμέρας ἀναλόγως εἰς τὴν αὐτὴν ἐργασίαν.

253. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵνα δὲ διαπραχθῇ ἡ ἀντίςροφος μέθοδος τῶν τριῶν, τεθείσθω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἐν τῷ τȣ̃ τρίτȣ χώρῳ, ὁ δὲ τρίτος ἐν τῷ τȣ̃ πρώτȣ, ϗ τἄλλα πεπράχθω, ὡς ἐπὶ τῆς ὀρθῆς τῶν τριῶν μεθόδȣ, οἷον ἐπὶ τȣ̃ προεκτεθέντος ὑποδείγματος, ἀντὶ τῶν 4 ἀνθρώπων, 30 ἡμερῶν, 10 ἀνθρώπων, γεγράφθωσαν: 10 ἄνθρωποι, 30 ἡμέραι, 4 ἄνθρωποι· διαπραχθείσης ȣ̃ν τῆς εὐτάκτȣ τῶν τριῶν μεθόδȣ, εὑρεθήσεται τέταρτος ὅρος ἡμέραι 12.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῇ τῆς ἀντιςρόφȣ τῶν τριῶν μεθόδȣ

διαθέσει: 4 ἄνθρωποι, 30 ἡμέραι, 10 ἄνθρωποι, 12 ἡμέραι, ὁ τέταρτος ἀριθμὸς 12 περιέχει τοσάκις τὸν πρῶτον 4, ὁσάκις ὁ δεύτερος 30 περιέχει τὸν τρίτον 10· γραφέντων οὖν τοῦ μὲν πρώτου ἀριθμοῦ 4 ἐν τῷ χώρῳ τοῦ τρίτου 10, καὶ τ' ἀνάπαλιν, συςήσεται νέα διάθεσις τοιάδε: 10 ἄνθρωποι, 30 ἡμέραι, 4 ἄνθρωποι, 12 ἡμέραι, ἔνθ' ὁ τέταρτος ὅρος 12 τοσάκις περιέχει τὸν 4 τρίτον ὅρον, ὁσάκις ὁ 30 δεύτερος περιέχει τὸν 10 πρῶτον· ἔςι δὲ τοῦτο ἰδιότης τῆς ὀρθῆς τῶν τριῶν μεθόδου (245) Ο.Ε.Δ.

Βάσανος τῆς ἀντιςρόφου τῶν τριῶν μεθόδου. Καίτοιγε τῆς βασάνου γενέσθαι δυναμένης ὡς κἀν τῇ ὀρθῇ μεθόδῳ (248), γενήσεται μέντοι βέλτιον διὰ τῶν κλασμάτων· ἐπὶ γὰρ τοῦ προεκτεθέντος ὑποδείγματος, ἐπεὶ 4 ἄνθρωποι εἰργάσαντο ἑκάςης ἡμέρας $\frac{1}{30}$ τοῦ ἔργου· εἷς ἄρα εἰργάσατο $\frac{1}{120}$· 10 ἄρα ἐργάσονται καθ' ἑκάςην $\frac{10}{120}$, ἢ $\frac{1}{12}$· ἐργάσονται ἄρα οἱ αὐτοὶ ὅλον τὸ ἔργον δι' ἡμερῶν 12, ὃς εὕρηται τέταρτος ὅρος καὶ διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Β'. Τυπογράφος τις εἰσήγαγεν εἰς βιβλίον σελίδας 400, ἐχούσας ἑκάςην ςίχους 30· ἐν δὲ δευτέρᾳ τῆς βίβλου ἐκδόσει ἔθετο ἑκάςῃ σελίδι ςίχους 34· πόσαι ἄρα σελίδες εἰσήχθησαν ἐν τῇ καινῇ ἐκδόσει; ἔςι δήπου σαφὲς, ὅτι πλειόνων εἰσαχθέντων ἑκάςῃ σελίδι ςίχων, αἱ σελίδες ἐλαττωθήσονται· ἀντὶ οὖν: 30, 400, 34 γεγράφθωσαν 34, 400, 30 (253)· ὁ δὲ προκύπτων 12000, διαιρεθεὶς διὰ 34, δίδωσι σελίδας 352 $\frac{16}{17}$ σελίδος.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἔντινι ἐπαύλει τρέφονται 1230 ςρατιῶται, ἔνθ' ἐςὶν ἐδώδιμα μηνῶν 15· ἀλλ' οἱ ςρατιῶται ἐπληθύνθησαν μέχρι τῶν 2560· πόσον οὖν χρόνον ἀρκέσουσιν αὐτοῖς τὰ ἐδώδιμα; ἀντὶ: 1230, 15, 2560·

γεγράφθωσαν: 2560, 15, 1250. Πολλαπλασιαθέντος δὲ 15 ἐπὶ 1230, ϗ τȣ̃ ἐντεῦθεν προκύπτοντος διαιρεθέντος διὰ 2560, εὑρεθήσονται θρεψόμενοι 2560 ἄνθρωποι μῆνας 7, ἡμέρας 6, ὥρας 5 ϗ $\frac{1}{12}$ ὥρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς συνθέτȣ Μεθόδȣ τῶν Τριῶν.

254. Ὅταν, ἀντὶ τριῶν ἀριθμῶν, ἢ ὅρων ἐγνωσμένων, δοθῶσι πέντε, ἢ ἑπτὰ, κτ, τηνικαῦτα ὀνομάζεται τȣ̃το Μέθοδος τῶν Πέντε, ἢ Μέθοδος τῶν Ἑπτὰ, ἢ Μέθοδος τῶν Ἐννέα, ϗ ἐν γένει, Σύνθετος Μέθοδος τῶν Τριῶν, ὡς ἐπιλυομένων τῶν ζητημάτων τὰ πολλὰ διὰ πλειόνων μεθόδων τοιῶνδε.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Εἴπερ ἐργάται 5 εἰργάσαντο ὀργιὰς 17 ἐν ἡμέραις 8, πόσας ἐργάσονται 12 ἐν ἡμέραις 15; ἐπὶ τȣ́τȣ ȣ̃ν τȣ̃ προβλήματος πέντε προτίθενται ἐγνωσμένοι ὅροι· τοιγαρȣ̃ν, εἰς ἐπίλυσιν τοιῶνδε ζητημάτων, ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ δυσὶ χρώμεθα μεθόδοις, ἄλις μὲν διαφερȣ́σαις, συμβαλλομέναις μέντοι ἀμοιβαδὸν τῇ ἀλλήλων βασάνῳ.

255. Α΄. ΜΕΘΟΔΟΣ. Γενέσθωσαν δύω μὲν μέθοδοι τῶν τριῶν, ὁπηνίκ᾽ ἂν οἱ ἐγνωσμένοι ὅροι ὦσι πέντε: τρεῖς δ᾽, ὅταν ὦσιν ἑπτά· τέσσαρες δ᾽, ὅταν ὦσιν ἐννέα κτ· ἀεὶ μέντοι ὁ εὑρεθεὶς τέταρτος ὅρος ἐν τῇ ἡγησαμένῃ μεθόδῳ γενέσθω δεύτερος ἐν τῇ ἑπομένῃ· αὐτίκα ȣ̃ν ἐπὶ τȣ̃ προλαβόντος ὑποδείγματος τῶν ἡμερῶν παροφθεισῶν, γενέσθω ἡ μέθοδος κατ᾽ ἀρχὰς ἐπὶ μόνων τῶν

ἐργατῶν, ϗ τῶν ὀργυιῶν; 5 ἐργάται εἰργάσαντο ὀργυιὰς 17, πόσας ȣ̃ν ἐργάσονται ἐργάται 12; γεγράφθωσαν τοίνυν 5, 17, 12, ϗ διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδȣ εὑρεθήσεται τὸ τῶν 12 ἔργον ὀργυιαὶ 40⅘, μοχθησάντων ἐν τῷ αὐτῷ, ᾧ ϗ οἱ 5 χρόνῳ, ὅ ἐςιν ἡμέραις 15· ἐπηνέχθω εἶτα: εἰ 8 ἡμέραι διανύȣσι 40⅘ ὀργυιὰς, πόσας διανύσȣσιν ἡμέραι 15; ϗ ȣ̔́τω γενέσθω ἡ δευτέρα τῶν τριῶν μέθοδος: 8, 40⅘, 15· ὁ ȣ̃ν γινόμενος ὑπὸ τῶν δύω ἐχάτων ἀριθμῶν, ὅ ἐςι 600 σὺν $\frac{60}{5}$, ἢ 612, διαιρεθεὶς διὰ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ, παρέξει πηλίκον 76½, ὅς ἐςιν ὁ ἀριθμὸς τῶν, ὧν ἐν ἡμέραις 15 ἐργάται 12 ἐργάσονται, ὀργυιῶν.

256. Β΄. ΜΕΘΟΔΟΣ. Ὅσοι ποτ' ἂν οἱ ἐγνωσμένος ὅροι ὦσι, μία μόνη γενέσθω τῶν τριῶν μέθοδος κατὰ τάδε. Πάντες οἱ ἀριθμοὶ οἱ συνιςῶντες τὸ πρῶτον ἐγνωσμένον ἀποτέλεσμα γραφέντες ὑπάλληλοι πεπολλαπλασιάσθωσαν ἐπ' ἀλλήλȣς, ὁ δ' ὑπὸ τȣ́των γινόμενος ἔςω ὁ πρῶτος τῶν τῆς τῶν τριῶν μεθόδȣ ὅρων· αὐτὸ δὲ τὸ ἐγνωσμένον ἀποτέλεσμα τετάχθω δεύτερος ὅρος· εἶτα δὲ γεγράφθωσαν αὖθις ὑπαλλήλως οἱ ἐπὶ τȣ̃ προβλήματος σπεύδοντες συςῆσαι τὸ δεύτερον ἀποτέλεσμα ϗ δι' ἀλλήλων πεπολλαπλασιάσθωσαν· τὰ δ' ἄλλα περανθήτωσαν κατὰ τάξιν· ἐπὶ ȣ̃ν τȣ̃ προλαβόντος ὑποδείγματος, 17 μὲν ὀργυιαί εἰσι τὸ ἐγνωσμένον ἔργον τῶν 5 ἐργατῶν, ϗ ἡμερῶν 8· τὸ δὲ ζητȣ́μενόν ἐςι τὸ τῶν 12 ἐργατῶν, ϗ ἡμερῶν 15: γεγράφθωσαν δὴ πολλαπλασιασθέντων ȣ̃ν τȣ̃ μὲν 5 ἐπὶ 8, τȣ̃ δὲ 12 ἐπὶ 15, προκύψȣσιν ὑπὲρ τῆς συνήθȣς τῶν τριῶν μεθόδȣ

5 ἐργ.	,	12 ἐρ.
8 ἡμ.	17 ὀρ.	15 ἡμ.
40	17	180. 76½

οἱ ὅροι: 40, 17, 180, ἀφ' ὧν ἐξέρχονται, ὡς κ̀ πρὶν, 76½ ὀργυιαί.

Δεῖξις τῆς δευτέρας μεθόδου· 5 γὰρ ἐργάται ἐργάζονται τὸ αὐτὸ ἔργον ἐν ἡμέραις 8, ὅπερ ἐργάται 40 ἐργάσαιντ' ἂν, ἐν ἡμέρᾳ 1· ἐργάται δ' αὖ 12 τὸ αὐτὸ ἐν ἡμέραις 15, κ̀ 180 ἐν μιᾷ· ἐξέσαι ἄρα πολλαπλασιάσαι τοὺς ἀριθμοὺς 5 κ̀ 8, οἵτινες συνισῶσι τὸ πρῶτον ἀποτέλεσμα· μετὰ ταῦτα δὲ τοὺς 12, 15, τοὺς συνισῶντας τὸ δεύτερον, διὰ θατέρου τὸν ἕτερον, κ̀ εἰπεῖν οὕτως, εἰ ὁ πρῶτος προκύπτων, 40 ἐργάται, διδόασιν ὀργυιὰς 17, πόσας δώσει ὁ δεύτερος, οἱ 180 ἐργάται; ἐξ' ὧν γενήσεται ἡ ἁπλῆ τῶν τριῶν μέθοδος οὕτω· 40, 17, 180.

257. Ἀλλὰ ταυτὸν γὰρ ἂν εἴη κ̀ περὶ τῆς μεθόδου τῶν ἑπτὰ, τῶν ἐννέα κτ. ὑποθώμεθα γὰρ, ἵν' ἀνακύψῃ τῶν 7 μέθοδος, ὅτι ἐν τῷ προεκτεθέντι ὑποδείγματι 5 ἐργάται διήνυσαν ὀργυιὰς 17, μοχθοῦντες ἡμέραις, 8 δι' ὡρῶν 6 ἑκάστης ἡμέρας, εἰδέναι οὖν βουλόμεθα, πόσας διανύσουσιν ἐργάται 12, πονοῦντες ἡμέρας 15, δι' ὡρῶν 8 ἑκάστης ἡμέρας; ἐπενεγκεῖν τοίνυν ἐξέσαι: ἑξάκις 40, ἢ 240 ἐργάται ἐν ὥρᾳ μιᾷ ἐργάζονται τὸ αὐτὸ, ὃ ἂν 40 ἐν ὥραις 6· κ̀ αὖ, ὀκτάκις 180 ἐργάται ἐν ὥρᾳ μιᾷ, ὃ κ̀ 180 ἐν 8. Πολλαπλασιάσομεν τοιγαροῦν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 5, 8, 6, οἳ ἀποδιδόασι τὸ πρῶτον ἀποτέλεσμα· εἶτα τοὺς ἄλλους τρεῖς 12, 15, 8, τοὺς ἀποδιδόντας τὸ, ἐν ᾧ τὸ ζήτημα, ἀποτέλεσμα, κ̀ οὕτως ἐκπερανοῦμεν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν: 240 ἐργάται, 17 ὀργυιὰι, 1440 ἐργάται, 102 ὀργυιαί. Ο. Ε. Δ.

258. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ δευτέρα τῶν δύω προεκτε-

θεισῶν μεθόδων ἐπιτομωτέρα τῆς πρώτης τυγχάνουσα ἀείποτε ἐν τῇ πράξει προκρίνεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἀντιστρόφου συνθέτου Μεθόδου τῶν Τριῶν.

259. Μετὰ τὸ ἀναγαγεῖν ἐπὶ τρεῖς πάντας τοὺς ὅρους διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου, ἐὰν, τοῦ τρίτου ὅρου μείζονος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος, ὁ ζητούμενος τέταρτος ὅρος τοὐναντίον ᾖ ἐλάττων, ἢ ὁ δεύτερος, ἢ καὶ ἀντιστρόφως, ἀντικατασταθήτω ὁ τρίτος ὅρος ἐν τῷ χώρῳ τοῦ πρώτου (253) καὶ περανθήτω κατὰ τάξιν ἡ μέθοδος.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τέσσαρές τινες, περιηγούμενοι μηνῶν 10, ἐχρήσαντο ὁρισμένῳ ἀθροίσματι χρημάτων, δαπανῶντες ἕκαστος 3 γρόσια καθ' ἑκάστην· ἐν πόσοις ἄρα μησὶ περιηγήσαιντ' ἂν ἕξ τινὲς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀθροίσματος, δαπανῶντες ἕκαστος γρόσια 5 ἑκάστης ἡμέρας; γραφέντων οὖν τὸ πρῶτον, ὡς ὁρᾶται ἐνταῦθα,

4	10	6	
3		5	
12	10	30	
30	10	12	4

ἐπεὶ ὁ τῶν μηνῶν ἀριθμὸς, ὁ ζητούμενος δηλονότι τέταρτος ὅρος, ἔσται ἐλάττων ἢ ὁ δεύτερος 10, τοῦ 30 τρίτου μείζονος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος 12, συνάγεται ἐντεῦθεν, ὅτι συστήσεται μέθοδος τῶν τριῶν ἀντίστροφος· γεγράφθωσαν ἄρα: 30, 10, 12, ἐξ ὧν εὑρεθήσεται τέταρτος ὅρος ὁ 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΤΟΝ.

Περὶ τῆς Συνεζευγμένης Μεθόδȣ.

260. Ὁπηνίκ' ἂν, λόγȣ γινομένȣ περί ςαθμῶν, νομισμάτων, ἐκτάσεων κτ. λέγηται μόνιμόν τινα ποσότητα τȣ̃ δεῖνος μέτρȣ ἰσοδυναμεῖν μονίμῳ ποσότητι τȣ̃ δεῖνος· τȣ́τȣ δ' ἂυ μόνιμον ποσὸν ἰσοθενεῖν ποσῷ μονίμῳ μέτρȣ ἄλλȣ, ϗ ἀεὶ ȣ̈τω· ὁ κανὼν τȣ̃ εὑρίσκειν τὴν μονίμȣ τινὸς ποσότητος τȣ̃ πρώτȣ μέτρȣ πρὸς τὴν τȣ̃ ἐχάτȣ ἀναφοραν καλεῖται Μέθαδος Συνεζευγμένη· ἐπερείδεται δὲ αὕτη ἀεὶ τῇ συνθέτῳ τῶν τριῶν μεθόδῳ, ϗ ἐπιλυθῆναι δύναται δὶ ἑκατέρας τῶν προεκτεθεισῶν μεθόδων προκρινομένης μέντοι τῆς δευτέρας ἀείποτε.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἐὰν, πισόλα τῆς Σαβοΐας ἰσοδυναμῇ 36 λίτραις τῆς Γενέβας· δύω δὲ λίτραι τῆς Γενέβας ἰσοδυναμῶσι γροσίῳ τῆς Κωνςαντινȣπόλεως· τρία δὲ γρόσια τῆς Κωνςαντινȣπόλεως ἰσοδυναμῶσι δυσὶ φιορινίοις τῆς Βιέννης, 9 δὲ φιορίνα τῆς Βιέννης ἰσοδυναμῶσι 2 δȣκάτοις τῆς Ὁλλάνδας, 10 πισόλαι τῆς Σαβοΐας πόσοις ἰσοδυναμȣ̃σι δȣκάτοις τῆς Ὁλλάνδας;

Α'. Γεγράφθωσαν ἕκαςον εἶδος νομίσματος δὶς, καθ' ἣν ἐνταῦθα ὁρῶνται τάξιν.

1 πισόλα	36 λίτραι Γενέβας	
2 λίτραι Γενέβ.	1 γρόσιον	
3 γρόσια	2 φιορίνια	
9 φιορίνια	2 δȣκάτα.	10 πις.
54	144	10 πις. 26 δȣκ. $\frac{2}{3}$

Β'. εἰλήφθω τὸ προκύπτον ἐξ ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν τῆς πρὸς τὰ λαιὰ πρώτης ςήλης, ὅ ἐςι 54· μετὰ δὲ, τὸ ἐκ τῶν τῆς δευτέρας

ὅ ἐστιν 114· τέλος δὲ τεθείσθωσαν 10 πιστόλαι εἰς τρίτον ὅρον τῆς μεθόδου: 54, 144, 10, ἐξ ὧν εὑρεθήσονται αἱ 10 πιστόλαι ἰσοδυναμοῦσαι δουκάτοις 26$\frac{2}{3}$. βουλομένοις δὲ ταῦτα μετελθεῖν κατὰ τὴν πρώτην τῶν μεθόδων, τεσσάρων ἑξῆς δεήσει πράξεων α΄. εἰ 36 λίτραι Γενέβας δύνανται 1 πιστόλαν Σαβοϊακὴν, 2 λίτραι Γενέβας δύνανται $\frac{2}{36}$ πιστόλας· β΄. τεθέντων τῶν $\frac{2}{36}$ ἐν τῷ τῶν λιτρῶν χώρῳ ἐπὶ τῆς πρώτης στήλης, εἴπερ 1 γρόσιον δύναται $\frac{2}{36}$, 3 δήπου δυνήσονται $\frac{6}{36}$, ἢ $\frac{1}{6}$· γ΄. τεθέντος $\frac{1}{6}$ ἐν τῷ τῶν γροσίων χώρῳ, εἴπερ φιορίνια 2 δύνανται $\frac{1}{6}$ πιστόλας, 9 φιορίνια δυνήσονται $\frac{9}{12}$ ἢ $\frac{3}{4}$ πιστόλας· δ΄. εἴπερ $\frac{3}{4}$ πιστόλας δύνανται 2 δουκάτα, 10 πιστόλαι δυνήσονται $\frac{80}{3}$ (205) ἢ 26$\frac{2}{3}$, ὡς καὶ πρὶν εὕρηται.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἐὰν 100 λίτραι σταθμοῦ Παρισιακαὶ ἰσοσταθμῶνται 116 λίτραις τοῦ Λουγδούνου· 100 δὲ λίτραι τοῦ Λουγδούνου, 104 τοῦ Μοντπελλιέ· 100 δὲ τοῦ Μοντπελιὲ, 102 τῆς Μαρσιλλίας· 100 δὲ τῆς Μαρσιλλίας, 72$\frac{1}{4}$ τῆς Γενέβας, 85 λίτραι παρισιακαὶ πόσαις ἰσοταλαντεύονται γενεβικαῖς;

100 σταθ. λίτρ. Παρ.	116 λίτρ. Λουγδ.
100 λίτρ. Λουγδ.	104 Μοντπ.
100 λίτρ. Μοντπ.	102 Μαρσιλ.
100 λίτρ. Μαρσιλ.	72$\frac{1}{4}$ Γενέβ.
100000000· 88905648· 85· 75$\frac{57}{100}$	

Ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν γραφέντων, ὡς ἐνταῦθ' ὁρῶνται, γενέσθω ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν· 100000000, 88905648, 85, ἐξ ὧν εὑρεθήσονται 85 λίτραι Παρισιακαὶ ἰσοσταθμώμεναι Γενεβικαῖς 75 σὺν $\frac{57}{100}$ λίτρας ὡς ἔγγιστα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΚΤΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδε τῆς Εταιρείας.

261. Μέθοδος τῆς Ἑταιρείας ἀκέει τὸ εὑρίσκειν τὸ κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν, τὴν ἐπανήκεσαν ἑκάςῳ τῶν καταβαλόντων ἐν ἑταιρείᾳ τινὶ μερίδας. Τοιγαρἒν ἐνταῦθα τὸ πάντων ὁμἒ τῶν μερίδων συμπλήρωμα τὸν πρῶτον καθέξει χῶρον τῆς τῶν τριῶν μεθόδε, ἡ δ' ὅλη ζημία, ἢ τὸ κέδος, τὸν δεύτερον· ἡ δὲ ἰδιαιτέρα ἑκάςε μερὶς τὸν τρίτον, κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Φορμίων, Παυσανίας, Ξάνθιππος, ἔθεντο ἐν ἑταιρείᾳ μερίδας· ὁ μὲν Φορμίων γρόσια 5000, ὁ δὲ Παυσανίας 9000, ὁ δὲ Ξάνθιππος, 16000· ἐκέρδησαν δ' ὁμἒ πάντες γρόσια 8000· πόσον ἒν ἔςαι ἑκάςῳ κέρδος;

Τὸ πασῶν τῶν μερίδων ἄθροισμά ἐςι 30000 γρόσια· ὑπὲρ ἒν τἒ Φορμίωνος συγκροτηθήσεται ἥδε ἡ μέθοδος· 30000, 8000, 5000, ὅθεν προκύψει $1333\frac{1}{3}$ λίτρας.

Ὑπὲρ δὲ τἒ Παυσανίε· 30000, 8000, 9000, ἐξ ὧν προκύψει 2400.

Τέλος δὲ ὑπὲρ τἒ Ξανθίππε συςαθήσεται ἥδε, 30000, 8000, 16000, ὅθεν προκύψει κέρδος $4266\frac{2}{3}$.

Καὶ ἐπειδὴ τὰ τρία κέρδη συναφθέντα ἀποπληρἒσι τὸ ὅλον κέρδος, τἒτὶ ἐπὶ βασάνῳ ξυντελέσει, ὅτι ὑγιῶς πεπέρανται ἡ πρᾶξις.

262. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἔςιν ὅτε, παρὰ τὰς τῆς ἑταιρείας μερίδας, προσδεῖ προσέχειν τὸν νἒν ϗ τῷ χρόνῳ· ὡς εἴπερ ὁ Φορμίων ἔθετο 30 δεκάτα ὑπὲρ 5 μηνῶν·

Παυσανίας δὲ 50 ὑπὲρ 10, Ξάνθιππος δὲ 80 ὑπὲρ 16· ἐπεὶ τότε τὸ ἑκάςȣ κέρδος, ἢ ἡ ζημία ἀναλογεῖν ὀφείλει ϗ τῇ κατατεθείσῃ μερίδι, ϗ τῷ χρόνῳ, γενήσεται σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν (256) κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

263. Ὑποθώμεθα τȣ̀ς τρεῖς ἑταίρȣς ἐζημιωμένȣς ὁμȣ̃ 40 δȣκάτοις· πεπολλαπλασιάσθω δὴ ἡ ἑκάςȣ μερὶς ἐπὶ τὸν ἑκάςȣ χρόνον· ὅτως ȣ̓̃ν τῷ μὲν Φορμίωνι ἔςαι 150, τῷ δὲ Παυσανίᾳ 500, τῷ δὲ Ξανθίππῳ 1280· τὸ δ' ἁπάντων ἄθροισμα 1930· γενέσθω ȣ̓̃ν πρῶτος μὲν ὅρος ȣ̓̃τος, δεύτερος δὲ ἡ ὅλη ζημία, τὸ δ' ἐκ τῆς μερίδος ἑκάςȣ ϗ τȣ̃ χρόνȣ προκύπτον, ὁ τρίτος· ἐκȣ̃ν ὑπὲρ μὲν τȣ̃ Φορμίωνος γενήσεται ἥδε ἡ μέθοδος· 1930, 40, 150, ἀφ' ὧν πρόεισι ζημία δȣκάτα 3 ϗ $\frac{21}{193}$· ὑπὲρ δὲ τȣ̃ Παυσανίȣ· 1930, 40, 500, ὅθεν ζημία 10 ϗ $\frac{70}{193}$· τῷ δὲ Ξανθίππῳ· 1930, 40, 1280, ὅθεν προκύπτει ζημία 26 δȣκάτα ϗ $\frac{102}{193}$· αἳ δὲ, συναφθεῖσαι, τὴν ὅλην ἀποκαθιςῶσι ζημίαν.,

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδȣ τῆς ψευδȣ̃ς ὑποθέσεως.

264. Ὅταν, πολλῶν ἀριθμῶν ἀθροίσματι ἀπαρτιζόντων, ὁ ἑκάςȣ τȣ́των πρὸς τὸν ἐλάχιςον λόγος ἐκτίθεσθαι ἔχῃ δι' ὁλοχερῶν, ὅ ἐςιν ἐὰν ᾖ διπλȣ̃ς, τριπλȣ̃ς, τετραπλȣ̃ς κτ. τȣ̃ ἐλαχίςȣ, συνίςαται εἶδός τι μεθόδȣ τῶν κατὰ τὰς ἑταιρείας, ἥτις ὀνομάζεται μέθοδος τ ῆ ς ψ ε υ δ ȣ̃ ς ὑ π ο θ έ σ ε ω ς, ὡς ἐξὸν, ἀντὶ τȣ̃ αὐτὸν ἐκεῖνον ἐκθέσθαι τὸν ἀριθμὸν, γράψαι 2, ἣν ᾖ διπλȣ̃ς τȣ̃ ἐλάττονος· 3, ἣν ᾖ τριπλȣ̃ς κτ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Θέων, Ἀλκιβιάδης, Κλεόμβροτος, ϗ Πεισίςρατος, συνάμα ἕλκουσιν ἔτη 110· ἀλλ᾽ ὁ μὲν Ἀλκιβιάδης, τὸ τριπλοῦν τῶν Θέωνος, ὁ δὲ Κλεόμβρος, τὸ διπλοῦν τῶν τοῦ Ἀλκιβιάδου, ὁ Πεισίςρατος δὲ, τὸ διπλοῦν τῶν τοῦ Κλεομβρότου· πόση ἆρ᾽ ἐςὶν ἡ ἑκάςου ἡλικία; Κληθήτω δὴ ἡ μὲν ἐλαχίςη ἡλικία ἡ τοῦ Θέωνος 1, ἡ δὲ τοῦ Ἀλκιβιάδου, τριπλῆ οὖσα τῆς τοῦ Θέωνος, κληθήτω 3· ἡ δὲ τοῦ Κλεομβρότου, διπλῆ οὖσα τῆς τοῦ Ἀλκιβιάδου, 6· ἡ δὲ τελευταῖον τοῦ Πεισιςράτου, διπλῆ οὖσα ϗ αὐτὴ τῆς τοῦ Κλεομβρότου, κληθήτω 12· συναφθεισῶν δὲ πασῶν τῶν σχέσεων, διὰ τοῦ 22 ἀθροίσματος γενέσθω μέθοδός τις κατὰ τὰς τῶν ἑταιρειῶν (261) οὕτω· 22, 110 ἔτη, 1 (σχέσις τοῦ Θέωνος)· ἡ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν δηλώσει τὴν τοῦ Θέωνος ἡλικίαν οὖσαν ἔτη 5· ἀλλ᾽ ἡ Ἀλκιβιάδου ἡλικία ἐςὶ τριπλῆ τῆς τοῦ Θέωνος· ἔςιν ἄρα ἔτη 15· ἀλλ᾽ ἡ τοῦ Κλεομβρότου ἐςὶ διπλῆ τῆς τοῦ Ἀλκιβιάδου· ἔςιν ἄρα ἔτη 30· τέλος δὲ ἡ τοῦ Πεισιςράτου ἐςὶ ϗ αὐτὴ διπλῆ τῆς τοῦ Κλεομβρότου· ἔςιν ἄρα ἔτη 60· ἐπεὶ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων τούτων ἡλικιῶν ἐςὶν ἴσον ἔτεσιν 110· ὑγιῶς ἔχουσα ἄρα βεβασάνιςαι ἡ πρᾶξις.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Νικίας, Νικήρατος, ϗ Νικόςρατος, συλλήβδην ἐκέρδησαν γρόσια 1800· ἀλλ᾽ ὁ μὲν Νικήρατος τὸ διπλοῦν τοῦ Νικίου· ὁ δὲ Νικόςρατος τὸ τριπλοῦν τοῦ Νικηράτου· πόσον ἐκέρδησεν ἕκαςος; Κληθέντος τοῦ κατὰ τὸν Νικίαν κέρδους 1, ἑπομένως τὸ μὲν τοῦ Νικηράτου 2, τὸ δὲ τοῦ Νικοςράτου κληθήσεται 6· ὑπὲρ τοῦ Νικίου γενήσεται μέθοδος τοιάδε, 9, 1800, 1, ὅθεν προκύψει 200· ἄρα τὸ τοῦ Νικηράτου κέρδος, διπλοῦν ὂν, ἔςαι 400· τὸ δὲ τοῦ Νικοςράτου, ὡς τριπλοῦν τοῦ κατὰ τὸν Νικήρατον, ἔςαι 1200· τῶν τριῶν δὲ τὸ ἄθροισμα, 1800,

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδȣ τῶν τόκων.

265. Ἵν' εὑρεθῇ ὁ τόκος γροσίων 5000, φέρ' εἰπεῖν, πρὸς δέκα τῶν 100 τοκιζομένων, σκέπτȣ ὅτως· 100 γροσίων κεφάλαιον δίδωσι τόκον 10, πόσον ἆρα δώσȣσι 5000; ποίησον δὲ ὅτω τὴν μέθοδον τῶν τριῶν· 100, 10, 5000, ὁκȣ̃ν ἔςαι τόκος 500. Πρὸς δὲ 5 τῶν 100, ὅτω: 100, 5, 5000, ὅθεν ἔξεισι τόκος 250· πρὸς $4\frac{1}{4}$ τῶν 100, ὅτω: 100, $4\frac{1}{4}$, 5000· ἔςαι ἄρα τόκος 225 γρόσια, ὡσαύτως δὲ ϰ̀ ἐπ' ἄλλων περιπτώσεων.

266. Ἐὰν τὐναντίον, δοθέντος τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν τόκων, οἷον 500, ζητηθῇ τὸ κεφάλαιον, πρὸς 10 τῶν 100, φέρε, λέγε ὅτως· ἐὰν τόκος 10 ἀπονέμῃ κεφάλαιον 100, τόκος 500 πόσον κεφάλαιον ὑποτίθησιν; γράφε δὴ, 10, 100, 500· ἄρα κεφάλαιον ἔςαι 5000.

267. Διὰ τῆς μεθόδȣ τῶν κλασμάτων (247)· πολλαπλασίασον τὸ δοθὲν κεφάλαιον ἐπὶ κλάσμα, ȣ̃ παρονομαςὴς μὲν 100, ἀριθμητὴς δὲ ὁ τῶν 100 τόκος (194)· ὁκȣ̃ν τὸ γινόμενον δηλώσει τὸν τόκον (146, 192)· ἢ γȣ̃ν δι' αὐτȣ̃ τȣ̃ κλάσματος δίελε τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐμφαντικὸν τȣ̃ τόκȣ, ϰ̀ ἕξεις κεφάλαιον τὸ πηλίκον (205).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Γρόσια 336 πόσα φέρȣσι, πρὸς 7 τῶν 100; 336 γρόσια, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ $\frac{7}{100}$ δώσȣσι τόκον 23 γρόσια, 20 παράδ. 2 λεπτὰ ὡς ἔγγιςα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β. Πόσος ἔςαι ὁ τόκος γροσίων 4375, πρὸς 5 τῶν 100; 4375, πολλαπλασιασθεὶς διὰ $\frac{5}{100}$· ἢ διὰ $\frac{1}{20}$, δίδωσι τόκον 218 γρόσ. 30 παράδ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ο῾ Πέτρος καρπȣ̃ται ἀπ᾿ ἀγρȣ̃ τινος γρόσια 1250· πωλῆσαι ȣ̃ν βȣ́λεται τὸν ἀγρὸν, ἀλλὰ τιμήματος τοσȣ́τȣ, ὅσον ἐπὶ τόκῳ πρὸς 5 τῶν 100 ἐκδοθὲν φέρειν αὖθις τὴν αὐτὴν πρόσοδον· πόσα ȣ̃ν αἰτῆσαι δεῖ; ὁ 1250, διαιρεθεὶς διὰ τȣ̃ $\frac{5}{100}$ κλάσματος, ἢ τȣ̃ $\frac{1}{20}$ (205) φήσει, ὅτι δεῖ αἰτῆσαι γρόσια 25000.

268. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ε῎ςι δὲ ϗ ἕτερος τȣ̃ τοκίζεσθαι τρόπος, ὃς καλεῖται πρὸς τόκον 10, ὅταν 10 λίτραι λαμβάνωσι 1· πρὸς τόκον 12, ὅταν 12 λίτραι λαμβάνωσι 1, ϗ ἐφεξῆς ὡσαύτως· ἐν τȣ́τῳ ἄρα τȣ̃ λογίζεσθαι τῷ εἴδει ἀποχρήσει διελεῖν τὸ ὅλον κεφάλαιον διὰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃, τȣ̃ ἐμφαίνοντος, πρὸς πόσον τόκον, εἰς εὕρεσιν τȣ̃ τόκȣ, ἢ πολλαπλασιάσαι τὸν τόκον ἐπὶ τȣ̃τον τὸν ἀριθμὸν, ὅτε τὸ κεφάλαιον ζητεῖται.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Πόσα δώσȣσι 5345 γρόσια πρὸς τόκον 20; δίελε 5345 διὰ 20, ϗ εὑρήσεις τόκον 267 γρόσια, ϗ 10 παράδας.

ΔΕΙΞΙΣ. Τȣτὶ ἐπιλύοντες διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδȣ εἴποιμεν ἄν· 20 γρόσια παρέχȣσι γρόσιον 1· πόσα παρέξȣσι τὰ 5345; καταγράφοντες τοίνυν: 20, 1, 5345· ἐπείπερ ἀσυντελές ἐςι πολλαπλασιάζειν 5345 ἐπὶ 1, διαιρȣ̃μεν μόνον τὸν 5345 διὰ 20. Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Α᾿ντώνιος προκτήσασθαι βȣ́λεται πρόσοδόν τινα 650 γροσίων· πόσον ἂρ ἔςι τὸ κεφάλαιον, ὃ καταθέσθαι χρεὼν πρὸς τόκον 24; πεπολλαπλασιάσθωσαν 650 γρόσια ἐπὶ 24, ϗ ὁ προκύπτων 15600 ἔςαι τὸ κεφάλαιον, ὃ δεῖ καταθέσθαι.

ΔΕΙΞΙΣ. 1 γρόσιον τόκος ὑποτίθησιν 24 γρόσια κεφάλαιον, τόκος γροσίων 650 πόσα ὑποτίθησι γρόσια, εἰς κεφάλαιον; ἐντεῦθεν ἡ μέθοδος: 1, 24, 650· ὅθεν κα-

ταφανὲς ὅτι μόνον χρὴ πολλαπλασιάσαι τὸν 650 ἐπὶ 24.

269. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδήπερ ὁ τόκος 10 ἐςὶν $\frac{1}{10}$ τȣ̃ κεφαλαίȣ· ὁ δὲ τόκος 20, $\frac{1}{20}$ ϗ ȣ̓́τως ἑξῆς· ἀριθμȣ̃ τινος, περιέχοντος κεφάλαιον ἅμα ϗ τόκον αὐτȣ̃, εὑρεθήσεται ὁ τόκος, ναὶ μὴν ϗ ὅσον ἐςὶ τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάσασι τόνδε τὸν ἀριθμὸν, ἐν μὲν τῷ τόκῳ 10 ἐπὶ $\frac{1}{11}$· ἐν δὲ τῷ τόκῳ 20 ἐπὶ $\frac{1}{21}$ κτ. (144)· τȣ̓ναντίον δὲ, εἴπερ παρίςησιν ὁ ἀριθμὸς κεφάλαιον, ȣ̃ προαφώρισαι ὁ τόκος, εὑρεθήσεται ὁ τόκος αὐτὸς, ναὶ μὴν ϗ τὸ κεφάλαιον, διελȣ̃σι τόνδε τὸν ἀριθμὸν διὰ 9 ἐν τῷ τόκῳ 10, διὰ 19 ἐν τῷ τόκῳ 20, ϗ ἐφεξῆς ȣ̓́τως.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ὁ 5922 ἀριθμὸς ἐμφαίνει τὸ κεφάλαιον ἡνωμένον ἐνιαυσίῳ τόκῳ πρὸς τόκον 20· πόσος μέν ἐςιν ὁ τόκος; πόσον δὲ τὸ κεφάλαιον; πολλαπλασίασον 5922 ἐπὶ $\frac{1}{21}$, ἢ δίελε αὐτὸν διὰ 21 (194), ϗ ἕξεις τόκον μὲν 282, κεφάλαιον δὲ 5640.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ὁ Πέτρος ἔθετο κεφάλαιόν τι πρὸς τόκον 16· συνέθετο δὲ τῷ δανειςῇ καταχόντι ἐνιαύσιον τόκον, ἀποδȣ̃ναι οἱ τὰ ἄλλα· ἀπέδωκεν ȣ̃ν 6840· πόσος ἆρ ἦν ὁ τόκος ϗ αὐτὸ τὸ κεφάλαιον; 6840, πολλαπλασιασθεὶς διὰ $\frac{1}{15}$, ἢ διαιρεθεὶς διὰ 15, δίδωσι τόκον 456, ὅςτις συναφθείς τῷ 6840, δώσει κεφάλαιον τὸν 7296.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τȣ̃ λογισμȣ̃ τῆς Ἀλύσεως.

270. Ζητȣμένȣ τȣ̃ ὁλικȣ̃ ἀθροίσματος, τȣ̃ συμπληρωθησομένȣ μετὰ πλείω ἔτη, ἐν ᾧ περιέχεται τό,τε κε-

φάλαιον, ϗ ὁ τόκος τȣ͂ κεφαλαίȣ, ἀλλὰ δὴ ϗ ὁ τόκος τȣ͂ τόκȣ, ϗοινοτενέςερος ἀεὶ ἔςαι ὁ λογισμός· ἀλλὰ δύω γὰρ ἡμεῖς ϗ περὶ τȣ́τȣ ἐξοίσομεν μεθόδȣς.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἐκδȣ͂ναί τις βȣ́λεται 20000 γρόσια πρὸς 10 τῶν 100, προσεπιλογιζόμενος ἀεὶ τȣ̀ς τόκȣς τῶν παροιχομένων ἐνιαυτῶν, ϗ ἅμα τȣ̀ς τῶν τόκων τόκȣς· πόσον ἔςαι ὁμȣ͂ ἄθροισμα μετὰ πέντε ἐνιαυτȣ́ς;

271. Α΄. Μέθοδος διὰ τῆς μεθόδȣ τῶν τριῶν· 20000 γρόσια τέξȣσι τὸν πρῶτον ἐνιαυτὸν 2000 γρόσια (265) ἃ, συναφθέντα τῷ 20000, παρέχȣσι τὸ τȣ͂ δευτέρȣ ἔτȣς κεφάλαιον, γρόσια 22000. Τȣτὶ δὲ οἴσει τὸ δεύτερον ἔτος, 2200, ὃ, συναφθὲν τῷ 22000, ἀπαρτιεῖ τȣ͂ τρίτȣ ἔτȣς κεφάλαιον 24200· τȣτὶ δὲ γεννήσει ἐν τῷ τρίτῳ ἔτει 2420, ὃ, συναφθὲν τῷ 24200, ἀποκαταςήσει τȣ͂ τετάρτȣ ἔτȣς τὸ κεφάλαιον 26620· τὸ δὲ, τέξει κατὰ τὸν τέταρτον ἐνιαυτὸν 2662, ὃ, προςεθὲν τῷ 26620, ϗηματίσει τȣ͂ πέμπτȣ ἔτȣς τὸ κεφάλαιον, εἴτ' ȣ͂ν 29282· τελευταῖον δὲ τόδε παρέξεται τῷ πέμπτῳ ἔτει 2928 γρόσια, ἃ, συναφθέντα τῷ 29282, παράξȣσι τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον 32210 γρόσια ϗ παράδ. 8, ἃ παρέψονται τῷ χρήςῃ μετὰ τȣ̀ς 5 ἐνιαυτȣ̀ς, λογισαμένῳ τό, τε κεφάλαιον ϗ τȣ̀ς τόκȣς, ναὶ μὴν ϗ τȣ̀ς τόκȣς τῶν τόκων.

272. Β΄. Μέθοδος. α΄. τὸ 20000 γροσίων κεφάλαιον, πρὸς 10 τῶν 100, οἴσει ἑκάςȣ ἔτȣς τὸ $\frac{1}{10}$ ἑαυτȣ͂· ȣ̓κȣ͂ν γεγράφθω ὑφ' ἕκαςον ἐνιαυτὸν τὸ $\frac{1}{10}$ κατὰ τὸν Α ςίχον, ὡς ἐπὶ τȣ͂ Α΄ βακίσκȣ ὁρᾶται. β΄. τοδὶ τὸ $\frac{1}{10}$, ἢ ὁ τόκος τȣ͂ πρώτȣ ἐνιαυτȣ͂, γενήσεται κεφάλαιον εἰς τὸν δεύτερον, ϗ οἴσει $\frac{1}{10}$ τȣ͂δε τȣ͂ $\frac{1}{10}$· γεγράφθω τοίνυν $\frac{1}{10}$ ὑπὸ τὸ δεύτερον ἔτος ἐπὶ τȣ͂ ςίχȣ Β, λαμβανομένȣ ἐξ ἀριςερῶν ἐπὶ δεξιά· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον $\frac{1}{10}$ τȣ͂ πρώτȣ ἐνι-

	α΄. ἐτ.	β΄. ἐτ.	γ΄. ἐτ.	δ΄. ἐτ.	ε΄. ἐτ.	λίτρ.	σολ.
						20000	0
Α	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	10000	0
Β		$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	2000	0
Γ			$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	200	0
Δ				$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	10	0
Ε					$\frac{1}{10}$	0	8
						32210	8

αὐτοῦ, ϗ ἓν τοῦ δευτέρου, γεγραμμένον ἐν τῷ Α ϛίχῳ, οἴσουσι τῷ τρίτῳ ἔτει $\frac{2}{10}$ ὁμοειδῆ τοῖς ἤδη γεγραμμένοις ἐν τῷ Β ϛίχῳ· γεγράφθω τοίνυν ἔτι $\frac{2}{10}$ ἐν τῷ αὐτῷ ϛίχῳ ὑπὸ τὸν τρίτον ἐνιαυτόν. Τὰ δεκατημόρια τοῦ πρώτου, ϗ δευτέρου, ϗ τρίτου ἔτους, τὰ κατὰ τὸν Α ϛίχον, οἴσουσι τῷ τετάρτῳ ἐνιαυτῷ $\frac{3}{10}$, ἃ γεγράφθω ἐν τῷ Β ϛίχῳ· τὰ δὲ τέσσαρα $\frac{1}{10}$ τῶν προλαβόντων ἐτῶν ἀπονεμοῦσι $\frac{4}{10}$ τῷ πέμπτῳ ἔτει, ἃ ϗ ταῦτα γεγράφθωσαν. γ΄. τὸ $\frac{1}{10}$, τὸ σημειωθὲν ἐπὶ τοῦ Β ϛίχου ὑπὸ τὸ δεύτερον ἔτος, ἀποδώσει τῷ τρίτῳ ἔτει $\frac{1}{10}$ τοῦδε τοῦ $\frac{1}{10}$· οὐκοῦν γεγράφθω $\frac{1}{10}$ ὑπὸ τὸ τρίτον ἔτος ἐπὶ τοῦ Γ ϛίχου· $\frac{1}{10}$ ϗ $\frac{2}{10}$ τὰ ἐν τῷ Β ϛίχῳ οἴσουσι τῷ τετάρτῳ ἔτει ἐν τῷ Γ ϛίχῳ $\frac{3}{10}$, ἅπερ σεσημειώσθω· $\frac{1}{10}$ δὲ ϗ $\frac{2}{10}$ ϗ $\frac{3}{10}$ τὰ ἐν τῷ αὐτῷ Β ϛίχῳ οἴσουσιν ἐς τὸν πέμπτον ἐνιαυτὸν $\frac{6}{10}$, ἃ καὶ ταῦτα γεγράφθωσαν.

Τὸ ὑπὸ τὸ τρίτον ἔτος ἐν τῷ Γ ϛίχῳ σημειωθὲν $\frac{1}{10}$ παρέξει τῷ δ΄. ἐνιαυτῷ $\frac{1}{10}$ τοῦδε τοῦ $\frac{1}{10}$· οὐκοῦν γεγράφθω $\frac{1}{10}$ ὑπὸ τὸ τέταρτον ἔτος κατὰ τὸν Δ ϛίχον· $\frac{1}{10}$ δὲ καὶ $\frac{3}{10}$ τῶν ἐτῶν τοῦ τρίτου ϗ τετάρτου, τὰ κατὰ τὸν Γ ϛίχον, οἴσουσι τῷ ε΄. ἔτει $\frac{4}{10}$.

Τελευταῖον δὲ τὸ ἄρτι ὑπὸ τὸ δ΄. ἔτος ἐν τῷ Δ ϛίχῳ γεγραμμένον $\frac{1}{10}$ ἀπονεμεῖ τῷ πέπτῳ ἐνιαυτῷ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦδε τοῦ $\frac{1}{10}$, ὃ γεγράφθω τελευταῖον ὑπὸ τὸ πέμπτον ἔτος ἐν τῷ Ε ϛίχῳ.

Νῦν οὖν συνήφθωσαν· $\frac{1}{10}$ τοῦ Α ϛίχου ἐϛὶν $\frac{1}{10}$ τῶν

20000, ἢ γρόσια 2000· ἀλλ' εἰσὶ γὰρ πέντε δεκατημόρια ἐν τῷ Α στίχῳ· ἄρα γεγράφθωσαν ὑπὸ τὸ κεφάλαιον γρόσια πεντάκις 2000, εἴτ' οὖν 10000.

$\frac{1}{10}$ τοῦ Β στίχου, ὃν ὁ τόκος τοῦ Α στίχου, ἐστὶν $\frac{1}{10}$ ἐκείνου τοῦ $\frac{1}{10}$, ἢ γρόσια 200· ἀλλαμὴν εἰσι δέκα $\frac{1}{10}$ ἐν τῷ Β στίχῳ· ἄρα γρόσια 2000 γεγράφθωσαν ὑπὸ τὰ 10000.

$\frac{1}{10}$ τοῦ Γ στίχου ἐστὶν $\frac{1}{10}$ τοῦ $\frac{1}{10}$ τοῦ Β στίχου· ἐμφαίνει ἄρα γρόσια 20· δέκα ἄρα $\frac{1}{10}$ τοῦ Γ στίχου δύνανται γρόσια 200· $\frac{1}{10}$ τοῦ Δ στίχου ἔστιν $\frac{1}{10}$ γροσίων 20, ἢ γρόσια 2· ἄρα $\frac{1}{10}$, τὰ ἐν τῷδε τῷ στίχῳ, ἐμφαίνουσι 10 γρόσια, ἃ ὑπογραπτέον.

Τέλος δὲ $\frac{1}{10}$ τοῦ Ε ἐστὶν $\frac{1}{10}$ γροσίων 2, εἴτ' οὖν παρ' 8.

Ἁπασῶν δὲ τούτων τῶν δυνάμεων συναφθεισῶν, πρόεισιν ὁ ἀριθμὸς 32210, ὁ καὶ διὰ τῆς πρώτης προελθὼν μεθόδου.

273 ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπὶ τοῦ προεκτεθέντος Ἀβακίου παρατηρητέον, ὅτι οἱ ἀριθμηταὶ, καίτοι τῶν αὐτῶν ἀεὶ ὄντων παρονομαστῶν, ποικίλλονται κατά τινα ἀπαράβατον νόμον· α΄. ἐν μὲν γὰρ τῷ Α στίχῳ ὁ ἀριθμητὴς ἄτρεπτος διαμένει 1. β΄. ὁ πρὸς ἀριστερὰν πρῶτος ἑκάστου στίχου ἀριθμητὴς, καὶ αὐτὸς ἀεὶ ὢν 1, ἀεὶ προχωρεῖ βῆμα ἓν, οὕτως εἰπεῖν, πρὸς τὰ δεξιὰ τῷ ὕπερθεν πρώτῳ παραβαλλόμενος. γ΄. ἕκαστος ἀριθμητὴς στίχου παντὸς περιέχει τὸ πάντων τῶν πρὸς ἀριστερὰν πρὸ αὐτοῦ ἀριθμητῶν τοῦ ἀνωτέρου στίχου ἄθροισμα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ὁ 2 ἀριθμητὴς τοῦ Β στίχου ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἀριθμητῶν 1, 1, οἵτινες προηγοῦνται αὐτοῦ ἐν τῷ Α στίχῳ· ὁ δὲ 3 ἀριθμητὴς τοῦ Β στίχου ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων αὐτοῦ ἐν τῷ Α στίχῳ τριῶν ἀριθμητῶν 1, 1, 1, ὁ δὲ 4, τὸ τῶν ἀριθμητῶν 1, 1, 1, 1·

ὡσαύτως ἐπὶ τοῦ Γ στίχου, ὁ 3 ἀριθμητής ἐστι τὸ ἄθροισμα τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ Β στίχου ἀριθμητῶν 1, 2· ὁ δὲ 6 ἀριθμητὴς, τὸ τῶν ἡγουμένων αὐτοῦ ἐν τῷ Β στίχῳ ἀριθμητῶν 1, 2, 3, ἄθροισμα, καὶ ἑξῆς ἐπὶ τῶν ἄλλων στίχων ὡσαύτως.

274. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν ἄρα ὁ ἑνός τινος στίχου ἀριθμητὴς σημαίνει πάντων τῶν ἡγουμένων αὐτοῦ ἐν τῷ ὑπερτέρῳ στίχῳ ἀριθμητῶν τὸ ἄθροισμα· ἐν γὰρ τῷ Γ στίχῳ ὁ 3 ἀριθμητὴς ἐνδείκνυσι τὸ τῶν 1, 2 προηγουμένων ἀριθμητῶν τοῦ Β στίχου ἄθροισμα· συναφθέντος ἄρα ἀριθμητοῦ κατωτέρου, οἷος ὁ 3 ἐν τῷ Γ στίχῳ, ἀριθμητῇ καθυπερτέρῳ τῷ 3, τὸ 6 ἄθροισμα, α΄. παρέξει τὸν ἐφεξῆς ἀριθμητὴν τοῦ Γ στίχου· β΄. ἔσται πάντων τῶν ἐπὶ τοῦ Β στίχου ἡγουμένων τοῦ ἐν τῷ Γ στίχῳ ἀριθμητοῦ 6 ἀριθμητῶν ἄθροισμα.

275. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπάναγκες ἄρα ἑκάστην στήλην, τὴν τοῦ πέμπτου, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἐνιαυτοῦ, ἐνδεικνῦναι τὸ πάντων τῶν ἀριθμητῶν τῶν παρῳχομένων ἐνιαυτῶν ἐν ἑκάστῳ ἄθροισμα· οὕτως ὁ 4 ἀριθμητὴς τοῦ ε΄. ἔτους ὁ ἐν τῷ Β στίχῳ ἐστὶ τὸ τῶν ἐν τῷ Α στίχῳ ὑπὲρ τεσσάρων ἐνιαυτῶν ἀριθμητῶν ἄθροισμα· ὁ δ᾽ ἐν Γ ἀριθμητὴς 6 τοῦ ε΄. ἔτους ἐνδείκνυσι τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἐν τῷ Β στίχῳ ὑπὲρ ἐτῶν τεσσάρων ἀριθμητῶν, καὶ καθεξῆς οὕτω.

276. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Προαχθείη ἄρα τὸ Ἀβάκιον εἰς ὅσων ἄντις βούλοιτο ἐτῶν ἀριθμόν· κείσθω γὰρ συνάψαι τούτῳ τὴν ἑνὸς ἔτι ἐνιαυτοῦ τοῦ ἕκτου στήλην· οὐκοῦν γεγράφθω 1 ἐν τῷ Α στίχῳ, ὥσπερ ἐνταῦθ᾽ ὁρᾶται· ὁ δὲ τοῦ Β ἀριθμητὴς τοῦ προτέρου Ἀβακίου, συναφθεὶς τῇ ὑπὲρ αὐτὸν 1, παρέχει τῇ

ϛ΄. ἐνιαυτός.	
1	Α
5	Β
10	Γ
10	
5	
1	

νέα σήλη εἰς τὸν Β σίχον 5· ὁ δὲ τῦ Γ ἀριθμητὴς 6, συναφθεὶς τῷ τῦ Β ἀριθμητῇ 4 τῦ προτέρυ Α'βακίυ, παρέχει 10 ὑπὲρ τῦ Γ τῇ ἕκτῃ σήλῃ τῦ ἐνταῦθ' Α'βακίυ, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· τέλος δ' ἐπεὶ ἑκάσῃ σήλῃ λήγει πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ $\frac{1}{10}$ τῦ προτέρυ Α'βακίυ, γεγράφθω 1 κἀνταῦθα· ἐντεῦθεν ἐσχημάτισαι ϗ ἡ ἕκτη τῦ ἕκτυ ἔτυς σήλη. Τὰ αὐτὰ δὲ διεκπερανθήσεται ἑξῆς ϗ εἰς ἑβδόμην σήλην, ϗ ὀγδόην κτ.

277. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ὑποθώμεθα τοιγαρῦν Α'βακα προηγμένον ἐς τὸν ις'. ἐνιαυτὸν, μόνον μέντοιγε τῶν ἀριθμητῶν περιεκτικόν· οὗτος ἓν ξυντελέσει εἰς τὸ λογίζεσθαι τὺς τόκων τόκυς πρὸν ὅσον ἂν ὑποτεθῇ τόκον, ϗ ὅσυς ἐνιαυτὺς τὺς τὰ 16 μὴ ὑπερβαίνοντας.

278. ΣΧΟΛΙΟΝ. Οὐκ ὀλιγάκις ἐπὶ τῶν δικασηρίων οἱ τόκοι τῶν τόκων λογισμῷ θηρεύονται· ἀλλὰ τῶν 5, ἢ 6 ἐνιαυτῶν ἐπέκεινα τελυμένυ ζητήματος, ὐκ ἂν

	1. ἔτ.	2. ἔτ.	3. ἔτ.	4. ἔτ.	5. ἔτ.	6. ἔτ.	7. ἔτ.	8. ἔτ.	9. ἔτ.	10. ἔτ.	11. ἔτ.	12. ἔτ.	13. ἔτ.	14. ἔτ.	15. ἔτ.	16. ἔτ.
Α	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Β		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Γ			1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105
Δ				1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455
Ε					1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365
Ζ						1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
Η							1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
Θ								1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
Ι									1	9	45	165	495	1287	3003	6435
Κ										1	10	55	220	715	2002	5005
Λ											1	11	66	286	1001	3003
Μ												1	12	78	366	1365
Ν													1	13	91	455
Ξ														1	14	105
Ο															1	15
Π																1

τις εἴποι ὅσον χοινοτενής τε ϗ περιπεπλεγμένος καθίϛαται ὁ λογισμὸς παρὰ τὴν ἄφευκτον πάροδον διαφόρων κλασμάτων· ὐκ ἄρ' ἀξυντελὲς πάμπαν ἂν εἴη ὑποϛρώσασθαι τὸν Α''βακα τῦτον μέχρι προήκοντα τῶν 16 ἐνιαυτῶν· ὗ τὴν χρῆσιν ῥάω παρεξόμεθα προςιθέντες ἑξῆς προβλημάτων δυάδα.

279. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Α'πορφανισθείςτις ἐκληρονόμησε γρόσια 80000· Παρελθόντων ὖν ἐνιαυτῶν 12 αἰτεῖ λόγον τὸν ἑαυτῦ ἐπίτροπον τῦτε κεφαλάιυ, ϗ τῦ τόκυ τῦ κεφαλαίυ, ναὶ μὴν ϗ τῶν τόκων τῶν τόκων πρὸς 5 τῶν 100, ἢ πρὸς τόκον 20· πόσ' ἄρα καταβαλεῖ χρήματα;

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω ἐπὶ τῦ Α''βακος αἱ τῦ ιγ΄. ἐνιαυτῦ ϛήλη, ἢ ἡ ιγ΄. ϛήλη, γραφέντος ἰδίᾳ τῦ 80000 κεφαλαίυ.

Ο' ἐν τῇ ιγ΄. ϛήλῃ 12 ἐνδείκνυσι τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀριθμητῶν τῶν ἐν τῷ Α ϛίχῳ ὑπὲρ ἐτῶν 12 (274)· ἀλλ' ἡ ἐν τῷδε τῷ ϛίχῳ 1 τὸν ἐνιαύσιον τόκον τῶν 80000 δηλῦσα, πρὸς τόκον 20, παρίϛησι $\frac{1}{20}$ τῶν 80000, ἢ 4000· ὗτος ἄρα δωδεκάκις, ποιεῖ 48000, ὃς γεγράφθω ὑπὸ τὸν 80000.

Ἡ ἐν τῷ Β ϛίχῳ 1 ἔϛαι $\frac{1}{20}$ τῦ ἐν τῷ Α $\frac{1}{20}$, εἴγε ἔϛι τῦτυ τόκος ἐκεῖνο· δηλώσει ἄρα $\frac{1}{20}$ τῶν 4000, εἴτ' ὖν 200· ἀλλ' ὁ τῆς ιγ΄. ϛήλης γ΄. ἀριθμητὴς 66 καταγγέλλει, ὅτι ἐϛὶν ἐν τῷ Β δευτέρῳ ϛίχῳ ὑπὲρ ἐτῶν 12 ἑξηκοντάκις ϗ ἑξάκις τὸ $\frac{1}{20}$· πολλαπλασιασθέντος ἄρα τῦ 200 διὰ 66, γεγράφθω 13200 προκύπτων ὑπὸ τὸν 48000.

$\frac{1}{20}$ τῦ Γ τρίτυ ϛίχυ ἐϛὶν $\frac{1}{20}$ τῦ ἐν τῷ δευτέρῳ ϛίχῳ $\frac{1}{20}$, ἅτε αὐτῦ ὂν τόκος· ἔϛιν ἄρα $\frac{1}{20}$ τῶν 200, ὅ ἐϛι 10· ὐκῦν πεπολλαπλασιάσθω 10 ἐπὶ 220 τέταρτον ἀριθ-

μητὴν τῆς ιγ΄. ςήλης. ϗ γεγράφθω ὁ προκύπτων 2200 $\frac{1}{20}$ τῦ τετάρτυ ὅρυ Δ ἐςὶν $\frac{1}{20}$ τῶν 10 γροσίων, εἴτ᾽ ὖν $\frac{10}{20}$, ἢ $\frac{1}{2}$· πεπολλαπλασιάσθω ἄρα $\frac{1}{2}$ διὰ 495 πέμπτυ ἀριθμητῦ τῆς ιγ΄. ςήλης, ὅθεν προκύψυσι 247 γρόσ. ϗ 20 παράδαι. $\frac{1}{20}$ τῦ Ε ςίχυ ἐςὶν $\frac{1}{20}$ τῦ $\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{40}$, ὃ πολλαπ. διὰ 792, ἀποδ. 19 γρ. 32 παρ. $\frac{1}{20}$ τῦ Ζ ἐςὶν $\frac{1}{20}$ τῦ $\frac{1}{40}$, ἢ $\frac{1}{800}$, ὃ πολλαπλασιαθὲν ἐπὶ 924 παρέχεται 1 γρόσιον, 6 παράδ. ϗ $\frac{1}{2}$ λεπτά· $\frac{1}{20}$ τῦ Η ςίχυ ἐςὶν $\frac{1}{20}$ τῦ $\frac{1}{800}$, ἢ $\frac{1}{16000}$, ὃ πολλαπλασιαθὲν διά 792 παρέχει 2 παράδ· ὡς ἔγγιςα.

80000		
48000		
13200		
2200		
247	20	0
19	32	0
1	6	$\frac{1}{2}$
0	2	
143668	20	$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{20}$ τῦ Θ ςίχυ ἐςὶν $\frac{1}{20}$ τῦ $\frac{1}{16000}$, ἢ $\frac{1}{320000}$, ὃ πολλαπλασιαθὲν διὰ 495 παρέχει μόνον $\frac{1}{3}$ λεπτῦ. Παροπτέον ἄρα τόνδε τὸν ςίχον, πολλῷ δὲ μᾶλλον ϗ τὺς ἑξῆς. Προσθέσει ὖν εὑρίσκεται ἀποδώσων ὁ ἐπίτροπος 143668 γρόσια, ϗ παράδας 20, ϗ λεπτὸν 1.

280. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ἐξελήλεγκταί τις καταχῶν ἀδίκως πρὸ ἐτῶν 8 γρόσια 1000· κατακέκριται δὲ τὸ κεφάλαιον καταβαλεῖν συνάμα τῷ τόκῳ αὐτῦ, ϗ τοῖς τόκοις τῶν τόκων, κατὰ λόγον τῶν 4 πρὸς 100· πόσον ἀποτίσει;

Ἡ Θ΄. ςήλη ἐμφαίνει τὺς ἐτῶν 8 ἀριθμητάς· τῦ 4 δὲ πρὸς τὰ 100 ὄντος $\frac{1}{25}$, παρονομαςὴς ἔςαι ὁ 25.

$\frac{1}{25}$ τῦ Α ςίχυ, ὁ τόκος ὢν τῶν 1000, ἔςαι $\frac{1}{25}$ τῶν 1000 ἢ 40 γρόσια· ἀλλ᾽ ὁ δεύτερος ἀριθμητὴς τῆς Θ΄. ςήλης ἐκδείκνυσιν ὅτι ἐξ αὐτῶν εἰσιν 8 ἐν τῷ Α ςίχῳ· πολλαπλασιαθέντος ἄρα τῦ 40 ἐπὶ 8, ὁ προκύπτων 320 γεγράφθω ὑπὸ τὸ κεφάλαιον 1000.

1000	0	0
320	0	0
44	32	0
3	23	1
0	7	$\frac{1}{2}$
0	0	1
1368	22	$2\frac{1}{2}$

$\frac{1}{25}$ τοῦ Β΄. στίχου ἐστὶν $\frac{1}{25}$ τῶν 40 γροσίων, ἢ $\frac{40}{25}$, ἢ $\frac{8}{5}$· ἐπεὶ δὲ ὁ τῆς Θ΄. στήλης τρίτος ἀριθμητὴς 28 μαρτυρεῖ, ὡς ἔστιν ἐξ αὐτῶν 28 ἐν τῷ Β στίχῳ· πεπολλαπλασιάσθω ἄρα $\frac{8}{5}$ ἐπὶ 28· ὁ δὲ προκύπτων 44 γρόσια, 32 παράδαι, γεγράφθωσαν ἐν τῇ αὐτῶν τάξει.

$\frac{1}{25}$ τοῦ Γ στίχου ἐστὶν $\frac{1}{25}$ τῶν $\frac{8}{5}$, ἢ $\frac{8}{125}$ × 56, τέταρτον ἀριθμητὴν τῆς Θ΄. στήλης· οὗ κεῖν ὁ προκύπτων 3 γρόσια, 23 παράδαι, 1 λεπτὸν, κατὰ τάξιν γραφθήτω.

$\frac{1}{25}$ τοῦ Δ στίχου ἐστὶ $\frac{1}{25}$ τῶν $\frac{8}{125}$, ἢ $\frac{8}{3125}$, ὃ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 70 προάγει 7 παράδας, $\frac{1}{2}$ λεπτ., ἃ καὶ ταῦτα σημειούσθωσαν.

$\frac{1}{25}$ τοῦ Ε στίχου ἐστὶν $\frac{1}{25}$ τῶν $\frac{8}{3125}$, ἢ $\frac{8}{78125}$, ὃ, πολλαπλασιασθὲν διὰ 56, προάγει ὡς ἔγγιστα 1 λεπτὸν, ὃ προσεθήτω τῇ τάξει τελευταῖον.

Οἱ οὖν ἑξῆς στίχοι παροπτέοι· ὁ δὲ κατακριθεὶς, καταβαλεῖν ὀφείλει 1368: γρόσια, 32 παράδας, κτ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς ὑφαιρέσεως.

281. Ὑφαίρεσιν καλῶ τὴν ἀπότινος κεφαλαίου ἀποχώρισιν ποσότητος κατ' ἀναλογίαν, οὗ προλαμβάνει τις χρόνου εἰς τὸ ἀποδοῦναι τοδὶ τὸ κεφάλαιον· ὃ δὴ ἀείποτε εἴωθε γίνεσθαι διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ὠνήσατότις οἶκον γροσίων 20000, ἃ ἀποτίσει μετ' ἐνιαυτόν· ἢ πρὸς τὸ παρὸν καταχὼν καθ' ἑκατὸν 10, ἀποτίσει τὰ λοιπά· πόσα οὖν ἀποδώσει; σκέπτου δὴ οὕτω: εἴπερ 110 γρόσια ἀποδοτέα μετ' ἐνιαυτὸν, ἀ-

ποδίδονται πρὸς τὸ παρὸν γινόμενα 10, πόσοις ἐλαττωθήσονται γρόσια 20000; ἐντεῦθεν ἡ τῶν τριῶν μέθοδος· 110, 100, 2000 ἀποκρίνεται 1818 1 γρόσια, ϗ 32 παράδας ϗ 2 λεπτά.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Χρήζων λαβεῖν κεφάλαιον γροσίων 5000, ἃ ἀποδοθήσονταί μοι μετὰ ἐνιαυτὸν, συντίθεμαι τῷ διδόντι ἀφεῖναι καθ᾽ ἑκατὸν 10 τοῦ ἔτους, ἵνα ἀπολάβω τὰ ἐμαυτοῦ πρὸς μηνῶν 8. πόσ᾽ ἄρ ἀπολήψομαι; σκέπτομαι δὴ οὕτω· 12 μῆνες ὑφαιροῦσι 10 τῶν 100, πόσα οὖν ὑφαιρήσουσι μῆνες 8; 12, 10, 8, ἐξ ὧν πρόεισι $6\frac{2}{3}$· σκέπτομαι αὖθις· ἐὰν $106\frac{2}{3}$, πρὸ μηνῶν 8 ἀποδιδόμενα, γίνονται 100, πόσα γενήσονται γρόσια 5000; ἡ μέθοδος: $106\frac{2}{3}$, 100 5000 ἀποκρίνεται (206) γρόσια 4687, ϗ παράδας 20.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδου τοῦ Κολλύβου.

282. ΥΠΟΔΕΙΜΓΑ. Α΄. Συντίθεμαι ἐν Κωνσταντινουπόλει Κολλυβιστῇ τινι, ἵνα ἐν Θεσσαλονίκῃ ὁ ἐκείνου ἑταῖρος ἀποδῷ τῷ ἐμῷ ἑταίρῳ γρόσια 4000· περὶ δὲ τούτων ἀφίημι τῷ ἐν Κωνσταντινουπόλει 4 καθ᾽ ἑκατόν· πόσα οὖν αὐτῷ ἀποτίσω; σκέπτομαι οὕτω: 100 γρόσια ἐν Θεσσαλονίκῃ αἰτοῦσιν 104 ἐν Κωνσταντινουπόλει, πόσα αἰτήσουσι 4000; ἡ μέθοδος τῶν τριῶν δίδωσι 4160, ἃ ἀνάγκη μοι καταβαλεῖν τῷ ἐν Κωνσταντινουπόλει κολλυβιστῇ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Αἰτήσας ἔλαβον ἐν Κωνσταντινουπόλει παρὰ κολλυβιστοῦ συγγραφὴν κολλυβισικὴν, δι᾽ ἧς λή-

ψομαι γρόσια 3000 ἐν Λαρίσσῃ τῆς Θετταλίας παρὰ τȣ̃ ἑτερείαν ἔχοντος μετὰ τȣ́τȣ ἐκεῖθι, ἀφεὶς καθ᾽ ἑκατὸν 3. Πόσα ȣ̃ν λήψομαι ἐν Λαρίσσῃ; ἐπεὶ ἐνταῦθα τὰ 100 ἐκεῖθι καθίςανται 97 ἡ μεθόδος 100, 97, 3000 ἀποκρίνεται· 2910 γρόσια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδȣ τῆς Συγκράσεως.

283. Ἡ Μέθοδος αὕτη κεῖται ἐν τῷ μιγνύειν ὁμȣ̃ πράγματα παντοίως τιμώμενα, εἰς τὸ εὑρεῖν μίγματι μέσης τιμῆς, ἢ, τȣ̃ μίγματος γενομένȣ, εὑρεῖν μέσην τιμὴν ἢ, ἔτι, πόσον ἑκάςης τιμῆς εἰσελθεῖν ἐδυνήθη τῷ μίγματι· ἐπιλυσόμεθα τοιγαρȣ̃ν προβλήματα, ὧν ἐςὶ σχέσις πρὸς τὰς τρεῖς ταύτας περιπτώσεις.

284. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Μίξαι πράγματα, παντοίως τιμώμενα, ὥςε τὸ μίγμα διδόναι τὴν ζητȣμένην μέσην τιμήν.

Ἀντικαταςαθήτω ἡ διαφορὰ τῆς τὴν μέσην τιμὴν ὑπερκειμένης ποσότητος ϗ αὐτῆς τῆς μέσης τιμῆς τῇ διαφορᾷ, ᾗ διαφέρει ἡ μέση τιμὴ τῆς λειπομένης, ϗ ἀντιςρόφως.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Οἴνȣ 5 παραδῶν τιμωμένης ἑκάςης ὀκᾶς, ἄλλȣ δὲ, 9· ἄλλȣ δὲ, 14· ϗ ἄλλȣ, 16· μίγμα ποιῆσαι, τιμώμενον 12 παραδῶν ἀνὰ ὀκᾶν.

ΛΥΣΙΣ Α΄. Γράψον ἔνερθεν μὲν τῆς μέσης τιμῆς 12 τὰς ποσότητας, αἳ εἰσι μείζȣς ἢ 12· ὕπερθεν δὲ τὰς ἐλάττȣς, ἢ 12, ὡς ὁρᾶται ἐνταῦθα. β΄. λάβε τὴν δια-

φορὰν, ᾗ διαφέρει ὁ 5 τοῦ 12, ἥτις ἐστὶν 7, καὶ γράψον αὐτὴν ἐν δεξιᾷ τοῦ 14· καὶ τοὐναντίον τὴν διαφορὰν, ᾗ διαφέρει ὁ 14 τοῦ 12, ἥτις ἐστὶ 2, γράψον ἐν δεξιᾷ τοῦ 5· μέτελθε δὲ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸν 16 μετὰ τοῦ 9· ἡ διαφορὰ, ᾗ διαφέρει ὁ 9 τοῦ 12, ἐστὶ 3, ὃν γράψον ἐν δεξιᾷ τοῦ 16· ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ 16, ᾗ διφέρει ὁ 12 τοῦ 9, ἐστὶ 4, ὃν γράψον κατὰ δεξιὰν τοῦ 9.

5	2
9	4
12	
14	7
16	3
	16

Συναφθέντων δὲ τῶν ἐν τοῖς δεξιοῖς χαρακτήρων, συνάγεται, ὅτι δυνήσομαι μίγματι ἀπεργάσασθαι 16 ὀκαδῶν, 12 παραδῶν τιμωμένης ἑκάστης, ἐνθέμενος 2 μὲν ὀκάδας τοῦ διὰ 5 παραδῶν, 4 δὲ τοῦ δὶ 9, 7 δὲ τοῦ διὰ 14, καὶ 3 τέλος διὰ 16.

ΔΕΙΞΙΣ. Πωλῶν 12 παραδῶν 2 ὀκάδας οἴνου, ὃς ἐτιμᾶτο παραδῶν 5, ἀποίσεται κέρδος 12 παράδας· ἀλλὰ πωλῶν μετὰ τὴν μίξιν 12 παραδῶν 7 μέτρα οἴνου, ὃς ἐτιμᾶτο 14 παραδῶν ζημιωθήσεται παράδαις 14· παρατηρουμένης ἄρα τῆς τοῦ μίγματος μεθόδου, τῆς ἄρτι ἀποδεδομένης, ἀντάμειψίς τις ἐγένετο ἀκριβὴς τοῦτε κέρδους καὶ τῆς ζημίας. Ο. Ε. Δ.

Βάσανος τῆς πράξεως. Ἐπεὶ ὀκάδαι 16 ἀνὰ 120 παράδας παρέχουσιν 192 παράδας· ἐὰν συναφθῶσιν αἱ τιμαὶ ὀκαδῶν 2 ἀνὰ 5 παράδας· 4 ἀνὰ 9· 14 ἀνὰ 7 16 ἀνὰ 3, τὸ τούτων ἄθροισμα ἔσται παράδαι 192.

385. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἀδιάφορον δὲ, καθ᾽ ἣν ἂν συγκραθεῖεν τάξιν αἱ ποσότητες· ἀντὶ γὰρ 5 τοῖς 14, καὶ 9 τοῖς 16, ὡς ἤδη γέγονεν, ἐξέσται συνάπτειν 5 τοῖς 16, ὡς ὁρᾶται ἐνταῦθα, γράφοντας τὴν 7 διαφορὰν, ᾗ διαφέρει ὁ 5 τοῦ 12, ἐν δεξιοῖς τοῦ 16· μετὰ δὲ, 4 διαφορὰν, ᾗ διαφέρει ὁ 16 τοῦ 12, κατὰ δεξιὰν τοῦ 5;

καὶ δὴ καὶ τὴν 3 διαφορὰν, ἣ διαφέρει ὁ 9 τοῦ 12, ἐν δεξιοῖς τοῦ 14· μετὰ δὲ, 2 διαφορὰν, ἣ διαφέρει ὁ 14 τοῦ 12, ἐν τοῖς δεξιοῖς τοῦ 9· ἕψεται οὖν κἀνταῦθα τὸ αὐτὸ μίγμα 16, τῆς ἔκτε τοῦ κέρδους, καὶ τῆς ζημίας συνανταμείψεως γενομένης τῆς αὐτῆς· ὅταν ἄρα πλείω μὲν ποσὰ ἢ ἓν ὦσιν ὑπὲρ τὴν μέσην τιμὴν, πλείω δὲ ἔνερθεν, τὸ πρόβλημα παντοίως λυθήσεται.

5	4
9	2
12	
14	3
16	7
	16

286. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τῶν πολλῶν, ὧν ἐπιδέχεται ἐπιλύσεων τόδε τὸ πρόβλημα, κατὰ παντοίας περιπτώσεις, ἄλλην αἱρετέον πρὸ ἄλλης· τῶν γὰρ ἐνταῦθα τὸ πρῶτον μὲν μετιτέον τῶν μιγμάτων, οἷς πλείων μὲν οἶνος ὁ ἀνὰ παράδας 9, ἢ ὁ ἀνὰ 5· πλείων δὲ ὁ ἀνὰ 14 ἢ ὁ ἀνὰ 16· οἷς γέ μὴν ἐςι πλείων ὁ ἀνὰ 5, ἢ ὁ ἀνὰ 9· πλείων δὲ ὁ ἀνὰ 16, ἢ ὁ ἀνὰ 14, ἀνθαιρετέον τοῦ πρώτου τὸ δεύτερον.

287. ΠΟΡΙΣΜΑ Ἐὰν ἄρα ὦσιν ἔνερθεν τῆς μέσης τιμῆς ποσότητες πλείους, ἢ ὕπερθεν· ἢ καὶ τοὐναντίον, μικτέον μίαν τῶν ποσοτήτων τῶν ἐν ταῖς ἐλάττοσι, πλείοσι τῶν ἐν ταῖς πλείοσι· ἡ δ' ἀντάμειψις γενήσεται ὡς καὶ πρότερον, καθὰ φανήσεται ἐν τῷ ἑξῆς ὑποδείγματι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Γεωργός τις βούλεται χαρίσασθαί τινι 100 μέτρα κριθῆς, τιμωμένου ἀνὰ 12 γρόσια ἑκάςου μέτρου· ἀλλὰ ταύτης ἀπορῶν, ἀναγκάζεται συμμίξαι ἐκ τῆς 8 γροσίων τιμῆς, καὶ ἐκ τῆς 10, καὶ ἐκ τῆς 11, καὶ 14, καὶ 15 γροσίων· πῶς ἂν ποιήσειε τοῦτο τὸ μίγμα;

Συμμίξας 8 τοῖς 14, καὶ 10 τοῖς 15, ἀδιαφόρως σύμμιξον 11 ἢ τοῖς 14, ἢ τοῖς 15 (287)· ἑνώσας οὖν αὐτὸν τοῖς 15, εὑρήσεις, ὅτι δυνήσεται ὁ Γεωργὸς ποιῆσαι μίγμα τι 15 μέτρων, τιθεὶς 2 μέτρα τῶν ἀνὰ γρόσια

8, 3 ἀνὰ 10, 3 ἀνὰ 11, 4 ἀνὰ 14, καὶ 3 ἀνὰ 15.

8	2
10	3
11	3
12	
14	4
15	2 } 1
	15

Ἐπεὶ δ᾽ ȣ̓χὶ 15 ἀλλὰ 100 μέτρα κριθῆς χαρίσεται, ὑπὲρ ἑκάϛȣ τῶν πέντε ἀριθμῶν ποίησον ἰδίᾳ μέθοδον τῶν τριῶν· ὑπὲρ τȣ̃ 2 ȣ̃τως· ἐὰν 15 μέτρα μίγματος αἰτῶσι 2 μέτρα ἀνὰ γρόσια 8, 100 μέτρα πόσα αἰτήσȣσι; 15, 2, 100, ὅθεν ἔϛαι 13 ϗ ⅓· ὡσαύτως πάλιν· 15 μέτρα μίγματος αἰτȣ̃σι 3 μέτρα τῆς τιμῆς τῶν 10 γροσίων, πόσα τὰ 100 αἰτήσȣσι; εὑρεθήσονται 20 ἐκ τῶν τῆς τιμῆς ταύτης 10· ὡσαύτως δὲ καὶ περὶ τῆς τιμῆς τῶν 11, ϗ 15 γροσίων· τέλος δὲ ὑπὲρ τȣ̃ 4 ἀριθμȣ̃ λέγε ȣ̃τω: 15 μέτρα μίγματος αἰτȣ̃σι 4 μέτρα τῶν ἀνὰ 14 γρόσια, πόσα αἰτήσȣσι τὰ 100; ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ἀπονέμει 26 ϗ ⅔. Προσθέσεως δὲ γενομένης, ὡς ἐνταῦθα φαίνεται, εὑρηθήσονται τὰ 100 μέτρα τȣ̃ μίγματος, ἐν ᾧ ἐνθήσει ὁ Γεωργὸς 13 μέτρα ϗ ⅓ κριθῆς τῆς ἀνὰ γρόσια 8· 20 δὲ μέτρα τῆς ἀνὰ 10· τοσαῦτα δὲ ϗ τῆς ἀνὰ 11 ϗ 15, ϗ 26 ϗ ⅔ τῆς ἀνὰ 14· τὸ ȣ̃ν ἄθροισμα τῆς τιμῆς τȣ̃ ȣ̃τω γενομένȣ μίγματος ἔσεται ἀκριβῶς 1200 γρόσια, ἅτινα διαιρεθέντα διὰ 100 μέτρων παρέχȣσι τὴν 12 μέσην τιμὴν, ἣν ἐθέλετο ὁ Γεωργός.

8	$13\frac{1}{3}$
10	20
11	20
14	$26\frac{2}{3}$
15	20
	100

288. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ἐπὶ μίγματος πραγμάτων τιμῆς παντοίας, τὴν μέσην αὐτῶν εὑρεῖν τιμήν.

ΛΥΣΙΣ. Δίελε τὸ ἄθροισμα τῆς τιμῆς, ἧς τιμᾶται ὅλον τὸ μίγμα, διὰ τȣ̃ ὁλικȣ̃ ἀθροίσματος τῶν εἰς τὸ μίγμα εἰσελθȣσῶν ποσοτήτων· τὸ ȣ̃ν πηλίκον ἔϛαι ἡ ζητȣμένη μέση τιμή.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κλεάνθης ὠνησάμενος 30 μὲν ὀκάδας ὠνίου τινὸς, 12 παραδῶν ἑκάστην ὀκᾶν, 48 δὲ ὀκάδας, παραδῶν 14· 50 δὲ ὀκάδας, 17 παραδῶν· 100 δὲ ὀκάδας, 17 παραδῶν· συμμίξας δὲ πάντα, ἀπέδοτο τῷ Νικοστράτῳ ἐξ αὐτῶν ὀκάδας 60· πόσον οὖν ὑπὲρ τούτων καταβαλεῖ ὁ Νικόστρατος.

Ἅπασαι συναφθεῖσαι αἱ ὀκάδαι ἀποπληροῦσι 228· τὸ ὑποτεθὲν μίγμα τιμηθὲν 30 κις 12 παραδῶν κτ., ὥσπερ ἐνταῦθα καταφαίνεται, συμπληροῖ παράδας 3682, ὃς διαιρεθεὶς διὰ 228, ἀποδίδωσι τὴν μέσην τιμὴν τῆς ὀκᾶς, 16 παράδας καὶ $\frac{17}{38}$ λεπτοῦ· 60 τοίνυν πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὴν εὑρεθεῖσαν μέσην τιμὴν προβαλεῖ γρόσια 24, παράδας 9, καὶ λεπτὰ $2\frac{1}{2}$, ἃ ἀποτίσει ὁ Νικόστρατ.

30 —	κις 12	παράδ.	360 σολ.
48	κις 14		672
50	κις 17		850
100	κις 18		1800
228			3682

289. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Μίγματος δοθέντος εὑρεῖν ὅσον οἱ εἰσεχώρησε τιμῆς ἑκάστης.

ΛΥΣΙΣ. Ποίησον εὐθὺς ὡς κἀπὶ τῶν δύω προηγησαμένων προβλημάτων (284, 288).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. 30 μέτρων διαφόρου κριθῆς πωληθέντων, τῶν μὲν ἕκαστον τετίμηται γροσίων 10, τῶν δὲ, 8· τῶν δὲ, 6· τῶν δὲ, 4· τῶν δὲ, 2· συλλήβδην δὲ, 212· πόσα οὖν εἰσεχώρησαν τῆς τῶν 10 γροσίων τιμῆς πόσα τῆς τῶν 8, πόσα τῆς τῶν 6, πόσα τῆς τῶν 4, καὶ πόσα τῆς τῶν 2;

Α΄. Ζήτησον τὴν μέσην τιμὴν, 212 γρόσια διελὼν διὰ μέτρων 30 (288), ἕξεις 7 $\frac{1}{15}$ τιμὴν μέσην.

Β΄. Σύμμιξον τὰς διαφόρους τιμὰς τῇ μέσῃ ταύτῃ τιμῇ· ὅθεν φανήσεται, ὅτι 16 μέτρα συστῆναι δύνανται

τιθεμένων 6 $\frac{2}{15}$ μέτρων τῶν πρὸς 10 γρόσια, 3 $\frac{1}{15}$ τῶν πρὸς 8 κτ., ὡς φαίνονται ἐνταῦθα κατεστρωμένα.

Γ΄. Ποίησον, ὡς ἐπὶ τοῦ ὑποδείγματος (287), σκεπτόμενος: 16 μέτρα μίγματος ἐπιδέχονται 6 $\frac{2}{15}$ κριθῆς τῆς γροσίων 10, πόσα ἐπιδέξονται μέτρα 30; 11 $\frac{1}{2}$ μέτρα, φησὶν ἡ μέθοδος.

Διὰ δὲ μεθόδων ὡσαύτως εὑρεθήσονται 5 $\frac{3}{4}$ τῆς τῶν 8 γροσίων, 5 $\frac{1}{2}$ τῆς τῶν 6, 1 $\frac{3}{4}$ τῆς τῶν 4, καὶ 5 $\frac{1}{2}$ τῆς τῶν 2.

10	{ 1 $\frac{1}{15}$ { 5 $\frac{1}{15}$	11 $\frac{1}{2}$
8	3 $\frac{1}{15}$	5 $\frac{3}{4}$
7 $\frac{1}{15}$		
6	2 $\frac{14}{15}$	5 $\frac{1}{2}$
4	$\frac{14}{15}$	1 $\frac{3}{4}$
2	2 $\frac{14}{15}$	5 $\frac{1}{2}$
	16	30

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπειδὴ πολλαχῶς ἔξεστιν ἀναμιγνύειν ἐκ πλειόνων τιμῶν ἓν ὅλον σύγκραμα (285), οὐ παρὰ τοῦτο ἐξέσται ἀναλύειν ἅπαν μίγμα εἰς τὰ ἐξ ὧν πραγματικῶς ἀναμέμικται. ἐπὶ γὰρ τοῦ προεκτεθέντος ὑποδείγματος πέφανται, ὅτι τὸ ὁλικὸν μίγμα τῶν 30 μέτρων, τιμηθὲν ὁμοῦ 212 γροσίων, ἠδύνατο ἀναμιχθῆναι ἐκ μέτρων 11 $\frac{1}{2}$ κριθῆς τῆς ἀνὰ γρόσια 10 κτ., ὡς σεσημείωται· ἀλλ' ἀντὶ γὰρ τοῦ ἑνοῦν 10 σὺν 6, καὶ ἔτι σὺν 2, ὡς ἤδη πέπρακται, ἠδύνατ' ἂν ἀναμιγνύειν 10 ἢ σὺν 6, ἢ σὺν 4, ἢ σὺν 2 μόνον· ὅθεν ἂν προέκυπτον ἀριθμοὶ τρεῖς ὑπὲρ τοῦ 10 παντοῖοι, τοῦ 11 $\frac{1}{2}$ ἐλάττονες· ἐντεῦθεν ἄρα, εἰ καὶ ἡ ἄρτι γεγονυῖα ἐπίλυσις ἐπὶ τοῦ προεκτεθέντος ὑποδείγματος ἐστιν ὧν ἂν ἐπιδέξαιτο τὸ πρόβλημα, ἀλλ' αὐτὸν εἶναι ἀληθῶς τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐτελέσθη ἡ ἀνάμιξις, συναγαγεῖν ἐπιεικῶς οὐ δυνησόμεθα. Ἀλλὰ ταῦτα μὲν ἅλις τοῖσγε τῇ ἀριθμητικῇ καὶ μόνῃ ἐξαρκεσθεῖσι· τοῖς δ' ἐνδοτέρω γενέσθαι ἐπιποθήσασιν ἰδεῖν ἐξέσται ἐν τοῖς περὶ ἐξισώσεων προβλήματα τῆς ἀναμίξεως ἐν ἀναπτύξεσι καιναῖς, καὶ πρὸς τὸ ἀκριβέστερον μᾶλλον ἐκλελεπτουργημέναις.

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΤΜΗΜΑ Α΄

ἐν ᾧ περιέχονται αἱ ἀρχοειδέσεραι αὐτȣ͂ πράξεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ἐν ᾧ αἱ προηγιματικαὶ ἀρχαί.

1. Συμβολικὸν λογισμὸν ὀνομάζειν ἀξιῶ τὸν καθολικώτερον μὲν τὸ ποσὸν ἀνερευνῶντα, σοιχείοις δὲ ϗ σημείοις τισὶ συμβολικῶς τὰ πράγματα παρεμφαίνοντα· τὰς δὲ κατὰ τȣ͂τον τὸν λογισμὸν τῶν ποσοτήτων ἐκθέσεις ἐξέσω ἀδιαφόρως καλεῖν, συμβολικὰς, ἢ καθολικας, ἢ γενικὰς, ἢ γραμματικὰς, διὰ τὸ παρίσασθαι, ὡς αὐτίκα ὀψόμεθα, διὰ τῶν τȣ͂ Ἀλφαβήτȣ μικρῶν γραμμάτων.

2. Πρὶν ἢ δὲ τὰ σοιχεῖα τȣ͂ λογισμȣ͂ τȣ́τȣ ἀποδȣ͂ναι, πρȣ́ργȣ ἂν εἴη τὴν δύναμιν ἐκδηλῶσαι τῶν εἰς ταῦτα παραλαμβανομένων λογισικῶν συμβόλων.

Αὐτικα ȣ͂ν αἱ μὲν ȣ̃τω = γραφόμεναι διτταὶ εὐθεῖαι, ὅτι ἡ τȣ́των ἡγȣμένη τῇ αὐταῖς ἑπομένῃ ποσότητι ἴσῃ

ἐςὶν, ἐμφαίνεσιν· ἀναγινώσκεται δὲ ἴσον, ἢ ἴσα, ἢ ἴση, κατὰ τὴν χρείαν.

Τὸ δὲ + σύμβολόν ἐςι προθέσεως, ὃ ἀπαγγέλλομεν σὺν· οἷον βελόμενοι ἐκθέσθαι τὸ ἄθροισμα, ἢ γεν τὴν σύναψιν τε 5 ϗ 4, γράφομεν ὕτω: 5 + 4 = 9· ἀπαγγέλλομεν δὲ: 5 σὺν 4 ἴσα 9.

Τὸ δὲ τῆς ἀφαιρέσεως γραμμή ἐςι πλαγία —, ἣν ἀπαγγέλλομεν πλὴν· 3 ἒν ἀπὸ τῶν 5 ἀφελεῖν βελόμενοι, σημαίνομεν τὴν ἀφαίρεσιν ὕτω: 5 — 3 = 2· ἀπαγγέλλομεν δὲ: 5 πλὴν 3 ἴσον 2.

Ὁ δε πολλαπλασιασμὸς σημαίνεται διὰ ςαυρε ἀνίσυς ἔχοντος γωνίας, ×, ἐφ' ὃ ἀπαγγέλλομεν, ἐπὶ· ἵν' ὖν σημάνωμεν τὸν τε 6 ἐπὶ 5 πολλαπλασιασμὸν, γράφομεν: 6 × 5· ἀπαγγέλλομεν δὲ: 6 πολλαπλασιαθεὶς ἐπὶ 5, ἢ ἑξάκις 5· ἐπίσης δὲ χρώμεθα ϗ τῷ (.) ςίγματι· ἀντὶ γὰρ 6 × 5, δυνάμεθα γράψαι 6· 5.

Ἡ δὲ διαίρεσις, γραμμῆς ὁριζοντείυ ἀχθείσης, ϗ ὑπὲρ αὐτῆς μὲν τε διαιρετέυ, ὑπ' αὐτὴν δὲ τε διαιρέτυ γραφέντων, σημαίνεται· οἷον, διαιρεντες 60 διὰ 4 γράφομεν $\frac{60}{4}$, ἀπαγγέλλοντες: 60 διαιρεθεὶς διὰ 4· ἐπίσης δὲ διασημαίνειν εἰώθασι τὴν διαίρεσιν ϗ τῷ (:) σημείῳ, ὗ ὄπισθεν μὲν ὁ διαιρετέος, πρόσθεν δ' ὁ διαιρέτης τάττεται ὕτω 60 : 4,.

Τὸ δὲ > σύμβολον μείζω μὲν δηλοῖ τὴν πρὸς ὃ διαχαίνει ποσότητα, ἐλάττω δὲ τὴν πρὸς ὃ διοξύνεται· ϗ τοίνυν 8 > 5 ἀπαγγελεμεν· 8 μείζων τε 5· ἐπὶ δὲ 5 < 8 : 5 ἐλάττων τε 8.

Τὸ δὲ ∞ ποσότητα ἄπειρον ἐμφαίνει, ταυτὸν εἰπεῖν, μείζω πάσης διορισθῆναι ἐχέσης ποσότητος.

Ὁρισμοί.

3. Ποσότης μόνιμος μὲν, ἢ ἀμετάβλητος, ἢ ἄτρεπτος, ἐςὶν ἡ μηδεμίαν ὑφιςαμένη μεταβολὴν, οἷός ἐςιν ὁ 5 ἀριθμὸς, ὃς ἀείποτε πέντε μονάδας σημαίνει· τρεπτὴ δὲ ἢ μεταβλητὴ, ἡ ποικίλλȣσα τὰς ἑαυτῆς δυνάμεις, οἷός ἐςιν ὁ γινόμενος ὑπὸ 5 ϗ παντοίων ἄλλων ἀριθμῶν, ἐφεξῆς κατὰ τὸ δοκȣ̃ν λαμβανομένων· εἰ γὰρ ἐπ' ἀδείας ὑποθώμεθα πολλαπλασιαςὰς τȣ̀ς, 1, 2, 3, 4 ∞, ὁ ἐκ τȣ̃ 5 ϗ τῶν ἄλλων κατὰ διαδοχὴν προκύπτων ἀριθμὸς ἔςαι 5, 10, 15, 20 5∞, ποικιλεῖται ἐμέλει ἐπ' ἄπειρον.

4. Ἐπιδιαιρȣ̃σι δὲ ϗ ἄλλως τὴν ποσότητα εἰς ἐγνωσμένην, ἧς ἡ δύναμις γινώσκεται· ϗ ἄγνωςον, ἧς ζητεῖται· κατὰ δὴ ταύτην τὴν διαίρεσιν, 70 μέν ἐςι ποσότης ἐγνωσμένη· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τȣ̃ 7 ϗ ἑτέρȣ τȣ̃, ὃν ἂν πρὸς τὸ δοκȣ̃ν θείη τις ἀριθμὸν, ἔςιν ἐμοὶ γȣ̃ν ποσότης ἄγνωςος.

5. Ποσότης συμβολικὴ, ἢ ὅ,τι δήποτε τῶν ἀποδοθέντων ὀνομάτων (1), ἀκȣ́ει ἡ ἐκτιθεμένη δι' ἑνὸς, ἢ πλειόνων γραμμάτων τȣ̃ Ἀλφαβήτȣ· διὰ μὲν ȣ̃ν τῶν πρώτων, οἷον α, β, γ κτ αἱ ἀμετάβλητοι ϗ ἐγνωσμέναι ἐκδηλȣ̃νται ποσότητες· διὰ δὲ τῶν ἐσχάτων, οἷον χ, υ, ω, τῶν ποσοτήτων αἱ τρεπταίτε ϗ ἄγνωςοι· ταύτας δὲ ἀδιαφόρως ἐκφέρομεν, ἤτοι διὰ τȣ̃ θηλυκȣ̃ ἄρθμȣ ἡ, ἢ διὰ τȣ̃ ȣ̓δετέρȣ τὸ, ἀμέλει ἡ α, ϗ τὸ α, τȣ̃τέσιν ἡ ποσότης α, ϗ τὸ ποσὸν α.

6. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τίνες δ' ἆρ αἱ δυνάμεις τῶν γραμμάτων α, β, χ, υ κτ, τῶν ἐν τῷ συμβολικῷ λογισμῷ λαμβανομένων; πύθοιτ' ἄντις ἴσως ȣ̓δεμία· ἐφ'

ἡμῖν γάρ ἐστι σημῆναι δι' αὐτῶν, ὅντινα ἂν βουλώμεθα ἀριθμὸν, ἢ ποσότητα, ἐγνωσμένην τε καὶ ἄγνωστον, μόνιμόν τε καὶ τρεπομένην, ἐν γένει λαμβανομένην ἢ γοῦν καὶ εἰδικωτέραν.

7. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Διὰ τοῦ συμβολικοῦ ἄρα λογισμοῦ ποικιλοειδεῖς πράξεις ἐπὶ ποσοτήτων τρεπτῶν τε καὶ ἀγνώστων διαπερανοῦμεν, ὡς διὰ τῆς προκειμένης ἡμῖν πραγματείας κατάδηλον ἔσεται.

8. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἵνα δὲ μηδεμία ᾖ ταῖς ἀπάταις καὶ ἀμφιγνοίαις ἡ χώρα, τὰ αὐτὰ ποσὰ διὰ τῶν αὐτῶν ἐκτεθήσονται γραμμάτων· τὰ δὲ διαφέροντα, καὶ πολλαπλᾶ ἀλλήλων μὴ ὄντα, διὰ διαφερόντων, καὶ μὴν καὶ γράμμα ἕκαστον τὴν οἰκείαν ἑαυτοῦ τηρήσει δύναμιν ἐπὶ πάσης τῆς λογισμοῦ τινος διαπράξεως.

9. Ὅταν ποσότης συμβολικὴ μὴ περιέχῃ πλείω μέρη διακεκριμένα τῷ +, εἰ τῷ — συμβόλῳ, ἀκούει ποσότης μονώνυμος, ἢ ποσὸν μονώνυμον· οὕτως οὖν α, ἢ αβ, ἢ α × β × γ, ποσότητές εἰσι μονώνυμοι· ἀλλ' εἰ μερῶν εὐμοιροίη διακρινομένων τοῖς +, — συμβόλοις, ἢ καὶ δι' ἀμφοῖν, γενικῶς τὸ μὲν ποσὸν καλεῖται πολυώνυμον, τὰ δ' αὐτοῦ διακριδὸν ἐκκείμενα μέρη, ὅροι· ἰδιαίτερον μέντοι, διώνυμος μὲν ἀκούσει, εἰ δυοῖν ὅροιν ἡ ποσότης ηὐμοίρησε· τριώνυμος δὲ, εἴπερ τριῶν, καὶ ἐφεξῆς οὕτως· ὥστε τὸ μὲν ποσὸν α + β — γ ἐστὶ τριώνυμον· α δὲ καὶ β καὶ — γ εἰσὶν αὐτοῦ οἱ ὅροι· οὗτοι γὰρ ὀνομάτων λόγον ταῖς ποσότησιν ἐπέχουσι.

10. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπὶ μονωνύμου παντὸς, ἢ ὅρου συμβολικοῦ, τεσσάρων τούτων διασκέψεως ἀκριβοῦς χρεία, τοῦ γράμματος, τοῦ συνεργοῦ, τοῦ συμβόλου, καὶ τοῦ δείκτου, ὧν ἕκαστον καὶ δὴ ἐπιμελῶς διασκοπήσομεν.

11. Α΄. Περὶ μὲν οὖν τοῦ γράμματος, ὅταν μονώνυμόν τι,

ἢ ὅρος πλείω περιέχῃ γράμματα, ὡς αβγ, τοῦτο δηλοῖ, ὥς περ κοινῇ συνέθεντο, ὅτι ἡ διὰ τοῦ α ἐκτιθεμένη ποσότης πεπολλαπλασίασαι ἐπὶ τὴν τῷ β σημαινομένην ποσότητα, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν γενόμενον ἐπιπεπολλαπλασίασαι ἐπὶ τὴν ἐμφαινομένην ὑπὸ τοῦ γ ποσότητα· ὡσαύτως δὲ, κἂν ὦσι πλείω τῶν τριῶν γράμματα.

12. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. αβγδ, φέρ' εἰπεῖν, ταυτὸν δηλοῖ, ὃ καὶ α×β×γ×δ· εἰ δ' ὑποτεθῶσιν ὅτι τὸ μὲν α δηλοῖ 3, τὸ δὲ β, 4· τὸ δὲ γ, 5· τὸ δὲ δ, 6· τὸ αβγδ σημανεῖ 360· εἴγε τὸ αβγδ ταυτὸν ἐστὶ τῷ α×β×γ×δ, ταυτὸν ἑπομένως τῷ 3×4×5×6, ὅπερ ἐστὶ 360· ἐπὶ δὲ τοῦ ααα, ἐὰν α ἐμφαίνῃ 10, ααα δυνήσεται 2000, εἴγε ααα = α×α×α = 10×10×10 = 1000.

13. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. αϐ καὶ ϐα ταυτὸν ἐμφαίνουσι· τῶν γὰρ δοῖν παραγόντων α καὶ ϐ, ἀδιάφορον ὁπότερον ἄντις θείῃ πολλαπλασιαστέον (Ἀριθμ. 85)· διὰ ταῦτα δὲ καὶ αϐγ ἴσον τῷ ϐγα· ἐπεὶ γὰρ ἐν τῷ α×ϐγ σημαίνεται, ὅτι τὸ α, ἢ τὸ ϐγ ἐστὶ πολλαπλασιαστέον, τὸ γινόμενον ἔσται ταυτὸν, εἴτε α×ϐγ γραφείῃ, εἴτ' οὖν αϐγ, εἴτε ϐ×γα, εἴτ' οὖν βγα, ὅ ἐστιν ἐν γένει "ἡ παντὸς ὅρου „δύναμις ἀμεταποίητος ἀεὶ μένει, ὅπως ἂν διαταχθείῃ „τὰ γράμματα".

14. ΠΟΡΙΣΜΑ. Γ'. Ἔξεσται μέντοι ἀεὶ διὰ τὸ εὔτακτον ἐκτιθέναι τὰ ὅρου παντὸς γράμματα κατὰ τὴν τοῦ Ἀλφαβήτου τάξιν, μηδεμιᾶς προσγινομένης τῆς ἀλλοιώσεως, οἷον ἀντὶ δγϐα, γράφειν αϐγδ.

15. Β'. Ὁ παντὸς ὅρου Συνεργὸς χαρακτὴρ ἐστιν ἀριθμητικὸς, ἐν ἀριστερᾷ τοῦ ὅρου τιθέμενος, καὶ αὐτὸν

πολλαπλασιάζων· ὅτω 3αϐ ἐςὶ ταυτὸν τῷ τρὶς αϐ, ἢ αϐ × 3· ὁ τοίνυν 3 ἐςὶ συνεργὸς τῦ αϐ ὅρȣ.

16. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ὅρȣ, ᾧ μηδεὶς προσκέοιτο συνεργὸς, προεξυπακȣςέον ἀεὶ συνεργὸν τὴν μονάδα, ἅτε δὴ ποσότης πᾶσα πολλαπλῦν ἐςι τῆς 1 (Αριθμ. 78.) ὅτως ἀϐ ταὐτόν ἐςι τῷ 1 × αϐ, ἢ τῷ 1 αϐ.

17. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Φανερὸν ἄρα, ὡς ἀντὶ ἀριθμῦ ἐξέςαι χρῆσθαι συνεργῷ ὅρȣ γράμματι· οἷον τὸ 4χ ἐξέςαι ἐκθέσθαι αχ, τιθεμένȣ ἀντὶ 4 τῦ α, ὅπȣ τὸ α συνεργὸς τῦ χ ῥηθήσεται· ἀλλ᾽ ὐδὲν γὰρ τὸ κωλύον μὴ ἂν ὑπακȣ́εθαι τὴν 1 πρὸ τῆς καινῆς ταύτης ἐκθέσεως αχ· δηλοῖ γὰρ τὸ 1 αχ, ὅτι ἅπαξ κεῖται τὸ αχ.

18. Γ΄. Δείκτης δέ ἐςιν ἀριθμὸς, ὃς, γραφόμενος ἐπὶ παντὸς γράμματος ἐν τοῖς δεξιοῖς, δείκνυσι, ποσάκις ἑξῆς γραπτέον ἐςὶ τὴν ποσότητα· ὅτως ἐπὶ $α^3 ϐ^2$, ὁ μὲν 3 δηλοῖ τὸ α τρὶς ςιχηδὸν εἶναι γραπτέον, ὁ δὲ 2, ὅτι δὶς τὸ ϐ· ἄρα $α^3 ϐ^2$ ἐςὶ ταυτὸν τῷ αααϐϐ.

19. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Μηδενὸς ὄντος δείκτȣ ἐν δεξιοῖς τῦ γράμματος, ἐπειδὴ ἅπαξ γεγραπται, νοητέον τὴν 1.

20. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Πολὺ δὲ τὸ διάφορον συνεργῦ πρὸς δείκτην. α΄. ὁ μὲν γὰρ ἐπιτετμημένως δηλοῖ τὸν τῦ ὅρȣ ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιασμὸν· οἷον $ααα = α × α × α = α^3$· ὁ δὲ συνεργὸς γινόμενον δηλοῖ ὑπὸ τῦ γράμματος ϗ αὐτῦ τῦ ἀριθμῦ, τῦ συνεργῦ καλȣμένȣ· οἷον $3α = 3 × α$ (15)· διὸ ϗ διαφόρως πάνυ ἐπενεργῦσι τῇ τῦ ὅρȣ δυνάμει· ὑποθώμεθα γὰρ ὅτι α ἐςιν = 10· 3α ἄρα ἐφανεῖ τρὶς τὸ α, εἴτ᾽ ὖν τρὶς τὸν 10, ὅ ἐςι 30· ἀλλὰ $α^3$ ἐμφανεῖ ααα, ἢ α × α × α, ἢ 10 × 10 × 10, ὅ ἐςι 1000· β΄. ὁ μὲν ἑκάςȣ γράμματος δείκτης ἐκείνῳ μόνῳ τῷ γράμματι ἐπε-

νεργεῖ· ὁ δὲ συνεργὸς ὅλον πολλαπλασιάζει τὸν ὅρον· ἐν γὰρ τῷ 3 $\alpha^3 \beta^2$ ὁ 3 δείκτης ἐπιδρᾷ μόνῳ τῷ α· ὁ δὲ δείκτης 2 μόνῳ τῷ β· ἀλλ' ὁ 3 συνεργὸς πολλαπλασιάζει ὅλον τὸν ὅρον $\alpha^3 \beta^2$.

21. Δ'. Ἐκδέγε τῶν συμβόλων ἡ ποσότης, ἀκούει μὲν ὑπαρκτικὴ προκειμένου αὐτῆς ἐν ἀριστερᾷ τοῦ +· ἐλλειπτικὴ δὲ, προταττομένου τοῦ —· ἀλλὰ συμβόλου γὰρ μὴ παρόντος μηδενὸς, ἐξυπακουστέον ἀεὶ τὸ +, τῆς ποσότητος τηνικαῦτα ὑπαρκτικῆς ἐκλαμβανομένης, οἷον, + αβ, ἢ αβ. — αβ δὲ ποσότης λειπτική.

22. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπειδὴ τὸ — σύμβολον ἀφαίρεσιν ἐμφαίνει (2), ἡ λειπτικὴ ποσότης οὐκ ἔστιν ἁπλῶς ἀπουσία, εἴτ' οὖν μηδὲν, ὥσπερ ἡ ἔκθεσις ἅμα φανεῖσα ἐμφαίνει· ἀλλ' ἔστι ποσότης, ἣν ἀφαιρεῖν χρὴ ποσότητος ἑτέρας, ὑπαρκτικῆς ὀνομαζομένης, πρὸς ἣν ἀντιθέτως ἔχει αὕτη.

23. Α' ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐκτήσατό τις εἴκοσι χιλιάδας γροσίων· ὀφείλει μέντοι χιλιάδας ἕξ· ἡ οὖν ἀληθὴς κτῆσίς ἐστιν 20000 — 6000, ὅ ἐστι 14000· τὰ γὰρ 6000 γρόσια ἀφαιρεθῆναι προσήκει τῶν 20000, εἰς εὕρεσιν τῆς ἀληθοῦς κτήσεως· τοιαῦται οὖν ποσότητες κληθήσονται λειπτικαὶ, ἔχουσαι πρὸ ἑαυτῶν τὸ — σύμβολον· οὐκοῦν ἐὰν μὲν 20000 κληθῇ α, 6000 δὲ β, ἡ πραγματικὴ κτῆσις σημαίνεται διὰ τῆς συμβολικῆς ἐκθέσεως + α — β, ἢ α — β.

24. Β' ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τιμόθεος Λαρίσσηθεν ἀπάρας εἰς Ἰωάννινα διήνυσεν ὥρας 20, ὅθεν ἀναγκάζεται ὀπισθοδρομῆσαι ὁδὸν ὡρῶν 5· Πρόδηλον οὖν ὡς αἱ 5 ὧραι ταῖς 20 ἀντίκεινται, καὶ ἀφαιρεθῆναι τῶν 20 δεήσει ταύτας, ἵνα γνωσθῇ ὅσον τῆς ὁδοῦ τῷ Τιμοθέῳ διήνυσαι· αὕτη τοί-

νυν κληθήσεται ποσότης λειπτικὴ ὁ δὲ, διήνυσεν ὥρας 20 — 5, ἢ διὰ γραμμάτων, α — β.

25. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἔπαιτις ἂν, τἀληθῆ φθεγγόμενος, ὡς ἡ λειπτικὴ ποσότης τοσούτῳ τοῦ ο ἔνερθεν κεῖται, ὅσῳ τούτου ὑπέρκειται ἡ ὑπάρχουσα· Παῦλος, μηδὲν ὀφείλων, κέκτηται ἀργύρια 1000· Ἀντώνιος δὲ, μηδὲν κεκτημένος, ὀφείλει 1000· ἵν' οὖν τὴν Παύλου περιουσίαν τῷ μηδενὶ ἐξισώσωμεν, ἐπάναγκες ἀφελεῖν αὐτοῦ ἀργύρια 1000, ἵνα δὲ καὶ τὴν Ἀντωνίου ὀφειλὴν ὡσαύτως τῷ μηδενὶ ἴσην ποιήσωμεν, δοῦναι αὐτῷ χρεὼν ἀργυρια 1000.

26. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐκτιμῆσαι ἐν ἀριθμοῖς τὸ ἀποτέλεσμα πάσης συμβολικῆς πράξεως.

ΛΥΣΙΣ. Ἀντικατάστησον ἑκάστῳ γράμματι ἐν ἀριθμοῖς τὴν δύναμιν, ἣν ἀπένειμας αὐτῷ πρὸ τῆς πράξεως, καὶ ἐκτέλεσον ἐν ἀριθμοῖς τὰς πράξεις, ὡς ἐνδείκνυσιν ἅπασα ἡ ἔκθεσις.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Α΄. Προβλήματός τινος ἐπιλυθέντος, ἀνέφυ ἔκθεσις ἥδε: $6\alpha^3 \beta^2 \gamma$· πρὸ δὲ τῆς ἐπιλύσεως ἐτέθη $\alpha = 5$, καὶ $\beta = 10$ καὶ $\gamma = 20$· ἵν' οὖν ἐν ἀριθμοῖς ὁρισθῇ ἐπὶ ταύτης τῆς περιπτώσεως ἡ δύναμις τοῦ $6\alpha^3 \beta^2 \gamma$, ῥητέον: α^3 ταὐτὸν ἐστι τῷ $\alpha\alpha\alpha$ (18) ἢ τῷ $\alpha \times \alpha \times \alpha$, ἤ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, $5 \times 5 \times 5 =$, 125, ἥ ἐστιν ἡ δύναμις τοῦ α^3· πάλιν: $\beta^2 = \beta\beta = 10 \times 10, = 100$ δύναμις τοῦ β^2· ἀλλ' α^3 πολλαπλασιάσαι δεῖ ἐπὶ β^2· ἄρα πολλαπλασιαστέον τὸν 125 ἐπὶ 100· ὁ δὲ προκύπτων 12500 ἐκδηλώσει τὴν τοῦ $\alpha^3 \beta^2$ δύναμιν· ἀλλ' $\alpha^3 \beta^2$ ἐπιπολλαπλασιασθῆναι δεῖ ἐπὶ γ· πολλαπλασιαστέον ἄρα 12500 ἐπὶ 20· ὁ δὲ προκύπτων 250000 ἔσται ἡ δύναμις τοῦ $\alpha^3 \beta^2 \gamma$· τελευταῖον δὲ ἅπας ὁ $\alpha^3 \beta^2 \gamma$ ὅρος ὀφείλει πολλαπλασιασθῆναι ἐπὶ τὸν συνεργὸν 6 (20)· πολ-

λαπλασιασθέντος ἄρα τοῦ 250000 ἐπὶ 6 ὁ προκύπτων 1500000 ἔσται ὅλη ἡ τοῦ $6\alpha^3\beta^2\gamma$ δύναμις, ἐν ἀριθμοῖς ἐκτεθειμένη.

ΔΕΙΞΙΣ. Προφανὲς τοῦτο ἐξ ὧν ἔφθημεν εἰπόντες ἐν τοῖς προλαβοῦσι παραγράφοις.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Β΄. Ἐπὶ τῆς $5\alpha^2\beta^3\gamma\delta^2$ ἐκθέσεως, ὑποτεθέντων $\alpha=4$, καὶ $\beta=5$, καὶ $\gamma=10$, καὶ $\delta=7$· α΄. $\alpha^2=\alpha\times\alpha=4\times4=16$· β΄ $\beta^3=\beta\beta\beta=5\times5\times5=125$· ἄρα $\alpha^2\beta^3=16\times125=2000$· γ΄. $\alpha^2\beta^3\gamma$ πολλαπλασιαστέον εἶναι ἐμφαίνει τὸ $\alpha^2\beta^3$, εἴτ' οὖν 2000, ἐπὶ γ, ταὐτὸν εἰπεῖν ἐπὶ 10· ἄρα ἡ τοῦ $\alpha^2\beta^3\gamma$ δύναμίς ἐστιν 20000· δ΄. $\alpha^2\beta^3\gamma\delta^2$ ἐμφαίνει, ὅτι πολλαπλασιάσαι χρεὼν τὸ $\alpha^2\beta^3\gamma$, εἴτ' οὖν 20000 ἐπὶ δ^2· ἀλλαμὴν δ^2 ἐστὶν ἴσον 49, εἴγε $\delta^2=\delta\times\delta=7\times7=49$· πολλαπλασιαστέον ἄρα 20000 ἐπὶ 49, ὅθεν προκύψει 980000· καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ τοῦ $\alpha^2\beta^3\gamma\delta^2$ δύναμις· ε΄. τέλος δὲ, $5\alpha^2\beta^3\gamma\delta^2$ ἐκδηλοῖ πολλαπλασιαστέον ὂν τὸ $\alpha^2\beta^3\gamma\delta^2$, ἢ 980000 ἐπὶ 5, ὅθεν πρόεισιν ἐν ἀριθμοῖς ἡ ὅλη δύναμις τῆς $5\alpha^2\beta^3\gamma\delta^2$ συμβολικῆς ἐκθέσεως, 4900000.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἐν $\frac{2\alpha^3\beta}{\gamma^2}$· ἐὰν ὑποτεθῇ $\alpha=10$, καὶ $\beta=5$, καὶ $\gamma=20$, ζητητέον τὸ πρῶτον τὴν τοῦ $2\alpha^3\beta$ διαιρετέου δύναμιν: $\alpha^3=\alpha\alpha\alpha=\alpha\times\alpha\times\alpha$, $10\times10\times10=1000$· ἄρα $2\alpha^3=2000$· ἐπεὶ δὲ $\beta=5$ ἔσται ἄρα $2\alpha^3\beta=10000$· ὁ δὲ διαιρέτης $\gamma^2=\gamma\times\gamma=20\times20=400$· ἡ ἄρα $\frac{2\alpha^3\beta}{\gamma^2}$ καθολικὴ ποσότης παρέχει κλά-

σμα ἀριθμητικὸν τὸ $\frac{10000}{400} = 25$, ὅπερ ἀποτελεῖ 25 ἐν ὁλοχερέσι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων.

27. ΟΡΙΣΜΟΣ. Οἱ ἐφ' ἕνα μόνον ἀναχθῆναι, ἢ καὶ ἄρδην ἀποσβύναι δυνάμενοι ὅροι, μηδόλως μετακινουμένης τῆς συμβολικῆς ποσότητος, ὅμοιοι ὅροι καλοῦνται.

28. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἵνα δὲ τοῦτο ὦσιν, ἀπόχρη τὰ αὐτὰ ἔχειν γράμματα, καὶ τὸν αὐτὸν ἕκαστον γράμμα δείκτην· τοιοῦτοι οἱ $2\alpha^2\beta$, $4\alpha^2\beta$, οὓς ἐφ' ἕνα ἀγαγεῖν δυνάμεθα, γράφοντες $6\alpha^2\beta$· ἧς τινοσοῦν γὰρ ὑποτεθείσης τῆς τοῦ α^2 δύναμεως, οὐκ ἔστιν ὃς ἂν ἐπιεικῶς ἀποφήσειε μὴ $2\alpha^2\beta$, 14 συναφθὲν τῷ $2\alpha^2\beta$ οὐχὶ παρέξειν $6\alpha^2\beta$· ἀντὶ δὲ $5\alpha^2\beta - 3\alpha^2\beta$ γράφειν ἐξέσαι $2\alpha^2\beta$· αὐτικα γὰρ δῆλον, ὡς $5\alpha^2\beta - 3\alpha^2\beta$ ἐστὶν ἴσον τῷ $2\alpha^2\beta$· τέλος δὲ ἡ $5\alpha^2\beta - 5\alpha^2\beta$ ἔκθεσις διαγραφήσεται ἄρδην, ἅτε ποσότης πᾶσα ἑαυτῆς ὁλοχερῶς ἀφαιρεθεῖσα ἐξουδενοῦται (Ἀριθμ. 15) ἐφ' ἑκάστης ἄρα τῶν τριῶν τῶνδε περιπτώσεων ῥᾷστον ἦν ξυνιδεῖν, ὅτι οἱ δύω προτεθέντες ὅροι ἀναχθῆναι ἠδυνήθησαν, ἐπεὶ εἶχον τὰ αὐτὰ γράμματα, καὶ τοὺς αὐτοὺς ἐφ' ἑκάστου γράμματος δείκτας, ὅ ἐστι 2 ἐπὶ τοῦ α, καὶ 1 ἐπὶ τοῦ β΄.

29. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἀλλὰ παρόντος γὰρ ἐνί τινι ὅρῳ γράμματος, ὃ θατέρου ἄπεστιν, ἢ κοινοῦ ἀμφοῖν γράμματος τὸν αὐτὸν μὴ ἔχοντος δείκτην, οἱ ὅροι τηνικαῦτα, ἀνόμοιοι ὄντες, ἀναγωγῆς ἔσονται ἀνεπίδεκτοι· σαφὲς γὰρ τοὺς $2\alpha^3\beta\gamma$,

$3\alpha^3\beta$ μὴ δύναϑαι ἀναχθῆναι μηδ' ἐπὶ $5\alpha^3\beta\gamma$, μηδ' ἐπὶ $5\alpha^3\beta$· ἀλλ' ἐδὲ $2\alpha^3\beta$, $3\alpha^3\beta^2$ ἀναχθήσονται, ϗ αὐτοὶ ανόμοιοι ὑπάρχοντες.

30. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Εἰς ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐαν μὲν τὸ αὐτὸ ἑκάτερος ἔχωσι σύμβολον, συνήφθωσαν μόνον οἱ κατ' αὐτὲς συνεργοὶ· ἐὰν δὲ μὴ τὸ αὐτὸ, ἀφῃρήϑω ὁ μείζων συνεργὸς ἀπὸ τε ἐλάσσονος, ἡ δὲ διαφορὰ ἔςω συνεργὸς, μεθ' ὃ εἶχεν ὁ μείζων συμβόλε· τέλος δὲ, ἐὰν, τῶν συμβόλων εναντίων ὄντων, οἱ συνεργοὶ ἰσῶνται ἀλλήλοις, ἀπολελείφθωσαν πάντῃ· Ῥᾷςα δὲ τἒτο ἐξ ὧντε εἰπόντες ἔφθημεν, ϗ ἐξ ὧν ἐποίσομεν, κατανοηθήσεται· ἐπὶ γὰρ $3\alpha\beta\gamma + 4\alpha\beta\gamma$ τὰ σύμβολα ταυτίζονται παρὰ τὸ ἐξυπακεόμενον πρὸς τἀλαιὰ τε $3\alpha\beta\gamma +$ (21), συναφθέντων ἄρα τῶν συνεργῶν, ἔςαι $7\alpha\beta\gamma$· ἐπὶ μέντοι $-5\alpha\beta\gamma + 2\alpha\beta\gamma$ τῶν συμβόλων διαφερόντων, ἀφαιρεθήσεται μὲν ὁ 2 ἀπὸ τε 5, γραφήσεται δέ τὸ $-$ ὃ παρῆν τῷ μεῖζον συνεργῷ 5, ἐκ δὲ τέτων ἔςαι $-3\alpha\beta\gamma$· ἐν γὰρ τετωΐ τῷ ὑποδείγματι, εἴπερ $2\alpha\beta\gamma$ ἐμφαίνει 2000 κτῆσιν $-5\alpha\beta\gamma$ ἐμφανεῖ 5000 ὀφειλὴν· ἔνθα καταφανὲς, ἀναγωγῆς γενομένης, λειφθῆναι μόνον 3000 ὀφλήματος ϗ ἑπομένως $-3\alpha\beta\gamma$· Τέλος δὲ, εἰ εἴη $5\alpha\beta\gamma - 5\alpha\beta\gamma$, ἅπαν ἐξεδενωθήσηται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Προϑέσεως ϗ Ἀφαιρέσεως τῶν γραμματικῶν ποσοτήτων.

31. Πᾶσα ἡ πρᾶξις τῆς προϑέσεως κεῖται ἐν τῷ

γραφῆναι πάσας τὰς προτεθείσας ποσότητας κατ' ἀλληλεχίαν, ἡγεμένε ἑκάςης τε οἰκείε αὐτῆς συμβόλε· ἑκάςε δὲ ὅρε τὰ γράμματα κατὰ τάξιν ἐκτεθῆναι τὴν τε Ἀλφαβήτε, ἐ ἀναχθῆναι δὲ πάντας τὲς ὁμοίες ὅρες εἰ εἶεν (27, 30)· κείσθω γὰρ εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῆς 2 γ α β — 3 γ δ + 5 γ δ — α γ δ· αὐτὴ μὲν ἐν κατὰ τὰ εἰρημένα καθ' ἑαυτὴν ἤθροισαι· γραφῆναι μέντοι δεῖ κατὰ τάξιν ἔτω· 2 α β γ — α β γ + 5 γ δ — 3 γ δ, ἀναχθῆναι δὲ ἐπὶ α β γ + 2 γ δ· συνάψαι δὲ βελόμενος τὴν 2 δ γ τῇ 3 α β — 6 α β γ, γράψον αὐτὰς ἔτω: 3 α β — 6 α β γ + 2 γ δ.

32. Ἵν' ἀφαιρεθῇ ποσότης συμβολικὴ ἀφ' ἑτέρας τοιαύτης, γεγράφθω πρῶτον ἡ, ἀφ' ἧς ἡ ἀφαίρεσις ἔςαι, ποσότης, σώζεσα τὸ ἑαυτῆς σύμβολον· εἶτα ἡ ἀφαιρεθησομένη, τὸ ἑαυτῆς μεταβαλεσα.

33. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸν δὲ τε κανόνος τεδε λόγον ῥᾷςʼ ἂν κατανοήσαιμεν ἐπὶ τῶν ἰδιαιτέρων περιπτώσεων, ἀναπολεντες ἀεὶ κατὰ νεν τὴν ἐφεξῆς ἀρχὴν „Ἀφαίρεσίς „ἐςιν εὕρεσις ποσοτήτων δυεῖν διαφορᾶς, ᾗ διαφέρει τῆς „ἑτέρας ἁτέρα".

Ἔςω ἐν ἀφελεῖν β ἀπὸ α· γεγράφθω πρῶτον α, δεξιόθεν δ' αὐτῆς ἡ ἀφαιρεθησομένη β, τὸ — λαμβάνεσα ἀντὶ τε +, τε αὐτῆς προεξυπακεομένε· ἐκ δὲ τέτων ἔςαι α — β· σαφὲς γὰρ δήπε ὅτι ἡ τε + α πρὸς + β διαφορὰ ἔςι + α, ε ἀφῃρημένον ὑποτίθεται τὸ β· ἡ ἄρα, τέτων διαφορὰ σημανθήσεται α — β· ἔςω ἂν — β ἀφελεῖν ἀπὸ + α· γεγράφθω ἐν τὸ α, ἐ μεταβεβλήσθω τὸ πρὸ τε β — εἰς +, ὅθεν ἔςαι α + β· εἰς δὲ τέτε τε κανόνος κατάληψιν, ὑποθώμεθα ὅτι + α, ὡς ὑπαρκτική, ἐκδηλοῖ 10000 γρόσια κτήσεως, ἡ δὲ — β, ὡς λειπτι-

κὴ 4000 γρόσια ὀφειλῆς· ἡ οὖν διαφορὰ τῆς 10000 ἀργυρίων περιουσίας πρὸς τὴν 4000 ὀφειλὴν ἐστι 10000 + 4000, εἴτ᾿ οὖν 14000 ἀργύρια· ἵνα γὰρ ἐξισώσωμεν τὸν, πρὸς τῷ μηδὲν κεκτῆσθαι, ϗ 4000 ἀργύρια ὀφείλοντα, τῷ 10000 ἀργύρα κεκτημένῳ, παραχεῖν τῷ πρώτῳ ἀνάγκη ἀργύρια 14000.

Ἵνα δὲ ἀφαιρεθῇ + β — γ ἀπὸ α, γεγράφθω α, ϗ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ β ϗ γ, ἐνηλλαγμένων τῶν πρὸ αὐτῶν συμβόλων, ὅθεν ἔσαι α — β + γ· ἐὰν γὰρ μόνον τὸ + β ἀφαιρεθῇ ϗ γραφῇ — β, ἡ ἀφαίρεσις τοῦ ζητουμένου γίνεται μείζων ὅλῳ τῷ γ· οὐ γὰρ ἅπαν τὸ β ἀφαιρεθῆναι προὐτέθειται, ἀλλὰ τὸ β ἠλλαττωμένον τῷ γ· ἐπάναγκες ἄρα πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς τοῦ α πρὸς β — γ συνάπτειν ἐν δεξιᾷ τῆς α — β τὴν + γ ποσότητα, τουτέστιν ἐν τῇ συμβολικῇ ἀφαιρέσει μετατρέπειν τῆς ἀφαιρουμένης ποσότητος τὰ σύμβολα. Ταὐτὸν δὲ φανεῖται ϗ ἐν ἀριθμοῖς· κείσθω γὰρ α = 10000, ϗ β = 5000, καὶ γ = 2000· πρόδηλον ἄρα, ὅτι ἡ τοῦ α πρὸς β — γ διαφορὰ, εἴτ᾿ οὖν ἡ τοῦ 10000 πρὸς 5000 — 2000 ἔσι 10000 — 5000 + 2000, ὅπερ ἐσὶν 7000.

Ἀφαιροῦντες δὲ — α ἀπὸ + α γράψωμεν + α + α ὅ ἐσι + 2 α· ἡ γὰρ τῆς 1000 ἀργυρίων, φέρ εἰπεῖν, περιουσίας πρὸς 1000 ἀργυρίων ὀφειλὴν διαφορά ἐσι περιουσίας ἀργύρια 2000.

Ἀφαιροῦντες δὲ + α ἀπὸ — α γράψωμεν — α — α, ὅπερ ἐσὶν — 2 α· ἐπειδὴ γὰρ ἡ + α ποσότης ὑπέρκειται τῆς — α τῷ — 2 α, ἡ — α ποσότης ἥττων ἐσὶ τῆς + α τῷ + 2 α, ταυτὸν εἰπεῖν, ἡ διαφορὰ τῆς — α παραβαλλομένης τῇ + α ἐσὶ 2 α.

Τελευταῖον δὲ, ἵνα ἀφαιρεθῇ + α ἀπὸ + α, ἢ — α

ἀπὸ $-\alpha$, γεγράφθω $+\alpha-\alpha$, ἢ $-\alpha+\alpha$, ϗ δι' ἀναγωγῆς ἔσται 0.

34. ΣΧΟΛΙΟΝ. Μετὰ δὲ τὴν ἀφαίρεσιν, ἀνακτέον τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ ὡς οἷόν τε ἁπλούστερον· ἐὰν οὖν ἀπὸ $2\alpha\alpha-\alpha\beta+\gamma\gamma$ ἀφαιρεθῇ $\alpha\alpha+\alpha\beta-\beta\gamma$, προκύψει $2\alpha\alpha-\alpha\beta+\gamma\gamma-\alpha\alpha-\alpha\beta+\beta\gamma$, εἴτ' οὖν $\alpha\alpha-2\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\gamma$: ἐὰν δὲ ἀπὸ $6\alpha-3\beta+4\gamma$ ἀφαιρεθῇ, $5\alpha-5\beta+6\gamma$, προκύψει $6\alpha-3\beta+4\gamma-5\alpha+5\beta-6\gamma$, εἴτ' οὖν $\alpha+2\beta-2\gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων.

35. Ὥσπερ ἐπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς ἀριθμὸς ἁπλοῦς δι' ἀριθμοῦ ἁπλοῦ πολλαπλασιάζεται, ϗ σύνθετος δι' ἁπλοῦ, ἢ τἀναντίον, ϗ σύνθετος τέλος δι' ἀριθμοῦ συνθέτου οὕτω δυνατὸν πολλαπλασιάζειν ἤτοι μονώνυμον ἐπὶ μονώνυμον, ἢ πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον, ϗ ἀντιστρόφως, ἢ πολυώνυμον ἐπὶ πολυώνυμον.

Περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν Μονωνύμων.

36. Μονώνυμον οὖν ἐπὶ μονώνυμον πολλαπλασιάζοντες, τηρεῖν ὀφείλομεν τοὺς κανόνας τῶν συμβόλων, τῶν συνεργῶν, τῶν γραμμάτων, ϗ τῶν δεικτῶν τῶν γραμμάτων, ἃ κοινῇ παρέπεται τῷ τε πολλαπλασιαστέῳ, ϗ τῷ πολλαπλασιαστῇ.

37. Κανὼν Α΄. Τῶν ὅρων, ὁμοίων μὲν ὄντων, τίθει τῷ προκύπτοντι τὸ +, ἀνομοίων δὲ, τὸ —

38. Β΄. Πολλαπλασίασον τὸν ἕτερον συνεργὸν ἐπὶ τὸν ἕτερον.

39. Γ΄. Γράφε ἑξῆς ἐπὶ τȣ̃ προκύπτοντος πάντα τὰ ἔντε τῷ πολλαπλασιαςέῳ καὶ τῷ πολλαπλασιαςῇ γράμματα μετὰ τῶν οἰκείων δεικτῶν.

40. Δ΄. Ὅταν γράμματι παρῇ κοινῇ τῷτε πολλαπλασιαςέῳ ϗ τῷ πολλαπλασιαςῇ, τȣ̃το μὲν γράφε ἅπαξ, συνάπτων δὲ τὸν τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ δείκτην τῷ τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃, τὸ τȣ́των ἄθροισμα ἐπιχάρασσε ὡς δείκτην τῷ προκύπτοντι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κείσθω πολλαπλασιάσαι $2\,\alpha^3\beta$ ἐπὶ $5\,\alpha\beta^2\gamma$· ά. ἐπεὶ ȣ̃ν κοινῇ ἐξυπακȣ́εται τὸ +, προχάραξον, ἢ ἔα προεξυπακȣ́εσθαι τȣ̃ προκύπτοντος τὸ +.

β΄. Πολλαπλασίασον 2 ἐπὶ 5, ϗ γράψον προκύπτοντα τὸν 10.

γ΄. Γράψον αβγ· τέλος δὲ: α, κοινῇ παρὸν τῷτε πολλαπλασιαςέῳ ϗ τῷ πολλαπλασιαςῇ, γράψον ἅπαξ· τὸν δὲ 3 δείκτην τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ συνάψας τῷ 1 δείκτῃ τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃, τὸ ἄθροισμα 4 τίθει δείκτην ἐπὶ τȣ̃ προκύπτοντος· β δὲ κοινῇ ἐνόντος τοῖς παράγȣσι, προσθεὶς τȣ̀ς ἐπ᾽ αὐτῶν δείκτας, τὸ 3 ἄθροισμα τίθει ἐπ᾽ αὐτȣ̃ τȣ̃ προκύπτοντος δείκτην· προκύψει ἄρα ὁλικῶς τὸ $10\,\alpha^4\beta^3\gamma$.

41. Ἵνα δὲ φανῇ, ὡς ϗ ἐκ τȣ̃ συμβολικȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃, αὐτὸ δὲ τȣ̃το νοητέον ϗ ἐκ τῆς διαιρέσεως, ταὐτὸν ἕπεται, ὃ ϗ ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν, προσοικειώσομεν τοῖς γράμμασι μίαν τινὰ ἀριθμητικὴν δύναμιν ἐν ἑκατέρῳ πράξεως εἴδει· τεθείσθω ȣ̃ν ἐπὶ τȣ̃ ἀνωτέρω ὑποδείγματος

$\alpha = 10$, ϗ $\beta = 5$, ϗ $\gamma = 4$· γενήσεται ἄρα ὁ μὲν $2\alpha^3\beta$ πολλαπλασιαςέος, 10000, ὁ δὲ $5\alpha\beta^2\gamma$ πολλαπλασιαςὴς, 5000· ἐκεῖν τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν γινόμενον δεήσει εἶναι 5000000· ἡ ἄρα τȣ̃ $10.\alpha^4\beta^3\gamma$ δύναμις εὑρεθήσεται ἴση 5000000.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἵνα πολλαπλασιασθῇ $\alpha^2\beta$ ἐ. $-3\beta\delta$, ἐπεὶ τὰ σύμβολα διαφέρȣσι, θετέον — τῷ προκύπτοντι· ὁ δ᾽ ἐν ἀριςερᾷ τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ ἐξυπακȣόμενος συνεργὸς 1, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃ 3, δίδωσι 3· ἐκ δὲ τȣ̃ (39), ἔςιν $\alpha\beta\delta$· τέλος δὲ ἐκ τȣ̃ (40) δείκτης μόνῳ ἐπανήκει τῷ β· ὁ ȣ̃ν τȣ̃ πολλαπλασιαςέȣ β δείκτης, συναφθεὶς τῷ τȣ̃ πολλαπλασιαςȣ̃ β, ἀποτελεῖ 2, ὃν θετέον ἐπὶ τȣ̃ προκύπτοντος β· ἔςαι ἄρα τὸ ζητȣ́μενον $-3\alpha^2\beta^2\delta$.

Ἕτερα ὑποδείγματα· ȣ̔́τω ποιȣ̃σιν εὑρεθήσεται ϗ τὰ ἑξῆς α΄. ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ $-\alpha$ ϗ $+\beta$ ἔςι $-\alpha\beta$. β΄. τὸ ὑπὸ $-\alpha$ ϗ $-\beta$ ἔςι $+\alpha\beta$. γ΄. τὸ ὑπὸ $-\alpha$ ϗ $-\alpha$, ἢ ὑπὸ $+\alpha$ ϗ $+\alpha$, ἔςι $+\alpha^2$.

Περὶ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν πολυωνύμων.

42. Ὥσπερ ἐπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς πολλαπλασιάζοντες ἀριθμὸν σύνθετον ἀφ᾽ ἁπλȣ̃ν ἢ ϗ ἀντιςρόφως, πολλαπλασιάζομεν ἑξῆς πάντας τȣ̀ς τȣ̃ συνθέτȣ ἀριθμȣ̃ χαρακτῆρας ἐπὶ τὸν ἁπλȣ̃ν· ȣ̔́τω ϗ ἐπὶ τȣ̃ τῶν πολυωνύμων ἐπὶ μονώνυμον πολλαπλασιασμȣ̃, πολλαπλασιάζονται πάντες οἱ τȣ̃ πολυωνύμȣ ὅροι ἐπὶ τὸ μονώνυμον κατὰ τȣ̀ς ἄρτι ἀποδεδομένȣς ἐπὶ τȣ̃ τῶν μονωνύμων ἐπὶ μονώνυμον πολλαπλασιασμȣ̃ κανόνας.

43. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰςέον δὲ, ὡς ἐπεὶ καθάπαξ χε-

τικὴν ἒ κέκτηνται δύναμιν οἱ γραμματικοὶ ὅροι, ἐδεμία ἀρχομένοις τηρεῖται τάξις κατὰ τὰ δεξιὰ ἢ ἀριςερὰ ἐν τῷ τῶν πολυωνύμων πολλαπλασιασμῷ, ἢ ϗ τῇ τέτων διαιρέσει, ὥσπερ ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κείσθω πολλαπλασιάσαι $2\alpha\beta^3+4\alpha^2\beta\gamma-\alpha\gamma$ ἐπὶ $2\alpha\beta\gamma$.

$$\begin{array}{r} 2\alpha\beta^3+4\alpha^2\beta\gamma-\alpha\gamma \\ 2\alpha\beta\gamma \\ \hline 4\alpha^2\beta^4\gamma+8\alpha^3\beta^2\gamma^2-2\alpha^2\beta\gamma^2 \end{array}$$

Πολλαπλασίασον ἒν κατὰ τὲς δοθέντας κανόνας (36) $2\alpha\beta^3$ ἐπὶ $2\alpha\beta\gamma$· προκύπτων ἔςαι $4\alpha^2\beta^4\gamma$· πολλαπλασίασον εἶτα $4\alpha^2\beta\gamma$ ἐπὶ $2\alpha\beta\gamma$· προκύπτων ἔςαι $8\alpha^3\beta^2\gamma^2$· τέλος δὲ πολλαπλασίασον $-\alpha\gamma$ ἐπὶ $+2\alpha\beta\gamma$· προκύπτων ἔςαι $-2\alpha^2\beta\gamma^2$· ὁ δ' ὁλικὸς προκύπτων ἔσεται $4\alpha^2\beta^4\gamma+8\alpha^3\beta^2\gamma^2-2\alpha^2\beta\gamma^2$

44. Ὅταν δὲ ὅ,τε πολλαπλασιαςέος ϗ ὁ πολλαπλασιαςὴς τῶν πολυωνύμων ὦσι, πολλαπλασίασον πρῶτον πάντας τὲς ὅρες τῦ πολλαπλασιαςέε ἐπὶ τὸν πρῶτον τῶν τῦ πολλαπλασιαςῦ ὅρων, εἶθ' ἅπαντας ἐπὶ τὸν δεύτερον ϗ ἑξῆς ὕτως· ἐὰν δ' ἐπὶ τῦ προκύπτοντος ἐκ τῦ πολλαπλασιασμῦ ὅμοιοι ὑπάρχωσιν ὅροι (27), μέτιθι τέτες δι' ἀναγωγῆς (20).

Αὐτίκα ἒν, ἵνα πολλαπλασιασθῇ $\alpha+\beta+\gamma$ ἐπὶ $\delta+\zeta$, πολλαπλασιασθήτω πρῶτον $\alpha+\beta+\gamma$ διὰ δ,

$$\begin{array}{r} \alpha+\beta+\gamma \\ \delta+\zeta \\ \hline \alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta \\ \alpha\zeta+\beta\zeta+\gamma\zeta \\ \hline \alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta+\alpha\zeta+\beta\zeta+\gamma\zeta \end{array}$$

ὅθεν προκύψει $\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta$· εἶτα δὲ $\alpha+\beta+\gamma$ διὰ ζ, ὅθεν ἔςαι $\alpha\zeta+\beta\zeta+\gamma\zeta$· τὸ δ' ὅλον, $\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta+\alpha\zeta+\beta\zeta+\gamma\zeta$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἵνα πολλαπλασιαϑῇ $2\alpha\beta - 3\beta\gamma$ ἐπὶ $3\alpha - \beta$, πολλαπλαϑήτω πρῶτον $2\alpha\beta - 3\beta\gamma$ ἐπὶ 3α, ὅθεν ἔσαι $6\alpha^2\beta - 9\alpha\beta\gamma$· ἐξ ὑπαρχῆς δὲ πολλαπλασιαϑήτω $2\alpha\beta - 3\beta\gamma$ ἐπὶ $-\beta$, ὅθεν ἔψεται $-2\alpha\beta^2 + 3\beta^2\gamma$· τὸ ἄρα ὁλικὸν προκύπτον ἐσὶν $6\alpha^2\beta - 9\alpha\beta\gamma - 2\alpha\beta^2 + 3\beta^2\gamma$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἵνα πολλαπλασιαϑῇ $\alpha + \beta\zeta - \gamma$ ἐπὶ $\alpha - \beta\zeta + \gamma$ γραφήτωσαν ὑπάλληλοι οἱ δύω ποιηταὶ, πολλαπλασιαϑήτω, α΄. ὁ πολλαπλασιασέος ἐπὶ α, ὅθεν ἔσαι $\alpha^2 + \alpha\beta\zeta - \alpha\gamma$, εἶτα ἐπὶ $-\beta\zeta$, ὅθεν προκύψει $-\alpha\beta\zeta - \beta^2\zeta^2 - \beta\gamma\zeta$, ὃ γεγράφθω ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον, ὡς τὰς ὁμοίας ὅρας τοῖς ὁμοίοις ἀντισοιχεῖν· τέλος δὲ, ἐπὶ $+\gamma$, ὅθεν προκύψει $+\alpha\gamma + \beta\gamma\zeta - \gamma^2$ ὃ καὶ τοῦτο γεγράφθω κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὑπὸ τὸ δεύτερον γενόμενον. Ταῦτα δὲ τὰ τρία γενόμενα, δι᾽ ἀναγωγῆς συναφθέντα, ἀποτελοῦσιν ὁλικὸν γινόμενον τὸ ἐνταῦθα ὁρώμενον.

45. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν γένει δὲ, γραμμῆς πλαγίας ἀχθείσης ἐπὶ πολλῶν συλλήβδην ποσοτήτων, σημαίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς σκεπομένης ὅλης ποσότητος δι᾽ ἑτέρας ὡσαύτως σκεπομένης, μεσολαβοῦντος τοῦ $\times$· οἷον, ἵνα δηλωθῇ τὸ προκύπτον ἐκ τῆς $\alpha + \beta + \gamma$ καὶ $\delta + \zeta$, γράφεται $\overline{\alpha + \beta + \gamma} \times \overline{\delta + \zeta}$, ὃ ἐμφαίνει ὅτι ὅλη ἡ ποσότης $\alpha + \beta + \gamma$ πολλαπλασιάζεται οὐχ᾽ ὅπως διὰ δ, ἀλλ᾽ ἔτι καὶ διὰ ζ.

Εἰσὶ δ᾽ οἵ ἀντὶ $\overline{\alpha + \beta} \times \overline{\zeta + \theta}$, γράφουσιν οὕτως $(\alpha + \beta).\ (\zeta + \theta)$.

Υποδείγματα πολλαπλασιασμȣ̃ πρὸς ἄσκησιν τῶν πρωτοπείρων.

$$\begin{array}{r}
\alpha^2 + 2\,\alpha\beta + \beta^2 \\
\alpha + \beta \\
\hline
\alpha^3 + 2\,\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \\
+\alpha^2\beta + 2\,\alpha\beta^2 + \beta^3 \\
\hline
\alpha^3 + 3\,\alpha^2\beta + 3\,\alpha\beta^2 + \beta^3.
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
2\,\alpha\beta - 3\,\alpha\gamma + \beta\gamma \\
\alpha\gamma - 2\,\beta\gamma \\
\hline
2\,\alpha\alpha\beta\gamma - 3\alpha^2\gamma\gamma + \alpha\beta\gamma\gamma \\
-4\,\alpha\beta^2\gamma + 6\,\alpha\beta\gamma\gamma - 2\,\beta\beta\gamma\gamma \\
\hline
2\,\alpha\alpha\beta\gamma - 3\,\alpha\alpha\gamma\gamma + 7\,\alpha\beta\gamma\gamma - 4\,\alpha\beta\beta\gamma - 2\beta\beta\gamma\gamma
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\frac{2}{3}\alpha^3 - \frac{4}{5}\alpha^2\beta + \frac{1}{2}\beta^3 \\
\frac{3}{5}\alpha\beta - 2\,\beta^2 \\
\hline
\frac{2}{5}\alpha^4\beta - \frac{12}{25}\alpha^3\beta^2 + \frac{3}{10}\alpha\beta^4 \\
-\frac{4}{3}\alpha^3\beta^2 + \frac{8}{5}\alpha^2\beta^3 \cdot + \beta^5 \\
\hline
\frac{2}{5}\alpha^4\beta - \frac{136}{75}\alpha^3\beta^2 + \frac{8}{5}\alpha^2\beta^3 + \frac{3}{10}\alpha\beta^4
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
5\,\alpha^3 - 4\,\alpha^2\beta + 5\,\alpha\beta^2 - 3\,\beta^3 \\
4\,\alpha^2 - 5\,\alpha\beta + 2\,\beta^2 \\
\hline
20\,\alpha^5 - 16\,\alpha^4\beta + 20\,\alpha^3\beta - 12\,\alpha^2\beta^3 \\
-25\,\alpha^4\beta + 20\,\alpha^3\beta^2 - 25\,\alpha^2\beta^3 - 15\,\alpha\beta^4 \\
+10\,\alpha^3\beta^2 - 8\,\alpha^2\beta^3 + 10\,\alpha\beta^4 - 6\,\beta^5 \\
\hline
20\,\alpha^5 - 41\,\alpha^4\beta + 50\,\alpha^3\beta^2 - 45\,\alpha^2\beta^3 + 25\,\alpha\beta^4 - 6\,\beta^5
\end{array}$$

Δεῖξις τῶν προεκτεθέντων κανόνων.

46. Α΄. Πολλαπλασιάζειν 2α ἐπὶ 3β, φέρ εἰπεῖν, λαμβάνειν ἐςὶ 2α τοσάκις, ὅσα ἐςὶ β ἐν τῷ 3β, θεωρȣ́μενα δίκην μονάδος (72), ὅθεν ἔςαι προδήλως 6α.

δεῖ ἄρα πολλαπλασιάζειν τὰς συνεργὰς διὰ θατέρα τὸν ἕτερον.

Β΄. Ὥρισαι κατὰ συνθήκην, ἵν' εἰς δήλωσιν τὰ πολλαπλασιασμὰ τῶν γραμμάτων ἀδιαφόρως δυναίμεθα, ἢ διαστέλλειν ταῦτα τῷ ×, ἢ ἄνευ τάτα κατ' ἀλληλαχίαν ἐκτιθέναι, ἢ παρεντιθέναι αὐτοῖς τὸ σίγμα (.)

Γ΄. Ο' δὲ τῶν δεικτῶν κανὼν ἀδὲν ἀλλ' ἢ ἁπλῶν ἐστιν αἴτημα, ἢ, καὶ εἰ τᾶτο βαλόμεθα, ἐπιτομήτις· πολλαπλασιάζοντας γὰρ βββ ἐπὶ ββ χρεὼν γράφειν κατὰ τὸν τῶν γραμμάτων κανόνα βββββ (18, 39)· ἀλλ' αἰτᾶμεν διὰ τἀπίτομεν γράφειν β^5 ἀντὶ βββββ· μόνος δ' ἂν ὁ κανὼν τῶν σημείων πράγματα ἡμῖν παράσχοι· τάτῳ δὲ (37) ἀναπτύξεως δεῖ τεσσάρων τῶν ἐφεξῆς.

α΄. $+\times+=+$. β΄. $-\times+=-$. γ΄. $+\times-=-$. δ΄. $-\times-=+$.

47. Α΄. $+\times+=+$· Ο' καὶ καθ' ἑαυτὸ ξυμφανὲς· εἴγε ποσότης ἅπασα ὑπαρκτικὴ ἑαυτῇ συναφθεῖσα τοσάκις, ὅσαι μονάδες ἔνεισιν ἑτέρᾳ ὑπαρκτικῇ, ὀφείλει ἀποδᾶναι ἄθροισμα ὑπαρκτικὸν

48. Β΄. $-\times+=-$· Ποσότης γὰρ ἅπασα λειπτικὴ, ταὐτὸν εἰπεῖν, ὀφειλὴ πᾶσα, συναφθεῖσα ἑαυτῇ ὁσάκις ἔνεστιν ἡ μονὰς ἑτέρᾳ ποσότητι ὑπαρκτικῇ, ὀφείλει ἀποδᾶναι ποσότητα λειπτικὴν· εἰ γὰρ ὀφείλω 4 χρήσαις ἑκάστῳ γρόσια 5000, σαφὲς ὅτι τὰ 5000 γρόσια, πολλαπλασιαθέντα ἐπὶ 4, ποιήσασι γρόσια 20000 ὀφειλῆς, ἀ μὴν δὲ 20000 περιασίας.

Λόγος ἕτερος· Ἔστω 5 — 2 πολλαπλασιαστέος ἐπὶ + 4, ὑφ' ὧν ὁ προκύπτων εὐθὺς καταφαίνεται ὢν 12. Πολλαπλασιάσαντες ἂν + 5 διὰ + 4 ἕξομεν 20 προκύπτοντα μείζω τὰ δικαία, τῇ ποσότητι 8, ἥτις ἐστὶ προ-

κύπτων ἐκ 2 (ὃς ἀφώρισαι τῦ 5 πρὸ τῦ πολλαπλασιασμῦ) ϗ τῦ 4· πολλαπλασιάζοντες ὖν —2 διὰ + 4 γράψομεν —8, ἥτις ἀπομειοῖ τὸν προκύπτοντα 20 τῇ ποσότητι 8, καθ' ἣν τῦ δικαίῦ ὑπερέβαινε· δι' ὧν ἀντάμειψιν τὸ — πολλαπλασιάσαν τὸ + ἀποδώσει —.

49. Γ'. + × — = —. Πολλαπλασιάζοντες γὰρ + 5 ἐπὶ + 4, ληψόμεθα ὑπαρκτικῶς τετράκις τὸν 5, ὅθεν προκύψει 20· ἀλλὰ πολλαπλασιάζοντες + 5 ἐπὶ — 4, τὴν ἐναντίαν πάντως βαδιῦμεθα, ὅ ἐςι ληψόμεθα τετράκις λειπτικῶς τὸν 5, εἴτ' ὖν τετράκις αὐτὸν ἀφαιρησόμεθα· ἀφαιρῦντες τοίνυν τετράκις τὸν 5 γράψομεν —5 —5 —5 —5 (32) ὅπερ ἐςὶν —20· ἄρα + × — = —

Δειχθήσεται δὲ ϗ τῦτο κατὰ τὸν ἀνωτέρω δεύτερον λόγον ἀπαραλλάκτως.

50. Δ'. Τελευταῖον δὲ — × . — = +· πολλαπλασιάζοντες γὰρ — 4 ἐπὶ + 3, φέρ' εἰπεῖν, συνάπτομεν τρὶς τὸν —4, ὡς εἰ ϗ γράφοιμεν — 4 —4 —4 τυτέςι — 12. Πολλαπλασιάζοντες τοίνυν — 4 διὰ —3, ἐπ' ἐναντίας δήπυ χωρήσομεν, τυτέςιν ἀφαιρήσομεν τρὶς τὸν —4· ὐκ ἂν ὖν δηνηθείημεν ἀφελεῖν τρὶς τὸν —4, εἰμὴ γράψαιμεν + 4 + 4 + 4, ὅπερ ἔςαι + 12· Ἄλλως — × — = ἤτοι +, ἢ γῦν —· ἀλλὰ μὴν — γενέσθαι ὐ δύναται· ἔςι γὰρ τὸ — γινόμενον ἐκ — × +, ἢ ἐκ + × — (48, 49)· ἀναγκαίως ἄρα ἔςαι + *)

*) "Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν· Λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν"· ὕτως ἐκφράζει τὸν

Ἕτερος λόγος· Ἔςω γὰρ πολλαπλασιάσαι 5 — 2 διὰ 9 — 3, ὧν τὸ γινόμενον πᾶς τις ξυνορᾷ ἐσόμενον 18· 5 — 2, πολλαπλασιαθὲν ἐπὶ 9, δίδωσι 45 — 18· πολλαπλασιαθέντος δ' ἐφεξῆς τȣ͂ 5 ἐπὶ — 3, προκύψει 15· ἀλλαμὴν — 3 ȣ̓κ ὤφειλε πολλαπλασιάσαι ὅλον τὸν 5, ἀλλ' ἀπομεμειωμένον τῷ 2· ὁ ἄρα 2 τρὶς πλέον τȣ͂ δικαίȣ εἰσήχθη τῷ λειπτικῷ προκύπτοντι — 15· καὶ δὴ τὸ 15 προκύπτον, ὡς λειπτικὸν θεωρȣ́μενον, ἐςὶ μεῖζον τȣ͂ δικαίȣ τῇ ὅλῃ ποσότητι — 6. ἄρα πολλαπλασιάζοντες ἑπομένως — 2 ἐπὶ — 3 ὀφείλομεν γράψαι + 6, ἀναπληρȣ͂ντες ἀμέλει ἐν τῷ προκύπτοντι, ἣν ȣ̓ δέον ἀφειλόμεθα ποσότητα 6· ἐντεῦθεν ἕξομεν προκύπτοντα ἀληθῆ τὸν 18, ὅνπερ χρεὼν εὑρεῖν, ὡ ἐν ἀρχῇ εἴδομεν· ἐπεὶ 45 — 18 — 15 + 6 = 18· Ὅτι δὲ ταῦτα κρατεῖ κἀπὶ τῶν ἐν γράμμασι ποσῶν, μὴ καὶ περιττὸν ᾖ δεικνύειν.

κανόνα τόν δε Διόφαντος, Βιβ. Α' Ὁρισμ. Θ'. Ὅθεν καὶ ἡμῖν αἱ ἐναντίαι ποσότητες, καὶ τῶν συμβόλων τοῖς ἐναντίοις +, — σημειȣ́μεναι, ȣ̓ καταφατικαὶ καὶ ἀποφατικαὶ, ὥσπερ ἄλλοις εἴθιςαι, ὑπαρκτικαὶ δὲ καὶ λειπτικαὶ ἐκλήθησαν (21)· καὶ γὰρ καὶ ἡ ἀρχαία χρῆσις ȣ̓́τω τηρεῖται καὶ τὸ πρᾶγμα ἅλις διερμηνεύεται· Δυοῖν γὰρ τινων, ὁ μὲν ἐχέτω ἀργύρια 20, ἅτερος δὲ ὀφειλέτω 20. δῆλον ȣ̓͂ν ὅτι τῷ μὲν ὑπάρχȣσιν ἀργύρια 20, ἀπὸ δὲ τȣ͂ δευτέρȣ λείπȣσιν ἀργύρια 20· διὰ ταῦτα τȣ͂ μὲν ἡ τῶν 20 περιȣσία ἐςὶ ποσότης ὑπαρκτική· τȣ͂ δὲ ἡ τῶν 20 ὀφειλὴ, ποσότης λειπτική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΤΟΝ.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Συμβολικῶν Ποσοτήτων.

51. Ἡ διαίρεσις ἐναντίως ἔχεσα τῷ πολλαπλασιασμῷ, αἰτεῖ μέντοι κατ' ἐκεῖνον ἐν τῷ συμβολικῷ λογισμῷ τὲς κανόνας τῶν συμβόλων, τῶν συνεργῶν, τῶν γραμμάτων, ᾗ δὴ ᾗ τῶν δεικτῶν.

52. Κανὼν Α΄. Ἐὰν μὲν ὅμοια σύμβολα παρῶσι τῷ τε διαιρετέῳ, ᾗ τῷ διαιρέτῃ, τίθει πρὸ τῦ πηλίκυ τὸ +· ἐὰν δ' ἀνόμοια, τὸ —.

53. Β΄. Δίελε τὸν τῦ διαιρετέυ συνεργὸν διὰ τῦ κατὰ τὸν διαιρέτην.

54. Γ΄. Γράφε πηλίκον τὰ ἐν τῷ διαιρετέῳ συνάμα τοῖς δείκταις γράμματα, ἃ μὴ ἔχει ὁ διαιρέτης.

55. Δ΄. Ὅταν ὅ, τε διαιρετέος ᾗ ὁ διαιρέτης τὸ αὐτὸ ἔχωσι γράμμα, ἄφελε τὸν δείκτην τὸν ἐν τῷ διαιρετέῳ ἀπὸ τῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ᾗ γράψον πηλίκον αὐτὸ τὸ γράμμα μετὰ δείκτυ, ὅς ἐςιν ἡ διαφορὰ τῶν προτέρων δεικτῶν· τῆς δὲ διαφορᾶς ο ὔσης, ὡς ὅταν ὁ αὐτὸς ᾖ δείκτης τῷ τε ἐπὶ τῦ διαιρετέυ, ᾗ τῷ ἐπὶ τῦ διαιρέτυ γράμματι, μηδόλως γράφε τὸ γράμμα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔςω διελεῖν $6\alpha^2\beta^3\gamma$ διὰ $2\alpha^2\beta$· τὰ ἐξυπακυόμενα σημεῖα + εἰσὶ ταυτὰ, γράφε ἓν πρὸ τῦ πηλίκυ, ἢ ἔα προεξυπακυόμενον τὸ +· δίελε εἶτα τὸν τῦ διαιρετέυ συνεργὸν 6, διὰ τῦ κατὰ τὸν διαιρέτην συνεργῦ 2, τὸν δὲ προϊόντα 3 θὲς συνεργὸν τῦ πηλί-

κου· τὸ δὲ α, παρὸν κοινῇ τῷτε διαιρετέῳ ϗ τῷ διαιρέτῃ μετὰ τοῦ αὐτοῦ δείκτου, μηδὲ γράψῃς ἐν τῷ πηλίκῳ ὅλως· τὸ δὲ β κοινῇ μὲν ἁπαντᾷ, ἀλλὰ μετὰ δείκτου, ἐν μὲν τῷ διαιρετέῳ μείζονος, ἐν δὲ τῷ διαιρέτῃ ἐλάσσονος· διὰ ταῦτ' οὖν ἄφελε τὸν δείκτην τοῦ διαιρέτου 1 ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτου 3, τὸ δὲ β γράμμα θὲς πηλίκον ἐπιθεὶς αὐτῷ δείκτην τὴν 2 διαφοράν· τέλος δὲ τὸ γ παρὸν μὲν τῷ διαιρετέῳ, ἀπὸν δὲ τῷ διαιρέτῃ, γράφε πηλίκον, τὸ δ' ὅλον πηλίκον ἕξεις $3\beta^2\gamma$

Ἔςω $\alpha=4$, ϗ $\beta=10$, ϗ $\gamma=5$· ὁ τοίνυν διαιρετέος $6\alpha^2\beta^3\gamma$ ἔσεται 480000, ὁ δὲ $2\alpha^2\beta$ διαιρέτης, 320· διαιρεθέντος οὖν τοῦ 480000 διὰ 320, πηλίκον πρόεισι 1500· εὑρεθέσηται δὲ ὅτι ϗ τὸ $3\beta^2\gamma$ συμβολικὸν πηλίκον δύναται ὡσαύτως 1500.

56. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τῷ Συμβολικῷ λογισμῷ, ὡς κἀν τῇ ἀριθμητικῇ, γενικὴ βάσανος τῆς μὲν διαιρέσεώς ἐςιν ὁ πολλαπλασιασμὸς, τούτου δὲ ἡ διαίρεσις· ἐκοῦν εἰδέναι βουλόμενος ἐπὶ τοῦ προεκτεθέντος ὑποδείγματος, εἰ ἄρα ἀληθὲς πηλίκον ἔχομεν, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἀποληψόμεθα ἀναγκαίως τὸν διαιρετέον· τοὐναντίον δὲ μετὰ τὸ πολλαπλασιάσαι $2\alpha^2\beta$ ἐπὶ $3\beta^2\gamma$, βασανίζοντες τὴν πρᾶξιν, τὸ προκύπτον $6\alpha^2\beta^3\gamma$ διαιρήσομεν διὰ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ $3\beta^2\gamma$· ἀποληψόμεθα δὲ ἀναγκαίως εἰς πηλίκον τὸν $2\alpha^2\beta$ πολλαπλασιαςέον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἔςω διελεῖν $-\alpha\beta^3\gamma$ διὰ $-\beta^2\gamma$· ὁ οὖν τῶν σημείων κανὼν ἀφοσιοῖ τὸ $+$ τῷ πηλίκῳ· περὶ δὲ τῶν συνεργῶν, 1 ἐξυπακουομένη πρὸ τοῦ διαιρετέου, διαιρεθεῖσα διὰ 1, προεξυπακουμένης τοῦ διαιρέτου, παρέχει 1, ἣν ἔα προεξακούεσθαι τοῦ πηλίκου· τὸ δὲ α παρὸν μὲν τῷ διαιρετέῳ, ἀπὸν δὲ τοῦ διαιρέτου γράφε ὡς πηλίκον· τοῦ

δὲ β ἀφελὼν τὸν ἐν τῷ διαιρέτῃ δείκτην 2 ἀπὸ τȣ̃ ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτȣ 3, γράφε πηλίκον τὸ β μετὰ δείκτȣ 1, ἢ ϰ̀ παραλείπεται ἐννοȣμένη· τὸ δὲ γ ὡς τῷ τε διαιρετέῳ ϰ̀ τῷ διαιρέτῃ σὺν τῷ αὐτῷ δείκτῃ παρὸν, μὴ γράφε ὅλως· πηλίκον ἄρα ἔςαι + αβ· ὡσαύτως δὲ 8 αβ: — 2 αβ = — 4· ϰ̀ — 8 $\alpha\beta\gamma^2$: + αβγ = — 8 γ.

Δεῖξις τῶν προαποδοθέντων κανόνων.

Ἅπας κανὼν διαιρέσεως ἀσφαλὴς ἔςαι, ἐὰν παράγῃ πηλίκον, ὃ πολλαπλασιαθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀποδίδωσιν ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον· ἐπεὶ δὲ τȣ̃το ξυμβαίνει ἐκ τῶν ἄρτι προτεθειμένων κανόνων· ἄρα ϰ̀ αὐτοί εἰσιν ἀσφαλεῖς.

Α΄. Ἐκ γὰρ τῶν συμβόλων ἀρξαμένοις, εἰ ἔςι τῷ τε διαιρετέῳ ϰ̀ τῷ διαιρέτῃ +, τὸ + τȣ̃ πηλίκȣ, πολλαπλασιαθὲν ἐπὶ τὸ + τȣ̃ διαιρέτȣ ἐπιςρέψει τὸ τȣ̃ διαιρετέȣ +· εἰ δ᾽ ἔςι — τῷ διαιρετέῳ τε ϰ̀ τῷ διαιρέτῃ, τὸ + τȣ̃ πηλίκȣ πολλαπλασιαθὲν διὰ τȣ̃ — τȣ̃ διαιρέτȣ ἀποδώσει τὸ — τȣ̃ διαιρετέȣ· εἰ δ᾽ ἔςι + μὲν τῷ διαιρετέῳ, — δὲ τῷ διαιρέτῃ, τὸ τȣ̃ πηλίκȣ —, πολλαπλασιαθὲν διὰ τȣ̃ — τȣ̃ διαιρέτȣ ἀποδώσει τὸ τȣ̃ διαιρετέȣ +· τέλος δὲ, εἰ ἔςι — μὲν τῷ διαιρετέῳ, + δὲ τῷ διαιρέτῃ, τὸ τȣ̃ πηλίκȣ — πολλαπλασιαθὲν διὰ τȣ̃ + τȣ̃ διαιρέτȣ ἀποδώσει τὸ τȣ̃ διαιρετέȣ —

Β΄. Ὑπὲρ δὲ τῶν συνεργῶν, ἐπείπερ ὁ τȣ̃ συμβολικȣ̃ πηλίκȣ συνεργὸς ἀριθμητικὸν πηλίκον ὑπάρχει, προϊὸν ἐκ τῆς διαιρέσεως τȣ̃ κατὰ τὸν διαιρετέον διὰ τȣ̃ κατὰ τὸν διαιρέτην συνεργȣ̃, πολλαπλασιαθεὶς ἐπὶ τὸν τȣ̃ διαιρέτȣ συνεργὸν ἀποδώσει ἀναγκαίως τὸν τȣ̃ διαιρετέȣ.

Γ΄. Περὶ δὲ τῶν γραμμάτων, πάντα τὰ τȣ̃ διαιρέτȣ, ἢ τὰ τȣ̃ πηλίκȣ (54, 55) ἢ ϗ ἀμφοῖν κοινῇ παρευρισκόμενα, εὑρεθήσονται ἀναγκαίως κἀν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ πηλίκȣ, ϗ τȣ̃ διαιρέτȣ (39).

Δ΄. Τὸ δ᾽ ἐπὶ τοῖς δείκταις· ἅπαν γράμμα τȣ̃ διαιρετέȣ, ὃ μὴ πάρεςι τῷ διαιρέτῃ, παρέςαι τῷ πηλίκῳ, ϗ δὴ ϗ τῷ προκύπτοντι, ἔχον τὸν αὐτȣ̃ δείκτην, ὃν εἶχεν ἐν τῷ διαιρετέῳ (39). Περὶ δὲ τῶν κοινῇ παρόντων τῷτε διαιρετέῳ, ϗ τῷ διαιρέτῃ, ἐὰν ἔχωσιν ἴσȣς δείκτας, παρόντα τῷ διαιρέτῃ παρέσονται ϗ τῷ προκύπτοντι· ἐὰν δὲ ὁ δείκτης, ὃν ἔχει τὸ αὐτὸ γράμμα ἐν τῷ διαιρετέῳ, μείζων ᾖ τȣ̃ δείκτȣ, ὃν τὸ αὐτὸ γράμμα ἔχει ἐπὶ τȣ̃ διαιρέτȣ, ἡ ὑπεροχὴ τȣ̃ ἐντῷ διαιρετέῳ, ᾗ ὑπερέχει τὸν ἐν τῷ διαιρέτῃ, συναφθεῖσα αὐτῷ τῷ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἀναγκαίως ἀποδώσει τὸν ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτην (55).

57. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. ά, Ὅταν ὁ τȣ̃ διαιρέτȣ συνεργὸς μείζων ᾖ τȣ̃ κατὰ τὸν διαιρετέον, ἢ ὅταν λειψάνȣ ἄτερ ȣ̓κ ἔχῃ γενέϑαι διαίρεσις· β΄. ὅταν ὁ διαιρέτης γράμματα περιέχῃ, ἃ μὴ ἔχει ὁ διαιρετέος· γ΄. ὅταν ὁ δείκτης κοινȣ̃ γράμματος τῷτε διαιρετέῳ ϗ τῷ διαιρέτῃ μείζων ᾖ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἢ ἐν τῷ διαιρετέῳ, ἡ συμβολικὴ διαίρεσις ὁλοσχερῶς ȣ̓ γενήσεται· ἀποχρήσει ȣ̃ν τηνικαῦτα σημειȣ̃ν τὴν διαίρεσιν ἤτοι μεσολλαβȣ̃ντος μεταξὺ τȣ̃ (:) σημείȣ· οἷον $7\alpha\beta\gamma : 3\alpha\beta\gamma\delta$, ἢ ἐν εἴδει κλάσματος, ȣ̃ ἀριθμητὴς μὲν ὁ διαιρετέος, παρανοματὴς δὲ ὁ διαιρέτης οἷον $\dfrac{7\alpha\beta\gamma}{3\alpha\beta\gamma\delta}$.

58. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἀλλὰ συχνάκις γὰρ ἡ ȣ̈τω περιςαμένη διαίρεσις, ἢ τὸ συμβολικὸν κλάσμα, ἐφ᾽ ἁπλȣςέραν ἔκθεσιν ἀναχθῆναι δύναται· ἰδȣ̀ δὴ ἡ μέθοδος· ά.

δίελε, εἰ ἐξείῃ, ἑκάτερον συνεργὸν διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃, ϗ ἐν τῷ χώρῳ αὐτῶν τίθει τὰ προκύπτοντα πηλίκα· β΄. ὅταν ὦσι γράμματα κοινὰ τῷτε διαιρετέῳ ϗ τῷ διαιρέτῃ, σὺν τῷ αὐτῷ δείκτῃ, ἀμφότερα ἀπάλειψον (55)· ὅταν δὲ ἐν διαφόροις δείκταις, ἔα κατὰ χώραν τὸ, ὃ εἶχε τὸν μείζω δείκτην, μετὰ δείκτȣ τῆς διαφορᾶς τῶν δύω προτέρων δεικτῶν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἵν' ȣ̃ν ἀναγάγῃς ἐφ ἁπλȣστέραν ἔκθεσιν τὴν σεσημειωμένην διαίρεσιν, ἢ τὸ συμβολικὸν κλάσμα $\frac{4\,\alpha\beta^3\gamma\delta}{12\,\alpha\beta\gamma^2}$ ά. δίελε τȣ̀ς συνεργȣ̀ς 4 ϗ 12 διὰ 4, ὅθεν προκύψει $\frac{1}{3}$· β΄. τὸ α, κοινὸν ὂν τῷτε διαιρετέῳ ϗ τῷ διαιρέτῃ, ἐξάλειψον· γ΄· τὸ β ἔχον ἐν μὲν τῷ διαιρετέῳ δείκτην 3, ἐν δὲ τῷ διαιρέτῃ δείκτην 1, ἔασον ἐπὶ τȣ̃ διαιρετέȣ μετὰ δείκτȣ τȣ̃ 2, ὃς ἐςιν ἡ διαφορὰ τȣ̃ 3 ϗ 1, ȣ̃ς εἶχον πρότερον δείκτας τὰ γράμματα· ἀπὸ δὲ τȣ̃ γ, 1 ἀφαιρεθεῖσα τȣ̃ 2, καταλείπει γ ἐν τῷ διαιρέτῃ· ἡ δὲ διαίρεσις, ἢ τὸ συμβολικὸν κλάσμα γενήσεται δἰ ἀναγωγῆς $\frac{1\,\beta^2\delta}{3\gamma}$, ἢ $\frac{\beta^2\delta}{3\gamma}$.

Πᾶς ἄντις ῥᾷςα συνίδοι, ὅτι ταὐτὸν ποιȣ̃μεν ἐνταῦθα, ὃ ϗ εἰ διέλοιμεν τόντε ἀριθμητὴν ϗ παρονομαςὴν τȣ̃ κλάσματος $\frac{4\,\alpha\beta^3\gamma\delta}{12\,\alpha\beta\gamma^2}$ διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ποσȣ̃ $4\,\alpha\beta\gamma$, εἴγε $4\,\alpha\beta^3\gamma\delta$ διαιρεθὲν διὰ $4\,\alpha\beta\gamma$ ἀποδίδωσι $\beta^2\delta$, τὸ δὲ $12\,\alpha\beta\gamma^2$ διαιρεθὲν ὡσαύτως ἀποδίδωσι 3γ· ȣ̃τω δὲ ἀμετακίνητος μένει ἡ δύναμις τȣ̃ κλάσματος (Ἀριθμ. 143).

Ἕτερον ὑπόδειγμα· ȣ̃τω δὲ ποιȣ̃ντες εὑρήσομεν ϗ τὸ $\frac{18\,\alpha\beta\zeta^3}{9\beta\gamma\zeta}$ γινόμενον δἰ ἀναγωγῆς $\frac{2\alpha\zeta}{\gamma}$, ϗ

$\frac{9\alpha\gamma}{7\gamma}=\frac{9\alpha}{7}$, ϗ $\frac{\alpha\beta}{2\alpha\beta}=\frac{1}{2}$ ἐὰν δὲ ὅ,τε διαιρετέος ϗ ὁ διαιρέτης πλείȣς ἑνὸς ὅρȣς ἔχωσιν, ἵν᾽ ἀναχθῶσιν εἰς ἁπλȣςερον σχῆμα, ἐπάναγκες εὑρεῖν τὸν μέγιςον κοινὸν ἀμφοῖν διαιρέτην, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς κεφαλαίῳ ὀψόμεθα.

59. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἔςω $\frac{\alpha}{\alpha}$, παρεπόμενοι τοίνυν τῷ γενικῷ τῶν δεικτῶν κανόνι (55) ὃς ἀφαιρεῖν παρεκελεύετο τὸν δείκτην, ὃν ἔχει τὸ αὐτὸ γράμμα ἐν τῷ διαιρέτῃ, τȣ̃ δείκτȣ ὃν ἔχει ἐν τῷ διαιρετέῳ, ληψόμεθα πηλίκον α^{1-1}, ἢ α^{0}, ἀλλὰ α διαιρεθὲν δι᾽ α παρέχει πηλίκον 1· ἄρα, α^{0}, ϗ ἐν γένει ἅπαν γράμμα δείκτην ἔχον 0, ἴσον ἐςὶ 1· ὅταν ἄρα ἀναγαγεῖν βȣλώμεθα ἐφ᾽ ἁπλȣςέραν ἔκθεσιν κλάσμα συμβολικὸν, ἔχον τὰ αὐτὰ γράμματα ἐπίτε τȣ̃ ἀριθμητȣ̃ ϗ τȣ̃ παρονομαςȣ̃ μετὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ δείκτȣ, ταῦτα, ἐπεὶ ἰσοδυναμȣ̃σι μονάδι, ἥτις τὰ λοιπὰ γράμματα πολλαπλασιάζȣσα ȣ̉ μετατρέπει, ἀπαλειπτέον.

Διαίρεσις τῶν πολυωνύμων.

60. Ὥσπερ ἐπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς διαιρεῖν ἀδύνατον ἀριθμὸν ἁπλȣ̃ν διὰ σύνθετȣ, ȣ̔́τω κἀπὶ τȣ̃ συμβολικȣ̃ λογισμȣ̃ ἀδύνατον διελεῖν διὰ πολυωνύμȣ μονώνυμον· ἀποχρήσει ȣ̓̃ν μόνον τὴν πρᾶξιν σημειῶσαι· ȣ̔́τως ἐπὶ διαιρέσει τȣ̃ αγ διὰ α+β γραπτέον $\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$· ἢ γȣ̃ν $\alpha\gamma:\overline{\alpha+\beta}$ ἢ ϗ $\alpha\gamma:(\alpha+\beta)$· Ἀλλ᾽ ἐπὶ πολυωνύμȣ διὰ μονωνύμȣ διαίρεσιν, διαιρȣ̃μεν ἑξῆς πάντας τȣ̀ς τȣ̃ πολυωνύμȣ ὅρȣς διὰ τȣ̃ μονωνύμȣ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔςω διελεῖν $6\alpha\beta^2 + 2\beta\gamma - 4\beta\delta$ διὰ 2β· $6\alpha\beta^2$ διαιρεθὲν διὰ 2β, δίδωσι $3\alpha\beta$· $2\beta\gamma$ διαιρεθὲν διὰ 2β, δίδωσι γ· ϗ $-4\beta\delta$ διαιρεθὲν διὰ 2β παρέχει -2δ· τὸ δ᾽ ὅλον πηλίκον, $3\alpha\beta + \gamma - 2\delta$· πολλαπλασιασθὲν γὰρ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2β, προβάλλει τὸν διαιρετέον.

Ἔςω $\alpha = 10$, ϗ $\beta = 5$, ϗ $\gamma = 4$, ϗ $\delta = 3$· Ὅλος τοίνυν ὁ διαιρετέος $6\alpha\beta^2 + 2\beta\gamma - 4\beta\delta$ ἐκτιμηθεὶς ἐν ἀριθμοῖς, ἔςαι 1480· ὁ δὲ διαιρέτης ἔςαι 10· 1480 ἦν διαιρεθεὶς διὰ 10, δίδωσιν 148· καταφανὲς δὲ, ὅτι ϗ τὸ πηλίκον $3\alpha\beta + \gamma - 2\delta$ δύναται ὡσαύτω 148.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Κείσθω διαλεῖν $-\alpha + \alpha\beta - 3\alpha\beta\gamma$ διὰ $-\alpha$. $-\alpha$ διαιρεθὲν διὰ $-\alpha$, δίδωσι $+1$· $\alpha\beta$ διαιρεθὲν διὰ $-\alpha$ δίδωσι $-\beta$· $-3\alpha\beta\gamma$ διαιρεθὲν διὰ $-\alpha$ δίδωσι $+3\beta\gamma$· τὸ δ᾽ ὅλον πηλίκον, $+1 - \beta + 3\beta\gamma$.

61. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀπαντήσαντος δὲ ἐν τῷ διαιρετέῳ ὅρυ, ὃς μὴ εἴη διαιρέσιμος λειψάνυ δίχα, ἀποχρήσει αὐτὸν σημειῦν ὡς διῃρημένον· διαιρῦντες ὖν $3\alpha\beta - \beta\gamma$ διὰ $2\alpha\gamma$, γράψομεν μόνον $\frac{3\alpha\beta - \beta\gamma}{2\alpha\gamma}$, ἢ γῦν $\overline{3\alpha\beta - \beta\gamma} : 2\alpha\gamma$ ἢ τέλος $(3\alpha\beta - \beta\gamma).: 2\alpha\gamma$

62. Ὁπηνίκ᾽ ἂν ὅ, τε διαιρετέος ϗ ὁ διαιρέτης τῶν πολυωνύμων ὑπάρχωσι· α΄. δίελε διὰ τῦ πρώτυ ὅρυ τῦ διαιρέτυ, ἕνα τινὰ ὅρον τῦ διαιρετέυ, ὃς ἂν ᾖ λειψάνυ ἄνευ διαιρέσιμος· β΄. πολλαπλασίασον ὅλον τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρημένον πηλίκον· γ΄. ἄφελε ἀπὸ τῦ διαιρετέυ τὸ προκύπτον τόνδε τὸν τρόπον· μεταβαλὼν τὰ τῶν ὅρων τῦ προκύπτοντος σύμβολα, τίθει ἕκαςον ὅρον ὑφ᾽ ἑκα-

σον τῶν τȣ̃ διαιρετέȣ, οἳ σφίσιν ἂν εἶεν ὅμοιοι, ϗ ἀνάγαγε ὕτω ἑκάςην δυάδα ὅρων τȣ̃ προκύπτοντος ϗ τȣ̃ διαιρετέȣ· ἐπαναλάμβανε δὲ, ἕως ἂν ἐξῇ, τὰς αὐτὰς πράξεις, μέχρι τέλȣς τῆς διαιρέσεως.

63. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ῥᾷς' ἄντις ξυνίδοι, ὡς ἡ μέθοδος αὕτη τȣ̃ διαιρεῖν τὰ πολυώνυμα ἀκριβῶς ταυτίζεται τῇ μεθόδῳ τῆς ἀριθμȣ̃ συνθέτȣ διαιρέσεως· ὡς ϗ ἡ μέθοδος τȣ̃ πολυώνυμα διὰ μονωνύμων διαιρεῖν ἡ αὐτή ἐςι τῇ ἐκδεδομένῃ περὶ τῆς τȣ̃ συνθέτȣ δἰ ἁπλȣ̃ ἀριθμȣ̃ διαιρέσεως· ἐν γένει ἄρα εἰπεῖν, παρεκτὸς τῶν προχειρομένον ἐκ τῆς σχετικῆς τῶν ἀριθμῶν δυνάμεως ὅ,τε πολλαπλασιασμὸς ϗ ἡ διαίρεσις τῶν συμβολικῶν πολυωνύμων τἄλλα πάντα ἀκριβῶς ταυτίζονται τῷ πολλαπλασιασμῷ τε ϗ τῇ διαιρέσει τῶν συνθέτων ἀριθμῶν.

ΥΠΟΔΕΙΜΑ Α΄. Ἔσω διελεῖν $\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \alpha\gamma - \beta\gamma$ διὰ $\alpha\beta + \gamma$· γραφέντων ȣ̃ν τȣ̃ τε διαιρετέȣ ϗ τȣ̃ διαιρέτȣ ὥσπερ ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς διαιρέσεως, καθάπερ φαίνεται ἐνταῦθα,

$$\begin{array}{l|l} \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \alpha\gamma - \beta\gamma & \alpha\beta + \gamma \\ \hline -\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\gamma + \beta\gamma & \alpha - \beta \\ \quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 & \end{array}$$

δίελε $\alpha^2\beta$ διὰ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ τȣ̃ $\alpha\beta$· τὸ δὲ α τίθει ἐν τῷ χώρῳ τῶν πηλίκων· Ὅλον δὲ τὸν $\alpha\beta + \gamma$ διαιρέτην πολλαπλασιάσας ἐπὶ τὸ πηλίκον α, γράψον τὸ $\alpha^2\beta + \alpha\gamma$ γινόμενον ὑφ᾽ ὅρȣς τȣ̃ διαιρετέȣ ὁμοίȣς, ἀλλὰ μετὰ συμβόλων ἐναντίων εἰς ἀφαιρέσεως ἔνδειξιν (32)· ἀναγωγῆς δὲ γενομένης κοινῆς τῶν ὅρων τȣ̃ προκύπτοντος τοῖς ἀντιςοίχοις ὅροις τȣ̃ διαιρετέȣ, καταλείπεται 0· μένȣσι δὲ ἔτι ἐν τῷ διαιρετέῳ οἱ ὅροι $-\alpha\beta^2 - \beta\gamma$· δίελε ȣ̃ν αὖθις $-\alpha\beta^2$ διὰ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ $\alpha\beta$ τῶν κατὰ τὸν διαιρέτην· τὸ δὲ

— β γράψον ἐν τοῖς πηλίκοις· Ὅλος δὲ ὁ διαιρέτης $\alpha\beta+\gamma$, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ $-\beta$, ποιεῖ $-\alpha\beta^2-\beta\gamma$. τούτους δὲ γράψον ὑφ᾽ ὅρους τοῦ διαιρετέου σφίσιν ὁμοίους, ἔχοντας ἀντὶ — τὸ + σύμβολον· ἀναγωγῆς δὲ αὖθις γενομένης, οὐδὲν λείπεται· Τὸ δ᾽ ὁλικὸν πηλίκον ἐστὶν $\alpha-\beta$, ὃ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\alpha\beta+\gamma$ ἀποδίδωσι τὸν αὐτὸν διαιρετέον $\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\alpha\gamma-\beta\gamma$.

Ἔστω, ἐπὶ τοῦ προτεθέντος ὑποδείγματος, $\alpha=10$, καὶ $\beta=5$, καὶ $\gamma=4$· ὅλος ἄρα ὁ διαιρετέος ἔσται 270, ὁ δὲ διαιρέτης 54· 270 διαιρεθεὶς διὰ 54 δίδωσι 5· ἀλλ᾽ ὡσαύτως καὶ τὸ συμβολικὸν πηλίκον $\alpha-\beta$ ἐστὶν $=5$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Κείσθω διελεῖν $\chi^3-11\chi^2+38\chi-40$ διὰ $\chi-2$· διῃρήσθω οὖν ὁ τοῦ διαιρετέου ὅρος χ^3 διὰ τοῦ πρώτου τῶν κατὰ τὸν διαιρέτην ὅρου χ· ὅθεν προκύψει πηλίκον χ^2· ὅλου δὲ τοῦ διαιρέτου $\chi-2$, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τοῦτο τὸ πηλίκον, προκύψει $\chi^3-2\chi^2$, ὃ γεγράφθω ὑπὸ τὸν διαιρετέον σὺν ἐναντίοις συμβόλοις· ἀναγωγῇ δὲ καταλείπεται ἐν τῷ διαιρετέῳ $-9\chi^2$, $+38\chi-40$· διῃρήσθω τοίνυν $-9\chi^2$, διὰ χ· πηλίκον ἔσται -9χ· ὅλου δὲ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ -9χ, προκύπτει $-9\chi^2+18\chi$· γεγράφθων οὖν τῷ ὅρῳ τῷδε μετ᾽ ἐναντίων συμβόλων ὑφ᾽ ὁμοίῳ σφῖν ὅρῳ· ἀναγωγῇ δὲ λείπεται ἐν τῷ διαιρετέῳ $20\chi-40$· διῃρήσθω δὲ 20χ διὰ χ· πηλίκον οὖν ἔσται $+20$· τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τοῦδε τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ διαιρέτου, εἴτ᾽ οὖν $+20\chi-40$, γράψον μετ᾽ ἐναντίων συμβόλων ὑπὸ δύω ὁμοίους ἀντιστοιχοῦντας ὅρους· ἀναγωγῆς δὲ γενομένης, καταλείπεται 0, ὅ, τε διαιρετέος φθίνει· Τὸ ἄρα ὁλικὸν πηλίκον ἐστὶ $\chi^2-9\chi+20$, ὃ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\chi-2$ ἀποδίδωσι τὸν διαιρετέον·

$$\begin{array}{l|l} \chi^3 - 11\chi^2 + 38\chi - 40 & \chi - 2 \\ \hline -\chi^3 + 2\chi^2 - 18\chi + 40 & \chi - 9\chi^2 + 20 \\ \quad 0 - 9\chi^2 + 20\chi \quad 0 & \\ \quad\;\; + 9\chi^2 - 20\chi & \\ \qquad\;\; 0 \quad\;\; 0 & \end{array}$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἔςω διελεῖν $\chi^3 - 117\chi - 324$ διὰ $\chi + 3$· διῃρήσθω ἓν χ^3 διὰ χ· πηλίκον ἔςαι χ^2· ὁ δὲ $\chi + 3$ διαιρέτης, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πηλίκον χ^2, ποιεῖ $\chi^3 + 3\chi^2$· γεγράφθω δὲ τὸ χ^3 μετὰ τȣ̃ — ὑπὸ τὸ χ^3 τȣ̃ διαιρετέȣ· ἀναγωγῇ δὲ λείπεται 0· περὶ δὲ τȣ̃ $+3\chi^2$ ὅρȣ βλέπων, ὅτι ȣ̉κ ἔςιν αὐτῷ ὅμοιος ὅρος ἐν τῷ διαιρετέῳ, γράφε αὐτὸν ὑπὸ τὸν $-\chi^3$ μεταβάλλων τὸ σύμβολον, ὑποτιθεὶς δὲ αὐτὸν ὡς ὅρον τȣ̃ διαιρετέȣ δίελε εὐθὺς διὰ τȣ̃ χ πρώτȣ τῶν τȣ̃ διαιρέτȣ ὅρων· πηλίκον ἓν ἔςαι -3χ· ὁ δὲ $\chi + 3$ διαιρέτης, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ -3χ, ποιεῖ $-3\chi^2 - 9\chi$· Τȣ́των δὲ τῶν δυοῖν ὅρων ὑπὸ τȣ̀ς σφίσιν ὁμοίȣς γραφέντων, ϗ ἀφαιρεθέντων, λείπεται ἐπὶ τȣ̃ διαιρετέȣ $-108\chi - 324$· διαιρεθεὶς δὲ διὰ χ ὁ -108χ ὅρος παρέχει πηλίκον -108· πολλαπλασιασθεὶς δὲ ἐπὶ -108 ὁ $\chi + 3$· ποιεῖ $-108\chi - 324$, ὧν ἀφαιρεθέντων δι' ἀναγωγῆς, λείπεται ἓν μηδὲ ἕν· Ὁλικὸν ἄρα πηλίκον ἔςι $\chi^2 - 3\chi - 108$

$$\begin{array}{l|l} \chi^3 - 117\chi - 324 & \chi + 3 \\ \hline -\chi^3 + 9\chi + 324 & \chi^2 - 3\chi - 108 \\ \quad 0 - 108\chi \quad 0 & \\ -3\chi^2 + 108\chi & \\ +3\chi^2 \quad\; 0 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

64. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡνίκα ἐπὶ τȣ̃ προκύπτοντος

ἐκ τοῦ $\chi+3$ διαιρέτου διὰ τοῦ χ^2 πηλίκου ἀπήντησεν ὅρος ὁ $+3\chi^2$, ὃν εἴδομεν ὁμοίου κατὰ τὸν διαιρετέον ἀμοιροῦντα ὅρου, μεταλλαγῇ τοῦ συμβόλου ἐπεχαράξαμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ἧς πράγματι μὴ ἐκτελουμένης χήτει ὅρου παραπλησίου, ἐτήρησαμεν αὐτὸν ὡς ἕνα τῶν τοῦ διαιρετέου, καὶ ἀμέσως διείλομεν διὰ τοῦ χ πρώτου τῶν τοῦ διαιρέτου ὅρων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ δευτέρου ὅρου -3χ, ὃς γέγραπται ἐν τῷ πηλίκῳ ὡς εἷς τῶν παραγόντων τὸν διαιρετέον· ἐν γένει ἄρα ἐντεῦθεν δῆλον, ὡς ὅτε ἐπὶ τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ διαιρέτου ἀπαντᾷ ὅρος ὁμοίου ἀμοιρῶν ἐν τῷ διαιρετέῳ, τοῦτον δεῖ αὐτίκα τροπῇ τοῦ συμβόλου διαιρεῖν διὰ τοῦ πρώτου τῶν τοῦ διαιρέτου ὅρων·

Ὑποδείγματα διαιρέσεως πρὸς ἄσκησιν τῶν πρωτοπείρων.

$$\begin{array}{l|l}
\alpha^3 - \beta^3 & \alpha - \beta \\
\hline
-\alpha^3 + \alpha^2\beta & \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \\
\hline
+\alpha^2\beta - \beta^3 & \\
-\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 & \\
\hline
+\alpha\beta^2 - \beta^3 & \\
-\alpha\beta^2 + \beta^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
8\alpha^4 - 2\alpha^3\beta - 13\alpha^2\beta^2 - 3\alpha\beta^3 & 4\alpha^2 + 5\alpha\beta + \beta^2 \\
\hline
-8\alpha^4 - 10\alpha^3\beta - 2\alpha^2\beta^2 & 2\alpha^2 - 3\alpha\beta \\
\hline
-12\alpha^2\beta - 15\alpha^2\beta^2 - 3\alpha\beta^3 & \\
+12\alpha^3\beta + 15\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \gamma^4 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\
-\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\gamma^2 & \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \\
\hline
+\alpha\alpha\beta\beta - \alpha^2\gamma^2 + \beta^4 - \gamma^4 & \\
-\alpha\alpha\beta\beta - \beta^4 - \beta\beta\gamma\gamma & \\
\hline
-\alpha^2\gamma^2 - \beta\beta\gamma\gamma + \gamma^4 & \\
+\alpha^2\gamma^2 + \beta\beta\gamma\gamma - \gamma^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{2}{7}\alpha^3 - \frac{8}{35}\alpha^2\beta + \frac{1}{4}\alpha^2\beta^2 - \frac{3}{20}\beta^3 & \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{3}{5}\beta^2 \\
-\frac{2}{7}\alpha^3 + \frac{8}{35}\alpha^2\beta & \frac{3}{7}\alpha - \frac{1}{4}\beta \\
\hline
+\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2 - \frac{3}{20}\beta^3 & \\
\hline
-\frac{1}{4}\alpha\beta^2 + \frac{3}{20}\beta^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ συμβολικῶν κλασμάτων.

Τὰ συμβολικὰ κλάσματα ἐδὲν ἀλλ᾽ ἢ διαιρέσεις εἰσὶ σεσημειωμέναι, ὡς εἴδομεν (59 κτ.)· ὑπόκειται δὲ ϗ ταῦτα ταῖς αὐταῖς, αἷσπερ ϗ τὰ ἀριθμητικὰ, πράξεσι· δι᾽ ὃ τὰ ῥηθησόμενα ἀνάκλησίς τις οἱονεὶ ἔσαι τῶν ἐκεῖθι δεδειγμένων· ῥητέον ἓν πρῶτον ὅπως ἐφ᾽ ἁπλεςέραν ἀνάγεται ἔκθεσιν γενικώτερον, ἢ ὡς διείληπται (60)· εἰς δὲ τῦτο ἀνάγκη τὸν κοινὸν παρονομαςὲ ϗ ἀριθμητὲ ϗ δὴ ϗ μέγιςον διαιρέτην εὑρεῖν· προκείσθω τοίνυν λῆμμάτι εἰς τῦτο τεῖνον.

65. ΛΗΜΜΑ. *Ποσῶν δυοῖν τῦ μεν* Α *μείζονος, τῦ δὲ* Β *ἐλάσσονος, ἀκριβῶς διαιρεμένων διὰ τῦ αὐτῦ ποσῦ π,*

ἐὰν διαιρεθέντος τȣ̃ Α διὰ Β καταλειφθῇ λεῖψανον τὸ γ, ϗ τȣ̃το ἀκριβῶς διὰ τȣ̃ π διαιρεθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ. Τȣ̃ Α διὰ Β διαιρεθέντος ἔςω πηλίκον τὸ μ. ἄρα Α=μ×Β+γ (Ἀριθμ. 107) · ἐπεὶ ȣ̃ν τὸ Α ἀκριβῶς διαιρεῖται διὰ π, διαιρεθήσεται ἀκριβῶς διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ π ϗ τὸ μΒ+γ· ἀλλὰ Β διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τȣ̃ π, ἄρα ϗ τὸ τȣ̃ Β πολλαπλȣ̃ν μΒ *) ἀκριβῶς διὰ τȣ̃ π διαιρεθήσεται· διαιρεθήσεται ἄρα διὰ τȣ̃ π ϗ τὸ γ· Ο. Ε. Δ.

66. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ Β ϗ γ ἀκριβῶς διὰ π διαιρȣ̃νται, ἐὰν τȣ̃ Β διὰ γ διαιρεθέντος καταλειφθῇ λεῖψανον τὸ δ, ϗ τȣ̃το, ὡς ἕπεται ἐκ τȣ̃ λήμματος, ἀκριβῶς διὰ π διαιρεθήσεται· ὡσαύτως διαιρεθῆναι ἔχει διὰ π ϗ τὸ κατάλοιπον ε, ὃ ἂν εὑρεθείη διαιρεθέντος τȣ̃ ε διὰ δ, ϗ ἐφεξῆς ὁμοίως, ἕως ἂν καταλειφθῇ μηδέν.

67. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δυεῖν καθολικῶν ποσοτήτων τὸν κοινὸν ϗ μέγιςον διαιρέτην εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Τεθείσθωσαν ȣ̃τως ὑπάλληλοι αἱ ποσότητες, ὡς ἀντιςοιχεῖν, εἰ οἷόν τε, τὰ κοινὰ ἀμφοῖν γράμματα· β΄. διῃρήσθω ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ὕπερθεν διὰ τȣ̃ πρώτȣ τῆς ὑποκειμένης, ἕως ἂν ὁ δείκτης τȣ̃ διαιρετέȣ ὅρȣ ἐλάττων γένηται τȣ̃ κατὰ τὸν διαιρέτην, ἢ γȣ̃ν ἰσωθῇ·

*) Εὐξύνετον πάνυ ȣ̓δὲ δείξεώς ἐςι χρῆζον μηδεμιᾶς τȣ̃το· τοῖς ȣ̃ν πρωτοπείροις ληπτέον ἀριθμητικὰ ὑποδείγματα πλεῖςα εἰς κατάληψιν τῆς καθολικῆς ἀληθείας· εἰ γὰρ τὸν 6 ὁ 3 διαιρεῖ, δῆλον ὅτι ϗ τὸν τȣ̃ 6 πολλαπλȣ̃ν 18, ϗ τὸν 24, ϗ τὸν 30. κτ.

γ΄. διῃρήσθω ὁ διαιρέτης διὰ τȣ̃ ἐκ ταύτης τῆς διαιρέσεως καταλοίπȣ, ϗ τȣ̃το, εἰ τύχοι, διὰ τȣ̃ δευτέρȣ λειψάνȣ, ϗ ȣ̆τως ἑξῆς, μέχρις ἂν γένηται ἀκριβής τις διαίρεσις, ἧς ὁ διαιρέτης ἔςαι ὁ ζητȣ́μενος μέγιςος ϗ κοινὸς διαιρέτης.

68. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὶν ἢ δὲ τῆς πράξεως ἐφάψασθαι παρατηρητέον ταῦθ' ἅπερ ȣ̉κ ἔςιν εἰπεῖν ὅσον ἐξευμαρίζει τὸ ἔργον· ά. Ὅταν ποσότης καθολικὴ πολυώνυμος ἅπασι τοῖς ἑαυτῆς ὅροις γράμματι ἔχῃ ἐγκείμενον, δῆλον ὅτι γίνεται ὑπ' ἐκείνȣ τȣ̃ γράμματος ϗ τῶν ἄλλων αὐτῆς ὅρων· ȣ̆τως $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta=\alpha\times(\beta+\gamma+\delta)$ ὡς καθ' ἑαυτὸ καταφανές· β΄. Ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν δυεῖν ποσοτήτων ἤτοι πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ ποσότητος τὴν ἑτέραν μὴ διαιρȣ́σης, μηδὲ κοινὸν αὐτῇ διαιρέτην ἐχȣ́σης, ὁ μέγιςος ϗ κοινὸς αὐτῶν διαιρέτης ȣ̉ τρέπεται· αβ φέρε ϗ αγ κοινὸν ἔχȣσι διαιρέτην α· ἐὰν ȣ̂ν αβ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ δ, τὸ γινόμενον αβδ ϗ αγ τὸν αὐτὸν κοινὸν ἕξȣσι διαιρέτην α· ἐὰν μέντοι αβ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ποσότητα, ἣ διαιρεῖ τὴν αγ, ἐπὶ γ φέρε, τὸ γινόμενον αβγ, ϗ αγ ἕξȣσι τηνικαῦτα κοινὸν διαιρέτην αὐτὸ τὸ αγ· ὡσαύτως ἐὰν αβ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ποσότητα ἔχȣσαν κοινὸν τῇ αγ ποιητὴν ἕνα, εἴτ' ȣ̂ν ἐπὶ γδ, ϗ ȣ̆τω τρέψεται ὁ κοινὸς διαιρέτης· τῆς γὰρ ποσότητος αβγδ ϗ αγ ἔςαι πάλιν κοινὸς διαιρέτης αγ.

69. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν δῆλον, ά. ὡς εἰ θηρευομένοις τὸν μέγιςον κοινὸν δυεῖν ποσοτήτων διαιρέτην ἐν ταῖς ἐπαναλαμβανομέναις διαιρέσεσιν ἀπαντήσει διαιρετέος, ἢ διαιρέτης, ἔχων ποιητὴν, ὃν διαιρέτην, ὃν ȣ̉κ ἔχει ὁ ἕτερος, ἀδεῶς τȣ̃τον τὸν ποιητὴν ἀποβαλεῖν δυνάμεθα· β΄. δυνάμεθα πολλαπλασιάσαι τὴν ἑτέραν τῶν

ποσοτήτων ἐφ' ἥντιναοῦν ποσότητα, ἥτις οὐ διαιρεῖ τὴν ἑτέραν, οὔτε κοινὸν αὐτῇ ἔχει διαιρέτην· κατὰ ταῦτα τοίνυν κείσθω εὑρεῖν τὸν μέγισον καὶ κοινὸν διαιρέτην τῆς αα — 3αβ + 2ββ καὶ αα — αβ — 2ββ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Α΄.

α΄. διαιρετέος	α΄. διαιρέτης
αα — 3αβ + 2ββ	αα — αβ — 2ββ
— αα + αβ + 2ββ	1 α΄. πηλίκ.
α΄. λείψ. — 2αβ + 4ββ	

δεῖ τοίνυν διελεῖν αα — αβ — 2ββ διὰ — 2αβ + 4ββ· ἐπεὶ μέντοι ὁ διαιρέτης ἔχει ποιητὴν τὸν 2β, ὃς οὐκ ἔσι καὶ πάντων τῶν τοῦ διαιρετέου ὅρων, ἀπεῤῥίφθω μὲν ὁ 2β ἐκ τοῦ διαιρέτου, διῃρήσθω δὲ αα — αβ — 2ββ διὰ — α + 2β

β΄. διαιρετέος	β΄. διαιρέτης
αα — αβ — 2ββ	— α + 2β
— αα + 2αβ	— α — β. β΄. πηλ.
+ αβ — 2ββ	
— αβ + 2ββ	
λείψ. . . . 0	

κοινὸς ἄρα καὶ μέγισος διαιρέτης ἔσαι — α + 2β

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄.

$5\alpha^3 - 18\alpha^2\beta + 11\alpha\beta^2 - 6\beta^3 \mid 7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$

ἐπείπερ ὁ 5 οὐκ ἔσι δὶ 7 διαιρέσιμος, ὅ,τε 7 οὐκ ἔσι ποιητὴς πάντων τῶν τοῦ διαιρέτου ὅρων, πολλαπλασιασέον τὴν διαιρετέαν ποσότητα ἐπὶ 7 καὶ δὴ ἔσαι

ά. διαιρετέος	ά. διαιρέτης
$35\alpha^3 - 126\alpha^2\beta + 77\alpha\beta^2 - 42\beta^3$	$7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$
$-35\alpha^3 + 115\alpha^2\beta - 30\alpha\beta^2$	5α. ά. πηλ.
ά. λείψ. $-11\alpha^2\beta + 47\alpha\beta^2 - 42\beta^3$	

δυνάμεθα ἔτι τό λείψανον διελεῖν διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ διαιρέτȣ, πολλαπλασιάσαντες αὐτὸ ἐπὶ 7, ϗ ἐκκρȣ́σαντες αὐτȣ̃ τὸν ποιητὴν β

β΄. διαιρετέος	β΄. διαιρέτης
$-77\alpha^2 + 329\alpha\beta - 294\beta^2$	$7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$
$+77\alpha^2 - 253\alpha\beta + 66\beta^2$	-11. β΄. πηλ.
β΄. λείψ. . . . $+76\alpha\beta - 228\beta^2$	

δεῖ τοίνυν διελεῖν $7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$ διὰ $76\alpha\beta - 228\beta^2$, μᾶλλον δὲ διὰ $\alpha - 3\beta$, ἐκκρȣσθέντος τȣ̃ ποιητȣ̃ 76β· τοιγαρȣ̃ν

γ΄. διαιρετέος	γ΄. διαιρέτης
$7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$	$\alpha - 3\beta$
$-7\alpha^2 + 21\alpha\beta$	$7\alpha - 2\beta$. γ΄. πηλίκον
$-2\alpha\beta + 6\beta^2$	
$+2\alpha\beta - 6\beta^2$	
λείψ. 0	

ἄρα ὁ κοινὸς διαιρέτης τῶν δυοῖν προτεθέντων ποσῶν ἐςιν $\alpha - 3\beta$. ὅτι δὲ οἱ ȣ̃τως εὑρισκόμενοι διαιρέται κοινοί εἰσι ϗ μέγιςοι, δῆλον· διαιρȣ̃σι γὰρ ἀκριϐῶς, ὡς ἐκ τῆς πράξεως καταφαίνεται, πάντα τὰ ἀλληλοδιάδοχα κατάλοιπα (65)· τȣ̃τον ȣ̃ν τὸν τρόπον εὑρισκομένων τῶν κοινῶν διαιρετῶν δυεῖν ποσοτήτων, πᾶν κλάσμα ἐς τ' ἂν ἐξῇ ἐφ' ἁπλȣ́ςερον σχῆμα μετενεχθήσεται, διαιρȣμένων ἀμέλει ἑκατέρȣ τῶν κατ' αὐτὸ ὅρων διὰ τȣ̃ κοινȣ̃ ϗ μεγίςȣ διαιρέτȣ τȣ̃τε παρονομαςȣ̃ ϗ τȣ̃ ἀριθμητȣ̃· ἐὰν δὲ

τῶν διαιρέσεων ἐπαναλαμβανομένων, ὅροι ἐφεξῆς προέρχωνται πέρατος ἄνευ, πρόδηλον, ὅτι κοινῦ διαιρέτυ ἀμοιρῦσι τὰ προτεθέντα ποσά.

70. Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ μεταμορφωθῆναι δύναται, ἄνευ τινὸς μεταβολῆς τῆς κατ' αὐτὸ δυνάμεως, εἰς $\frac{\alpha\alpha}{\beta\alpha}$, ἢ $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}$, ἢ $\frac{\alpha\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta+\beta\beta}$, ϗ ὕτως ἑξῆς. Τὰ γὰρ ἔχατα ὐδέν εἰσιν ἀλλ' ἢ τὸ πρῶτον, ὖ ἐπολλαπλασιάσθησαν οἱ ὅροι, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἐπὶ α, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἐπὶ γ, ἐν δὲ τῇ τρίτῃ ἐπὶ α+β, ὃ ἥκιϛα μεταλλοιοῖ τὴν ἀξίαν τῦ κλάσματος.

71. Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}$ ἐϛὶ τὸ αὐτὸ τῷ $\frac{\alpha}{\beta}$, ϗ τὸ $\frac{6\alpha^3+3\alpha^2\beta}{12\alpha^3+9\alpha^2\gamma}$ τὸ αὐτὸ ὃ ϗ $\frac{2\alpha+\beta}{4\alpha+3\gamma}$.

72. Ἵν' εἰς ἓν μόνον κλάσμα ἀναχθῇ ποσότης σύνθετος ἐξ ὁλοχερῦς ϗ κλάσματος, πολλαπλασιαϛέον, καθὰ δὴ ϗ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, τὴν ὁλοχερῆ ἐπὶ τὸν παρονομαϛὴν τῦ κλάσματος, ϗ τὸ γινόμενον συναπτέον τῷ ἐν αὐτῷ ἀριθμητῇ, μένοντος τῦ αὐτῦ παρονομαϛῦ· ὕτως ὖν $\alpha+\frac{\beta\delta}{\gamma}$ τραπείη εἰς $\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma}$, ϗ $\alpha+\frac{\gamma\delta-\alpha\beta}{\beta-\delta}$, εἰς $\frac{\alpha\beta-\alpha\delta+\gamma\delta-\alpha\beta}{\beta-\delta}$ $=\frac{-\alpha\delta+\gamma\delta}{\beta-\delta}$

73. Ἵνα δὲ εἰς ὁλοχερῆ ἀναχθῇ, ὅπῃ παρείκοι, κλάσμα συμβολικὸν, διῃρήσθω διὰ τῦ παρονομαϛῦ ὁ ἀριθμητὴς, ὡς κἀν τῇ Ἀριθμητικῇ (146)· ὕτως ἡ μὲν πο-

σότης $\frac{3\alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\delta}{\alpha}$ ἀναχθήσεται εἰς, $3\beta + \gamma + \frac{\gamma\delta}{\alpha}$, ἡ δὲ $\frac{\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta\beta + \gamma\gamma}{\alpha + 2\beta}$ εἰς $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma\gamma}{\alpha + 2\beta}$.

74. Ἵνα κλάσματα δεδομένα συμβολικὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ὁ κανὼν ἔσαι ὁ αὐτὸς, ὃς κᾀν τῇ Ἀριθμητικῇ (181)· ἔστω τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ κλάσματα ἀνάγεται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, πολλαπλασιαζομένων τῶν δυοῖν τοῦ πρώτου ὅρων ἐπὶ δζ, καὶ τῶν τοῦ δευτέρου ἐπὶ βζ, καὶ τῶν τοῦ τρίτου ἐπὶ βδ, ἀποκαθιστάμενα $\frac{\alpha\delta\zeta}{\beta\delta\zeta}$, $\frac{\gamma\beta\zeta}{\beta\delta\zeta}$, $\frac{\varepsilon\beta\delta}{\beta\delta\zeta}$, τὰ δὲ $\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta}$, $\frac{\alpha - 2\gamma}{\alpha - \beta}$, ἀναγόμενα ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, γίνεται τὸ μὲν $\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta}$, τὸ δὲ $\frac{\alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \alpha\beta - 2\beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta}$, πολλαπλασιασθέντων ἑκατέρου μὲν τῶν ὅρων τοῦ πρώτου ἐπὶ $\alpha - \beta$, ἑκατέρου δὲ τῶν τοῦ δευτέρου, ἐπὶ $\alpha + \beta$

75. Οὕτως οὖν παρωνυμίων γενομένων τῶν κλασμάτων, ῥᾴστα γίνεται ἥτε πρόσθεσις αὐτῶν καὶ δὴ καὶ ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαίρεσις, τῶν ἀριθμητῶν ἀμέλει τουτὶ μόνον ὑφισταμένων· ἔστω τῶν δυοῖν κλασμάτων $\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta}$, $\frac{\alpha - 2\gamma}{\alpha - \beta}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἀναγωγῇ γινομένων . . $\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta}$, $\frac{\alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \alpha\beta - 2\beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta}$, τὸ μὲν αὐτῶν ἄθροισμα ἔσεται

$$\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma + \alpha\alpha - 2\,\alpha\gamma + \alpha\beta - 2\,\beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta} =$$

$$\frac{2\,\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\beta - 3\,\beta\gamma + \alpha\alpha}{\alpha\alpha - \beta\beta}\cdot$$ ἡ δ' αὐτῶν διαφορὰ

$$\frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma - \alpha\alpha + 2\,\alpha\gamma - \alpha\beta + 2\,\beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta} =$$

$$\frac{3\,\alpha\gamma - \beta\beta + \beta\gamma - \alpha\alpha}{\alpha\alpha - \beta\beta}$$

76. Ἵνα κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ κλάσμα τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$ πολλαπλασιαθῇ, πολλαπλασιαθήτω ἀριθμητὴς ἐπ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴς ἐπὶ παρονομαστὴν, καθὰ δὴ καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, καὶ δὴ ἔσται $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$· ὡσαύτως $\frac{1}{2}\,\alpha \times \frac{1}{2}\,\beta = \frac{1}{4}\,\alpha\beta$.

77. Ἵνα δὲ διαιρεθῇ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ γενέσθω πολλαπλασιασμὸς $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$ ὡσαύτως $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} : \frac{\gamma+\delta}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} \times \frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta} = \frac{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)}{(\gamma+\delta)\cdot(\gamma+\delta)} = \frac{\alpha\alpha - \beta\beta}{\gamma\gamma + 2\,\gamma\delta + \delta\delta}$· δείξεις δὲ τῶνδε τῶν πράξεων αἱ αὐταί εἰσι ταῖς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ (195. 204).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ γενέσεως τῶν βαθμῶν.

78. Ὁπόταν ποσότης ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλα-

σιαϑῇ, τὸ γινόμενον βαθμὸς τῆς ποσότητος ἐκείνης προσαγορεύεται· αὐτὴ δὲ ἡ ποσότης ῥίζα ἢ πλευρὰ τȣ̃ βαθμȣ̃· ὅτως ȣ̃ν 25 μένέσι βαθμὸς τȣ̃ 5, εἴγε 5 πεντάκις ἰσȣ̃ται τῷ 25· 5 δὲ καλεῖται ῥίζα τȣ̃ 25, καλεῖται δὲ ὁ 5 ϗ βαθμὸς πρῶτος· πᾶσα ἄρα ποσότης ὑπάρχει ϗ ῥίζα, ϗ βαθμὸς πρῶτος πρός γε τȣ̀ς ἀπ' αὐτῆς προελθεῖν δυναμένȣς βαθμȣ̀ς· ϗ τὸ μὲν προκύπτον ἐκ πάσης ποσότητος, ἐφ' ἑαυτὴν πολαπλασιαθείσης, καλεῖται τετράγωνον, ἢ βαθμὸς δεύτερος, τῆς ποσότητος ἐκείνης· τὸ δὲ προκύπτον ἐκ τȣ́τȣ τȣ̃ προκύπτοντος, εἴτ' ȣ̃ν τȣ̃ τετραγώνȣ, ϗ τῆς ῥίζης, ὀνομάζεται κύβος, ἢ τρίτος βαθμὸς, τῆς ποσότητος ἐκείνης· τὸ δὲ ἐκ τȣ̃ κύβȣ ϗ τῆς ῥίζης, τετραγωνοτετράγωνον, ἢ βαθμὸς τέταρτος, ϗ ἐφεξῆς ὅτως· ȣ̓κȣ̃ν ὁ ἀπὸ 3 τετράγωνος ἀριθμὸς ἐςιν 9, εἴγε 3 × 3 = 9· ὁ δ' ἀπὸ 3 κύβος ἐςιν 27· ἐπεὶ 9 × 3 = 27· ὁ δ' ἀπὸ 3 τέταρτος βαθμὸς ἐςιν 81· ϗ γὰρ 27 × 3 = 81 κτ. *)

*) Τοῖς μὲν παλαιοῖς ποσότης πᾶσα τετράγωνος ϗ δύναμις ἤκȣσεν, ὡς ἔςιν ἰδεῖν παρά τε Διοφάντῳ (Βιβ. Α'. Ὁρισμ. Ε'.) ϗ τοῖς ἄλλοις Γεωμέτραις, οἳ ϗ ἐν γραμμαῖς δύνασθαι ἔλεγον τὴν, ἀφ' ἧς τὸ τετράγωνον σημαίνειν ἐβȣ́λοντο. Τοῖς δὲ νεωτέροις καθολικώτερον τȣ̃νομα εἴληπται εἰς τὸ σημαίνειν βαθμὸν πάντα, προςιθεμένων τῶν τακτικῶν ὀνομάτων εἰς δήλωσιν τῆς προκειμένης δυνάμεως, οἷον δύναμις δευτέρα, δύναμις τρίτη κτ. ἐπεὶ δ' ἡμῖν τὸ Δύναμις διʹ ὅλης τῆς ἐν χερσὶ πραγματείας τέτακται εἰς τὸ σημαίνειν τὴν τιμὴν τῶν πραγμάτων, ἣν Λατῖνοι διὰ τȣ̃ valor ἐμφαίνȣσιν, ὅθεν παρῆκται τὸ γαλλικὸν valeur, ἵνα μὴ σύγχυσις τῶν πραγμάτων ἐκ τῶν ὀνομάτων συμβαίνοι, ἐξέςω καλέσαι βαθμὸν τὴν παρ' ἄλλοις δύναμιν.

79. Ο᾽ ἀπὸ 1 τετράγωνος, ϗ ὁ ἀπὸ 1 κῦβος, ϗ ἐν γένει ὅςτις ἐν ἀπὸ 1 βαθμὸς, ἀείποτε ἐςὶ 1· εἴγε 1 πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ 1, ἢ ληφθεῖσα ἅπαξ, ποιεῖ 1· ἰδὲ δὴ ὁ ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνος, ὅς περ ἐπιπολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 1 ποιεῖ αὖθις 1· ἰδὲ δὴ ϗ ὁ κύβος αὐτῆς κτ.

80. ΟΡΙΣΜΟΣ. Α᾽ριθμὸς ὁ ἐτινός ἐςι βαθμὲ ἢ ποσότης ἐκδηλῶν, καλεῖται δείκτης τε βαθμε ἐκείνε· ἔτως ἐν 1 ἐςι δείκτης τε πρώτε βαθμε, 2 ὁ τε τετραγώνε, 3 ὁ τε κύβε, 4 ὁ τε τετάρτε βαθμε κτ.

81. ΣΧΟΛΙΟΝ· Ι῞ν᾽ ὑψωθῇ ποσότης πᾶσα εἰς βαθμὸν ζητέμενον, πεπολλαπλασιάσθω ἐφ᾽ ἑαυτὴν τοσάκις, ὡς ἤδη καταδέδεικται, ὅσων πλὴν μιᾶς μονάδων περιεκτικός ἐςιν ὁ δείκτης· τὸ δὲ ἔσχατον προκύπτον ἔςαι, ὅς τις ἐζητεῖτο, βαθμὸς· οἷον ἵν᾽ ἀρθῇ ὁ 6 ἐπὶ τετράγωνον, ἐπείπερ τετραγώνε δείκτης ἐςὶν ὁ 2, ζητείσθω μόνον ὁ γινόμενος ὑπὸ 6 ϗ 6, ὃς ἔςαι 36, ὁ ζητέμενος τετράγωνος, ἵνα δὲ ὁ αὐτὸς 6 ἐπὶ κύβον ἀρθῇ, ἐπειδὴ κύβε δείκτης ἐςὶν ὁ 3, ζητείσθωσαν δύω γινόμενοι ὑπὸ 6 ϗ 6, ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἔςαι $6 \times 6 = 36$· ὁ δὲ δεύτερος, $36 \times 6 = 216$· ἵνα δὲ ὁ 6 ἐπὶ πέμπτον ἀναχθῇ βαθμὸν, τε κατ᾽ αὐτὸν δείκτε ὄντος 5, τέσσαρες ἑξῆς θηρευθήτωσαν γινόμενοι ὑπὸ τε 6· ὁ δὲ τέταρτος 7776 ἔςαι ὁ ἀπὸ 6 πέμπτος βαθμός.

82. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε᾽πὶ δὲ ποσοτήτων συμβολικῶν μονώνυμος ποσότης ἐπὶ βαθμὸν προτεθέντα ἀρθήσεται ἐπιτομώτερον, ὑψεμένε μὲν τε κατὰ τὴν μονώνυμον συνεργε ἐπὶ τὸν βαθμὸν, πολλαπλασιαζομένε δὲ τε ἐφ᾽ ἕκαςον γράμμα δείκτε ἐπὶ τὸν δείκτην τε προτεθέντος βαθμε.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἐπὶ τὸ ὑψῶσαι ἓν $2\alpha^3\beta^2$ ἐπὶ βαθμὸν τέταρτον, ά. ὑψέσθω ὁ 2 συνεργὸς ἐπὶ τὸν τέταρτον βαθμὸν, ὅς τις ἐςὶ 16· β΄. πολλαπλασιαζέσθω ἐπὶ 4 δείκτην τȣ̃ δ΄. βαθμȣ̃ ὁ ἐπὶ τȣ̃ α δείκτης 3, ὅθεν ἔςαι 12, ϗ ὁ ἐπὶ τȣ̃ β 2, ὅθεν προκύψει 8· ȣ̔́τως ἄρα ὁ ἀπὸ $2\alpha^3\beta^2$ τέταρτος βαθμὸς ἔςι $16\alpha^{12}\beta^8$. τῳ ὄντι δὲ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα (81) τριῶν ἑξῆς γινομένων, ὁ μὲν ἐςὶ $2\alpha^3\beta^2 \times 2\alpha^3\beta^2 = 4\alpha^6\beta^4$, ὁ δὲ $4\alpha^6\beta^4 \times 2\alpha^3\beta^2 = 8\alpha^9\beta^6$. Ὁ δὲ τρίτος, ὃς ἐςιν ὁ ζητȣ́μενος τέταρτος βαθμὸς, ἔςι $16\alpha^{12}\beta^8$, ἡ αὐτὴ ποσότης, ἣ ϗ διὰ τȣ̃ ἐπιτομωτέρȣ κανόνος εὕρηται· ϗ ἐν γένει ἵνα α^ν ἐπὶ τὸν μ ὑψωθῇ βαθμὸν (τῶν μ ϗ ν δείκτας σημαινόντων ἀορίςȣς) ἔςαι $\alpha^{\nu} \times \mu = \alpha^{\nu\mu}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἵν᾽ εὕρωμεν τὸν ἀπὸ αβ κύβον, ἐπεὶ ὁ τȣ̃ ἐπινοȣμένȣ συνεργȣ̃ 1 κύβος ἐςὶ 1 (79), ἐπινοηθήτω αὖθις ὁ αὐτὸς· ἀρκεσθησόμεθα δὲ μόνον πολλαπλασιάσαι τὸν ἑκάςȣ γράμματος δείκτην 1 ἐπὶ 3 δείκτην τȣ̃ κύβȣ· ὅθεν ἔςαι $\alpha^1 \times 3\ \beta^1 \times 3 = \alpha^3\beta^3$· ἐξ ὧν κατάδηλον, ὡς ὅτε ὁ τȣ̃ γράμματος δείκτης ἔςι 1, δυνάμεθα ἐπιθεῖναι αὐτῷ δίχα τȣ̃ ἑτέρȣ τὸν τȣ̃ ζητȣμένȣ βαθμȣ̃ δείκτην.

83. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔςω α ποσότης ἡτισȣ̃ν· οἱ τοίνυν ἀπ᾽ αὐτῆς κατὰ τάξιν βαθμοὶ ἔσονται ά, α^2, α^3, α^4, α^5, α^6 κτ (81). σημειώσειεν ȣ̃ν ἄν τις ἐπὶ τȣ̃δε τȣ̃ τύπȣ τὰ ἐφεξῆς: ὁ ἀφ ἁπάσης ποσότητος τέταρτος βαθμὸς εὑρεθήσεται, πολλαπλασιασθέντος τȣ̃ ἀπ᾽ αὐτῆς τετραγώνȣ ἐφ᾽ ἑαυτὸν· $\alpha^2 \times \alpha^2 = \alpha^4$· τὸ γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ τετραγώνȣ ϗ τȣ̃ κύβȣ ποιήσει τὸν πέμπτον βαθμὸν· $\alpha^2 \times \alpha^3 = \alpha^5$. τὸ δ᾽ ὑπὸ τȣ̃ κύβȣ ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, τὸν ἕκτον, $\alpha^3 \times \alpha^3 = \alpha^6$· ϗ ἐν γένει καθυπέρ-

τερος βαθμὸς ἀπὸ ποσότητός τινος εὑρίσκεται, εἰ πολλαπλασιασθεῖεν δύω ἀπὸ τῆς αὐτῆς ποσότητος ἧττȣς βαθμοὶ, ὧν τὸ τῶν δεικτῶν ἄθροισμα δίδωσι τὸν δείκτην τȣ̃ καθυπερτέρȣ· ἐντεῦθεν ἄρα ἀποφέρεται μέθοδος ἐπίτομος τȣ̃ εὑρίσκειν βαθμὸν μέγαν ἀπὸ παντὸς ἀριθμȣ̃· εὑρήσθω, φέρε, ὁ εἰκοςὸς πέμπτος ἀπὸ 10 βαθμὸς· ἀντὶ ȣ̃ν τȣ̃ εὑρεῖν τέσσαρα ϗ εἴκοσι γινόμενα ἑξῆς κατὰ τὴν γενικὴν μέθοδον, εὑρεῖν ἐξέςαι λαϐόντας ȣ̓ πλεῖν ἢ πέντε γινόμενα ὕτως· $10 \times 10 = 100$, τετράγωνος ἀπὸ 10· $100 \times 100 = 10000$, τέταρτος βαθμὸς· $10000 \times 10000 = 100000000$, ὄγδοος, ὅςτις ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθεὶς ποιήσει τὸν δέκατον ἕκτον· τέλος δ' ȣ̃τος ἐπὶ τὸν ὄγδοον πολλαπλασιασθεὶς, εἶτ' ȣ̃ν $10000000000000000 \times 100000000$ ποιήσει τὸν ζητȣ́μενον εἰκοςὸν πέμπτον.

84. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀφ' ἁπάσης λειπτικῆς ποσότητος τὸ μὲν τετράγωνον ἕξει σημεῖον $+$, ὁ δὲ κύϐος $-$, ὁ δὲ τέταρτος βαθμὸς $+$, ϗ ἐφεξῆς ὡσαύτως, ὅ ἐςιν ἐν γένει „οἱ ἀπὸ ποσότητος λειπτικῆς βαθμοὶ δείκτȣ μὲν „εὐμοιρȣ̃ντες ἀριθμȣ̃ ἀρτίȣ, τὸ $+$, περισσȣ̃ δὲ, τὸ $-$, πρὸ „ἑαυτῶν κεχαραγμένον ἕξȣσι“· ὕτως ȣ̃ν οἱ κατὰ σειρὰν βαθμοὶ ἀπὸ $-a$, ἔσονται $-a$, $+a^2$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, $+a^6$, κτ· Ἐςι δὲ τȣ̃το, ὅτι $+ \times - = -$, ϗ $- \times - = +$ (49, 50)

85. ΠΟΡΙΣΜΑ. βαθμὸς ἅπας, ȣ̃ ὁ μὲν δείκτης ἐςὶν ἀριθμὸς ἄρτιος, τὸ δὲ σύμϐολον ὑπάρχει $+$, ἀείποτε δύω ῥιζῶν ἐςι περιεκτικὸς τῆς μὲν ὑπαρχȣ́σης, λειπȣ́σης δὲ τῆς ἑτέρας· $+a^2$ ȣ̓χ ἧττόν ἐςι τετράγωνον ἀπὸ $+a$, ἢ ἀπὸ $-a$· $+a^4$ ȣ̓δὲν μᾶλλόν ἐςι τετράγωνον ἀπὸ $+a^2$, ἢ ἀπὸ $-a^2$ κτ, ἀλλὰ βαθμὸς λειπτικὸς, ȣ̃ ὁ

δείκτης ἀριθμός ἐςι περιττὸς, οἷον $-\alpha^3$, μίαν μόνην ῥίζον ἔχει λειπτικὴν τὴν $-\alpha$· ὐδεμία γὰρ ἄλλη ποσότης, ἢ $-\alpha$ κυβιζομένη ἀποδίδωσι $-\alpha^3$.

86. Ἵνα κλάσμα ἐπὶ βαθμὸν τινα ὑψωθῇ, ὑψωθήτω ἐπὶ τῦτον ὁ ἀριθμητὴς, εἶθ ὕτως ὁ κατ' αὐτὸ παρονομαςής· ἵν ὖν τετραγωνισθῇ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ α τετράγωνον ἐςιν α^2, τὸ δ' ἀπὸ β, β^2 γεγράφω $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. ἐπιεικῶς γὰρ τὸ ἀπὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τετράγωνον ἐςιν $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$· ἵνα δὲ κυβισθῇ τὸ $\frac{3}{4}$, ἐπεὶ ὁ ἀπὸ 3 μὲν κύβος ἔςιν 27, ἀπὸ δὲ 4, 64, γεγράφθω $\frac{27}{64}$.

87. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σαφές ἐςιν, ὡς ὅταν ὁ πολλαπλασιαςὴς ἐλάττων ᾖ τῆς μονάδος, τὸ γινόμενον ἔςαι ἔλαττον τῦ πολλαπλασιαςέυ· ἡνίκα ἄρα ὑψῦται κλάσμα μονάδος ἔλαττον εἰς βαθμὸν ὑπέρτερον, πολλαπλασιάζεται ἀεὶ ὁ κατώτερος βαθμὸς διὰ τῦτυ τῦ κλάσματος τῦ μονάδος ἐλαττυμένυ· τὸ ἄρα γινόμενον, ὃ παρίςησι τὸν ἀνώτερον βαθμὸν, ἀνάγκη γίνεσθαι ἀεὶ ἔλαττον τῦ κατωτέρυ βαθμῦ· ἰςέον ὖν ὡς ἡ δύναμις κλάσματος ἐλάττονος ἢ μονάδος, ὅσῳ ἐπὶ καθυπερτέρυς βαθμὺς αἴρεται, τοσύτῳ ἐλάττων γίνεται· οἷον τὸ ἀπὸ $\frac{1}{10}$ τετράγωνον ἔςιν $\frac{1}{100}$, ὅ ἐςι δεκάκις ἔλαττον τῦ $\frac{1}{10}$· ὁ δὲ ἀπὸ $\frac{1}{10}$ κύβος ἐςι $\frac{1}{1000}$, ὅ ἐςιν ἑκατοντάκις ἔλαττον τῦ 10 ϗ ἑξῆς ὕτως.

Γένεσις τῶν ἀπὸ πολυωνύμυ ποσότητος βαθμῶν.

88. Ἵνα πολυώνυμος ποσότης ἐπὶ βαθμὸν ἀρθῇ,

ζητηθήτω τὸ γινόμενον, ὃ ἀπαιτεῖ ὁ βαθμὸς (81) ἐκ τῆς ἐκτεθείσης περὶ τοῦ τῶν πολυωνύμων πολαπλασιασμοῦ θεωρίας.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἵνα τετραγωνισθῇ τὸ δυώνυμον $\alpha+\beta$, πεπολλαπλασιάσθω ἐφ' ἑαυτὸ οὕτως: ά. $\alpha+\beta \times \alpha = \alpha\alpha+\alpha\beta$· β΄. $\alpha+\beta\times\beta=\alpha\beta+\beta\beta$· γ΄. γενέσθω ἀναγωγὴ τῶν δυοῖν ὁμοίων ὅρων $\alpha\beta+\alpha\beta$ ἐπὶ τοῦ ὁλικοῦ προκύπτοντος $\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta\beta$· καὶ δὴ τὸ ἀπὸ $\alpha+\beta$ τετράγωνον ἔσται $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. Τὸ δ' ἀπὸ $-\alpha-\beta$ τετράγωνον ἔσται ὡσαύτως $+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, ὅπερ γίνεται, ὅτι $-\times-=+$

Ἀλλὰ γὰρ τὸ ἀπὸ $-\alpha+\beta$, ἢ $+\alpha-\beta$, ἕξει ἀεὶ λειπτικὸν τὸν δεύτερον ὅρον, (ὃ καὶ τοῦτο παρέπεται ἐκ τοῦ περὶ τοῦ τῶν συμβόλων πολλαπλασιασμοῦ κανόνος (37)) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἵνα δὲ τετραγωνισθῇ $\overline{\alpha+\beta+\gamma}$· ά. $\overline{\alpha+\beta+\gamma}\times\alpha=\alpha\alpha+\alpha\beta+\alpha\gamma$· β΄. $\overline{\alpha+\beta+\gamma}\times\beta=\alpha\beta+\beta\beta+\beta\gamma$· γ΄. $\overline{\alpha+\beta+\gamma}\times\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma\gamma$· ἐπὶ οὖν τοῦ ὁλικοῦ τετραγώνου $\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta^2+\beta\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2$ ἀναγωγῆς γενομένης τῶν ὁμοίων ὅρων $\alpha\beta+\alpha\beta$, καὶ $\alpha\gamma+\alpha\gamma$, καὶ $\beta\gamma+\beta\gamma$, ἔσται $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$

89. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τῶν δυεῖν ποσοτήτων τῶν συντιθεισῶν δυώνυμόν τι, ἡ μὲν πρώτη ἀεὶ δύναται παρίστασθαι διὰ τοῦ α, ἡ δὲ διὰ β· ἅπαν ἄρα δυώνυμον παρασταθήσεται διὰ $\alpha+\beta$ παρεκτὸς τῶν $-$ ἢ $+$ συμβόλων. Τὸ ἄρα ἀπὸ $\alpha+\beta$ τετράγωνον $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta\beta$, ὃ κληθήτω Α, παραστήσει ἀεὶ τὸ ἀπὸ παντὸς δυωνύμου τετράγωνον· οὗ ἐπὶ τοῦ Α τύπου παρατηρητέον τὰ ἐ-

ξῆς „Τὸ ἀπὸ δυωνύμȣ ποσότητος τετράγωνον περιέχει „ά. τὸ ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ τετράγωνον (α^2)· β΄. τὸ δι- „πλȣ̃ν γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ πρώτȣ ϗ τȣ̃ δευτέρȣ ὅρȣ ($2\alpha\beta$)· „γ΄. τὸ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ ὅρȣ τετράγωνον ($\beta\beta$)· ὡσαύτως ἐπὶ τȣ̃ τετραγώνȣ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$, τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ τριωνύμȣ $\alpha + \beta + \gamma$, ὃ κληθήτω Β΄. παρατηρητέον, ὅτι περιέχει „ά. τὸ ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ „τετράγωνον (α^2)· β΄. τὸ διπλȣ̃ν γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ „πρώτȣ ϗ τȣ̃ δευτέρȣ ($2\alpha\beta$)· γ΄. τὸ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ „τετράγωνον (β^2)· δ΄. τὸ διπλȣ̃ν γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ πρώ- „τȣ ϗ τȣ̃ τρίτȣ ($2\alpha\gamma$)· έ. τὸ διπλȣ̃ν γινόμενον ὑπὸ „τȣ̃ δευτέρȣ ϗ τȣ̃ τρίτȣ ($2\beta\gamma$)· ς΄. τὸ ἀπὸ τȣ̃ τρίτȣ τετράγωνον (γ^2)."

90. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Προσθεῖναι ἔτι δυνάμεθα, ὅτι τῶν τετραγώνων Α ϗ Β, ὁ μὲν πρῶτος ὅρος (α) τȣ̃ ῥιζικȣ̃ πολυωνύμȣ εἰσάγει ἐν τῷ ὁλικῷ τετραγώνῳ τὸ ἀφ᾽ ἑαυτȣ̃ τετράγωνον (α^2)· ὁ δὲ δεύτερος (β), τὸ διπλȣ̃ν γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ πρώτȣ ϗ τȣ̃ δευτέρȣ σὺν τῷ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ τετραγώνῳ ($2\alpha\beta + \beta^2$)· ὁ δὲ τρίτος (γ), τὸ διπλȣ̃ν γινόμενον ὑπὸ τῶν δυοῖν προτέρων ϗ τȣ̃ τρίτȣ σὺν τῷ ἀπὸ τȣ̃ τρίτȣ τετραγώνῳ ($2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$) ϗ ἑξῆς ὅτως, εἰ πλείȣς τῶν τριῶν τύχοι ἔχον τὸ πολυώνυμον ὅρȣς.

91. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Α᾽ ἤδη δέδεικται ἐπὶ τῶν γραμματικῶν ποσῶν, κρατεῖ ὡσαύτως ϗ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς· θῶμεν γὰρ τὸν ἀπὸ 235 τετράγωνον, ὅσέςι $235 \times 235 = 55225$, Δ· ποιήσωμεν δὲ ἐκ τȣ̃ 235 τόδε τὸ τριώνυμον $200 + 30 + 5$· ἐὰν ὖν λάβωμεν τὸν ἀπὸ 200 τε-

τράγωνον 40000, σὺν τῷ δὶς γινομένῳ ὑπὸ 200 καὶ 30, εἶτ' οὖν 12000, σὺν τῷ ἀπὸ 30 τετραγώνῳ 900, σὺν τῷ δὶς γινομένῳ ὑπὸ τῶν δύω προτέρων ὅρων καὶ τοῦ τρίτου, εἶτ' οὖν 2300, σὺν τῷ ἀπὸ 5 τετραγώνῳ 25, καὶ ταῦτα πάντα συνάψωμεν, εὑρήσομεν ἀκριβῶς 55225 τὸν ἀπὸ 235 τετράγωνον.

40000
12000
900
2300
25
55225

92. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Βραχὺ τὸν νοῦν προσχόντες τῷ, καθ' ὃν τετραγωνίζεται τὸ διώνυμον, τρόπῳ, γνωσόμεθα δι' ὅ,τι τὸ ἀπὸ πολυωνύμου τετράγωνον τὰ εἰρημένα περιέχει μέρη· αὐτὰ δὲ ταῦτα κρατοῦντα νοήσομεν κἀπὶ τῶν κύβων, περὶ ὧν ἐφεξῆς ἐροῦμεν· τετραγωνίζοντες γὰρ $\alpha+\beta+\gamma$· ά. πολλαπλασιάζομεν α ἐπὶ α, ὅθεν προκύπτει α^2· β΄. β ἐπὶ α, καὶ α ἐπὶ β, ὅθεν προκύπτει $2\alpha\beta$· γ΄. β ἐπὶ β, ὅθεν προκύπτει β^2· δ΄. γ ἐπὶ α, καὶ α ἐπὶ γ, ὅθεν προκύπτει $2\alpha\gamma$· ε΄. γ ἐπὶ β καὶ β ἐπὶ $\gamma = 2\beta\gamma$· ς΄. γ ἐπὶ γ, ὅθεν γ^2.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οὐδόλως οὖν χρηστέον πολλαπλασιασμῷ πρὸς ὁντινοσοῦν πολυωνύμου τετραγωνισμόν· ἀρκέσει γὰρ λαβεῖν τετραγωνίζουσι φέρε τὸ $\delta+\gamma+\zeta$ τοὺς εἰρημένους ὅρους· ά. τὸ ἀπὸ δ τετράγωνον δ^2· β΄. τὸ δὶς γινόμενον ὑπὸ δ καὶ γ, εἶτ' οὖν $2\gamma\delta$· γ΄. τὸ ἀπὸ γ τετράγωνον γγ· δ΄. τὸ δὶς ὑπὸ δ καὶ ζ γινόμενον $2\delta\zeta$. ε΄. τὸ δὶς ὑπὸ γ καὶ ζ γινόμενον $2\gamma\zeta$· ς΄. τὸ ἀπὸ ζ τετράγωνον ζζ. Ὡσαύτως δὲ εὑρεθείη ἂν καὶ ἀπὸ παντὸς ἀριθμοῦ ὁ τετράγωνος· εὑρέθη γὰρ ἀνωτέρω ὁ ἀπὸ 235 τετράγωνος λαμβανομένου τοῦ ἀπὸ 200 τετραγώνου κτ. ἀλλ' ἔστι γὰρ ἐπεικῶς ἐν ἀριθμοῖς τὸ οὕτω τετραγωνίζειν μακρῷ ἐργωδέστερον, ἢ τὸ τὸν ἀριθμὸν δι' αὐτοῦ τούτου πολλαπλασιάζειν· ξυντελεῖ μέντοι ἄριστα ἀτέρα τῶν μεθόδων θατέρᾳ εἰς βασανισμόν.

94. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ γενικὴ βάσανος τȣ̃ τετραγωνισμȣ̃ ἐν τῷ διαιρεῖν κεῖται τὸ εὑρεθὲν τετράγωνον διὰ τῆς ῥίζης· ἀνάγκη γὰρ τὸ πηλίκον αὐτὴν ταύτην ὑπάρχειν τὴν ποσότητα· διαιρεθὲν ȣ̃ν $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ διὰ $\alpha + \beta$ ἀποδώσει πάντως πηλίκον $\alpha + \beta$· ὁ δὲ 55225 τετράγωνος ἀριθμὸς διαιρεθεὶς διὰ 235 ἀποδώσει πάντως τὴν ῥίζαν 235.

95. Ἵνα δὲ κυβίσωμεν τὸ διώνυμον $\alpha + \beta$, λαμβάνομεν πρῶτον τὸ ἀπ' αὐτȣ̃ τετράγωνον $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ὃ πολλαπλασιάζομεν εἶτα ἐπὶ $\alpha + \beta$. (81), ἐξ ȣ̃ πρόεισιν $\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta + \beta^3$· ἀναγωγῇ δὲ τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$, Μ.

96. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. $\alpha + \beta$ ἐμφαίνειν δυναμένȣ ἅπαν διώνυμον, ἐκτὸς τῆς τῶν συμβόλων ἐνδεχομένης διαφορᾶς, ὁ ἀπ' αὐτȣ̃ ἄρτι εὑρημένος κύβος Μ, τύπος ἔςαι καθολικὸς, πάντα ἀπὸ δυωνύμȣ παριςὰς κύβον· ἐν γένει ἄρα „ἅπας δυωνύμȣ κύβος περιέχει, ά. τὸν ἀπὸ τȣ̃ πρώ„τȣ ὅρȣ κύβον (α^3)· β΄. τὸ τρὶς τετράγωνον τὸ ἀπὸ τȣ̃ „πρώτȣ ὅρȣ ($3\alpha^2$) πολλαπλασιαϑὲν ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅ„ρον (β)· γ΄. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ πρώτȣ, ϗ τȣ̃ „ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ τετραγώνȣ ($3\alpha\beta^2$)· δ΄. τὸν ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ κύβον (β^3).

97. Ταυτὸν δὲ κρατεῖ κἀπὶ τῶν ἀριθμῶν· κυβίσωμεν γὰρ, φέρ' εἰπεῖν, τὸν 25, ταυτὸν εἰπεῖν, πολλαπλασιάσωμεν 25 ἐπὶ 25 εἰς εὕρεσιν τȣ̃ ἀπ' αὐτȣ̃ τετραγώνȣ, εἶτα δὲ τὸν 625 τετράγωνον ἐπὶ 25· προκύψει ȣ̃τω κύβος ἀπὸ 25 ὁ 15625· διέλωμεν ȣ̃ν νῦν δίχα τὸν 25 κατὰ τὰ δυώνυμα ȣ̃τως 20 + 5· φημὶ δὴ, ὡς εἰ λάβωμεν ά. τὸν ἀπὸ 20 κύβον, εἶτ' ȣ̃ν 8000· β΄. τὸν τρὶς γι-

8000
6000
1500
125
15625

νόμενον ὑπὸ τȣ̃ ἀπὸ 20 τετραγώνȣ, ϗ τȣ̃ δευτέρȣ ὅρȣ 5, εἴτ' ȣ̃ν 6000· γ΄. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ ἀπὸ 5 τετραγώνȣ ϗ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ 20, εἴτ' ȣ̃ν 1500· δ΄. τὸν ἀπὸ 5 κύβον, εἴτ' ȣ̃ν 125, προσθέσει πασῶν τῶνδε τῶν ποσοτήτων ἀποληψόμεθα ἀκριβῶς τὸν προειρημένον κύβον 15625.

98. Κυβισμȣ̃ βάσανος. Ὁ εὑρεθεὶς κύβος διῃρήσθω διὰ τῆς ποσότητος, ἣ ἐκυβίσθη, ὅθεν ἀνάγκη προελθεῖν τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον· τȣτὶ δὲ ἐπιδιῃρήσθω ἔτι διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ὅθεν ἀνάγκη προελθεῖν αὐτὴν τὴν διαιρȣ̃σαν ποσότητα· ȣ̔́τως ȣ̃ν 15625, διαιρεθεὶς διὰ 25, δίδωσι τὸν ἀπ' αὐτȣ̃ τȣ̃ 25 τετράγωνον 625, ὃς διαιρεθεὶς ἔτι δι' 25 ἀποδίδωσιν αὐτὸν τὸν διαιρέτην 25.

99. ΠΟΡΙΣΜΑ. Γνωςȣ̃ τοίνυν ὄντος διὰ τȣ̃ γενικȣ̃ τύπȣ Μ, ȣ̔́ς τινας ὅρȣς παράγει πᾶν κυβιζόμενον διώνυμον, ἀφεξόμεθα τȣ̃ ζητεῖν δύω ἑξῆς γινόμενα· ἵνα γὰρ ἰδιαίτερον τὸ $\pi + \kappa$ διώνυμον ἐπὶ κύβον ἄρωμεν, ληψόμεθα μόνον, ȣ̔̀ς δέδεικται ἐπάναγκες περιέχειν ὅρȣς, ἀμέλειτοι, ά. τὸν ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ π κύβον π^3· β΄. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ π τετραγώνȣ π^2, ϗ τȣ̃ δευτέρȣ κ, εἴτ' ȣ̃ν $3\pi^2\kappa$· γ΄. τὸ τρὶς ὑπὸ τȣ̃ πρώτȣ, ϗ ὑπὸ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ τετραγώνȣ γινόμενον $3\pi\kappa^2$· δ΄. τὸν ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ κύβον κ^3.

100. Ἵνα δὲ κυβισθῇ τὸ τριώνυμον $\alpha+\beta+\gamma$, ληφθὲν τὸ ἀπ' αὐτȣ̃ τετράγωνον $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$, πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ $\alpha+\beta+\gamma$· ἀναγωγῇ δὲ τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρεθήσεται $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta^2\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta\gamma^2+\gamma^3$, Ρ, κύβος ὁ ἀπὸ τȣ̃ $\alpha+\beta+\gamma$ τριωνύμȣ· ȣ̓κȣ̃ν ἐν τῷ Ρ κύ-

βῳ τῷ ἀπὸ παντὸς τριωνύμȣ $\alpha+\beta+\gamma$ παρὰ τȣ̀ς ἐν τῷ δυωνύμῳ $\alpha+\beta$ ἀπαιτȣμένȣς ὅρȣς, περὶ ὧν ἤδη εἴρηται, ἐνυπάρχȣσιν ἔτι ά. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τȣ͂ ἀπὸ τȣ͂ $\alpha+\beta$ διωνύμȣ τετραγώνȣ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, ϗ τȣ͂ τρίτȣ ὅρȣ γ, εἴτ' ȣ͂ν $3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta^2\gamma$· β΄. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ $\alpha+\beta$ ϗ τȣ͂ ἀπὸ γ τετραγωνȣ, εἴτ' ȣ͂ν $3\alpha\gamma^2+3\beta\gamma^2$· γ΄. ὁ ἀπὸ γ κύβος γ^3.

101. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τȣ͂ τύπȣ Ρ συνάγεται, „ὅτι ἐν τῷ κυβισμῷ πολυωνύμȣ παντὸς $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ „κτ. ὁ μὲν πρῶτος ὅρος α συνεισάξει τὸν ἀφ' ἑαυτȣ͂ κύβον „α^3, ἐν γένει δὲ ἕκαςος ἑπόμενος συνεισάξει τὸ ἀπὸ πάν- „των ἅμα τῶν ἡγησαμένων ὅρων τριπλȣ͂ν τετράγωνον πολ- „λαπλασιαϑὲν ἐπὶ αὐτὸν τȣ͂τον τὸν ἑπόμενον σὺν τῷ „τρὶς γινομένῳ ὑπὸ τῶν δε τῶν ἡγησαμένων ὅρων καὶ „τȣ͂ ἀπὸ τȣ͂ ἑπομένȣ τετραγώνῳ, σὺν τῷ ἀπὸ τȣ͂δε τȣ͂ ἑ- „πομένȣ κύβῳ."

102. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἵνα ἄρα ἐπὶ κύβον ὑψώσωμεν ἅπαν πολυώνυμον, ληψόμεθα τȣ̀ς ὅρȣς, ȣ̔̀ς ἕκαςος τῶν τȣ͂ πολυωνύμȣ ὅρων συνεισενεγκεῖν ὀφείλει.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἵν' εὕρωμεν τὸν ἀπὸ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ κύβον, ὁ μὲν πρῶτος ὅρος α συνεισενέγκαι ὀφείλει α^3· ὁ δὲ β, $3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$· ὁ δὲ γ, ά. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τȣ͂ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ τετραγώνȣ, τȣ͂ ἀπὸ τȣ͂ $\alpha+\beta$ διωνύμȣ, ϗ αὐτȣ͂ τȣ͂ τρίτȣ γ· ὅ ἐςι, $3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta\gamma^2$· β΄. τὸ τρὶς ὑπὸ $\alpha+\beta$ ϗ γ^2 γινόμενον $3\alpha\gamma^2+3\beta\gamma^2$· γ΄. τὸν ἀπὸ γ κύβον γ^3· ὁ δὲ τέταρτος δ, ά. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τȣ͂ τετραγώνȣ τȣ͂ ἀπὸ τȣ͂ τριωνύμȣ $\alpha+\beta+\gamma$, ϗ τȣ͂ δ, εἴτ' ȣ͂ν $3\alpha^2\delta+6\alpha\beta\delta+3\beta^2\delta+6\alpha\gamma\delta+6\beta\gamma\delta+3\gamma^2\delta$· β΄. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ $\alpha+\beta+\gamma$ ϗ δ, εἴτ' ȣ͂ν $3\alpha\delta^2+3\beta\delta^2+3$

$\gamma\delta^2$· γ΄. τὸν ἀπὸ δ κύβον δ^3, ϗ ὅτως ἑξῆς, εἰ πλείες, ἢ τέσσαρας, τύχοι ἔχον ὅρες τὸ πολυώνυμον.

103. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν γένει δὲ βελομένοις πολυωνυμόντι ἐπὶ βαθμὸν τὸν τυχόντα ἐπᾶραι τῷ λαβεῖν δίχα πολλαπλασιασμε̃ τὲς ἀπαιτεμένες ὅρες, γνωσόμεθα, ὅ,τι σύμβολον ἀπονεμε̃μεν ἑκάςῳ τῶν τε̃ βαθμε̃ ὅρων ἐκ τῶνδε „ἐὰν μὲν πάντες οἱ τῆς ῥίζης ὅροι ὦσιν ὑπαρκ„τικοὶ ϗ πάντες ἔτι οἱ τε̃ βαθμε̃ ὅροι ὑπαρκτικοὶ ἔσονται, „εἴγε $+\times+=+$· ἐὰν πάντες ἔχωσι τὸ —, οἱ τε̃ βαθμε̃ „ὅροι ἀρτιαρίθμε μὲν ἐυμοιρε̃ντος δείκτε, ὑπαρκτικοὶ ἔ„σονται πάντες, περισσαρίθμε δὲ, λειπτικοὶ· ὅτως ο̃ν οἱ ἀπὸ τε̃ $-\alpha-\beta$ δυωνύμε βαθμοὶ ἔσονται ά. $-\alpha^1-\beta^1$ β΄. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$· γ $-\alpha^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-\beta^3$· δ΄. $\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$ κτ. ῥᾷςα δὲ κατανοεῖται, ὅτι τοδὶ παρέπεται ἐκ τε̃ γίνεσθαι $-\times-=+$, ϗ $-\times+=-$.

104. Ἀλλὰ γὰρ εἰ ἡ ῥίζα ἐυμοιροίη ἀναμὶξ ὑπαρκτικῶν τε ϗ λειπτικῶν ὅρων, ἅπαντες οἱ τε̃ βαθμε̃ ὅροι, οἷς ἐνυπάρχει ὁ λειπτικὸς μετ' ἀρτίε δείκτε, ἔσονται ὑπαρκτικοὶ· λειπτικοὶ δὲ, εἰ ὁ δείκτης περισσεύει· καταφαίνεται δὲ τε̃το ἐκ τῶν ἑξῆς ἀπὸ $\alpha-\beta$ βαθμῶν· ά· $\alpha^1+-\beta^1$ · β΄. $+\alpha^2-2\alpha\beta^1+\beta^2$. γ΄. $+\alpha^3-3\alpha^2\beta^1+3\alpha\beta^2-\beta^3$, κτ. Ἐξαιρεῖται μέντοι ἐντεῦθεν ὁ ὅρος βαθμε̃, ᾧ ἐναπαντῶνται δύω ῥιζικοὶ λειπτικοὶ ὅροι μετὰ περισσε̃ ἑκάτερος δείκτε· ἑκατέρε γὰρ λειπτικε̃ ὄντος τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον ἀναγκαίως ὑπαρκτικὸν ἔςαι· τε̃ γὰρ ἀπὸ $\alpha-\beta-\gamma$ τετραγώνε $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$, ὁ πέμπτος ὅρος, γινόμενος ὑπὸ -2β ϗ $-\gamma$ ἐςὶν ὑπαρκτικὸς $+2\beta\gamma$.

105. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Σαφὲς δὲ, ὡς ἵνα πολυω-

νυμόντι ἐπὶ τέταρτον ἀρθῇ βαθμὸν, ζητητέον τὸν ἀπ' αὐτῦ κύβον, ὃν πολλαπλασιαςέον ἐπὶ τὴν αὐτὴν ῥιζικὴν ποσότητα· ἢ γῦν ἐπιτομώτερον, τὸ ἀπ' αὐτῆς τετραγωνιςέον τετράγωνον (83)· ὡσαύτως δὲ ϗ ἐπὶ τῶν καθυπερτέρων βαθμῶν.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἐν γένει δὲ σημαίνεται ἡ πάσης ποσότητος ἐπὶ τὸν τυχόντα βαθμὸν ἔξαρσις, γραφομένης ἐπ' αὐτῆς εὐθείας, ἧς πρὸς δεξιὰν ἐπιχαράσσεται ὁ τῦ βαθμῦ δείκτης· ὕτως ῦν $\overline{\alpha+\beta}^2$ τὸ τετράγωνον ἐμφαίνει τὸ ἀπὸ $\alpha+\beta$· εἰώθασι δὲ ϗ ὕτως αὐτὸ σημειῦν $(\alpha+\beta)^2$· ἡ δ' ἔκθεσις $\overline{25}^3=15625$, δηλοῖ, ὅτι ὁ ἀπὸ 25 κύβος ἰσῦται τῷ 15625.

Μέθοδος γενικὴ τῦ εὑρίσκειν ἅπαντας τὺς βαθμὺς τὺς ἀπὸ παντὸς πολυωνύμυ.

106. Ἔςωσαν οἱ ἀπὸ $\alpha+\beta$ εὑρεθέντες κατὰ τὴν ἤδη γενομένην θεωρίαν βαθμοὶ

Α' $1\alpha^1+1\beta^1$

Β' $1\alpha^2+2\alpha^1\beta^1+1\beta^2$

Γ' $1\alpha^3+3\alpha^2\beta^1+3\alpha^1\beta^2+\beta^3$

Δ' $1\alpha^4+4\alpha^3\beta^1+6\alpha^2\beta^2+4\alpha^1\beta^3+\beta^4$

ἐξέςαι ῦν παραθέσει τῶν διαφερόντων τῶνδε βαθμῶν σημειῶσαι τὰ ἑξῆς.

107. α'. Βαθμὸς ἅπας δυωνύμυ ποσῦ περιέχει τόσυς ὅρυς σὺν ἑνὶ, ὅσας περιέχει ὁ τύτυ δείκτης μονάδας· Ὁ μὲν γὰρ πρῶτος ἀπὸ $\alpha+\beta$ περιέχει ὅρυς δύω, ὁ δὲ δεύτερος τρεῖς, ὁ δὲ τρίτος τέσσαρας κτ.

108. β'. Ὁ πρῶτος ὅρος α τῆς δυωνύμυ ῥίζης μονά-

ζει ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν τοῦ βαθμοῦ ὅρων· ὁ δὲ δεύτερος β μονάζει ἐν τέλει· πάντες δὲ οἱ μεσολαβοῦντες ὅροι εἰσὶ γινόμενα ὑπὸ α καὶ β.

109. γ'. Οἱ κατὰ διαδοχὴν δεῖκται τοῦ α καὶ β χωροῦσι κατὰ νόμον ἀμετάτρεπτον· οἵτε συνεργοὶ ὡσαύτως, πλὴν ὅτι ὁ τούτων διαφέρει τοῦ τῶν δεικτῶν νόμου.

110. Οἱ μὲν δεῖκται τοῦ α χωροῦσι κατὰ τόνδε τὸν νόμον „ὁ πρῶτος δείκτης τοῦ α ταυτίζεται τῷ τοῦ βαθμοῦ, πάντες δὲ οἱ λοιποὶ μέχρι τοῦ ἐσχάτου, ὃς ἐστι 1, ἐλαττοῦνται ἀεὶ μονάδι· οἱ δὲ τοῦ β χωροῦσι τὴν ἐναντίαν· ὁ μὲν γὰρ πρῶτος τοῦ β δείκτης ἐστι 1, οἱ δὲ λοιποὶ πάντες ἀεὶ μονάδι ἐπαύξονται ἕς γε τὸν ἔσχατον, ὃς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τοῦ βαθμοῦ δείκτῃ.

111. δ'. Περὶ δὲ τοῦ τῶν συνεργῶν νόμου, ὅ, τε „πρῶτος καὶ ἔσχατος εἰσὶ 1· ὁ δὲ δεύτερος ὁ δείκτης ἐστὶ τοῦ βαθμοῦ· ὁ δέ γε τρίτος τὸ πηλίκον ἐστὶ, τὸ προϊὸν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου ὑπὸ τῶν δύω πρώτων δεικτῶν α διὰ τοῦ γινομένου ὑπὸ τῶν δύω πρώτων δεικτῶν τοῦ β· ὁ τέταρτος δὲ, τὸ πηλίκον ἐστὶ τῆς διαιρέσεως τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων δεικτῶν τοῦ α γινομένου διὰ τοῦ ὑπὸ τῶν πρώτων τριῶν τοῦ β, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως"· Τοιγαροῦν τούτων ἅπαξ ἐγνωσμένων τῶν δυοῖν νόμων, εὐχερῶς πάνυ εὑρεθήσεται ὁσισοῦν βαθμὸς ἀπὸ ποσότητος διωνύμου· κείσθω γὰρ εὑρεῖν τὸν πέμπτον ἀπὸ $\alpha+\beta$ βαθμόν· οὐκοῦν οὗτος περιέξει ἀναγκαίως ὅρους ἕξ (107), οἵτινες, τηρουμένου πρῶτον τοῦ κατὰ τοὺς δείκτας νόμου (110), ἔσονται $\alpha^5+\alpha^4\beta^1+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\alpha^1\beta^4+\beta^5$· ἑξῆς ἐκ τοῦ περὶ τῶν συνεργῶν νόμου, ὁ μὲν πρῶτος καὶ ἔσχατος ἔσονται 1 (111), ὁ δὲ τοῦ δευτέρου ὅρου ἔσται 5· ὁ δὲ τοῦ τρίτου ἔσται τὸ γινόμενον 5×4 ὑπὸ τῶν δύω πρώ-

των τȣ̃ α δεικτῶν, διῃρημένον διὰ τȣ̃ 1×2 γινομένȣ ὑπὸ τῶν δύω πρώτων δεικτῶν τȣ̃ β, ὅ ἐςι, συνεργὸς τȣ̃ τρίτȣ ὅρȣ ἔςαι ὁ 10· ὁ δὲ τȣ̃ τετάρτȣ, ἔςαι τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων δεικτῶν τȣ̃ α, διαιρεθὲν διὰ τȣ̃ γινομένȣ ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων τȣ̃ β, εἴτ' ȣ̃ν $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3}$, ὃς ἔςαι ὡσαύτως 10· ὁ δὲ τȣ̃ πέμπτȣ ἔςαι $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5$· ὁ δὲ τȣ̃ ἕκτȣ $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 1$ ὁ ἄρα πέμπτος ἀπὸ $\alpha + \beta$ βαθμὸς ἔςαι $\alpha^5 + 5\alpha^4\beta^1 + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha^1 \beta^4 + \beta^5$.

112. Ἐκ τῶν δε μέντοι τῶν παρατηρήσεων ὁ Νεύτων εὕρατο ἔκθεσιν, ἢ τύπον ἐν γένει συμβολικὸν, ἐν ᾧ πάνυ ἀπόνως ἀναγνοίητις ἂν πάντας ἐξῆς τȣ̀ς ὅρȣς παντὸς ἀπὸ διωνύμȣ πσσȣ̃ βαθμȣ̃, ȣ̓κ ἄντις εἴποι ὅσον ϗ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν, τετραγωνείȣ, κυβικῆς, τετάρτης κτ συμβολικῶν τε ϗ ἀριθμητικῶν, ἐξευμαρίζοντα· καλεῖται δὲ ȣ̓́τος ὁ τύπος διώνυμον τȣ̃ Νεύτωνος.

113. Ἔςω μ δείκτης γενικὸς παντὸς ἀπὸ διωνύμȣ ποσȣ̃ βαθμȣ̃· ἐξ ὧν ȣ̃ν ἀρτίως εἴπομεν πάντας ἐξῆς τȣ̀ς ὅρȣς τȣ̃ βαθμȣ̃ ἐμφαινεῖ ὁ τύπος ȣ̃τος $\alpha^\mu + \mu\alpha^{\mu-1}\beta^1$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1}{1 \times 2} \alpha^{\mu-2} \beta^2 + \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2}{1 \times 2 \times 3} \alpha^{\mu-3} \beta^3$$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \alpha^{\mu-4} \beta^4$$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3 \times \mu - 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \alpha^{\mu-5} \beta^5.$$

$$+\frac{\mu\times\mu-1\times\mu-2\times\mu-3\times\mu-4\times\mu-5}{1\times2\times3\times4\times5\times6}\alpha^{\mu-6}\beta^{6} \text{ κτ.}$$

Ἐπιεικῶς γὰρ ἐν τῷ τετραγωνισμῷ τῦ $\alpha+\beta$ ἀντικαταςάντος ἀντὶ μ τῦ 2 δείκτυ τῦ δευτέρυ βαθμῦ, ὁ γενικὸς τύπος παρέξει $\alpha^2+2\alpha^{2-1}\beta^1+\frac{2\times2-1}{1\times2}\alpha^{2-2}\beta^2$· ὗκῦν ἐπεὶ ἐν τῷ ἐχάτῳ ὅρῳ α^{2-2} ἐςὶν $\alpha^0=$ $=1$ (59), ϗ $\frac{2\times2-1}{1\times2}=1$, ὅλος ὁ ἔχατος ὅρος ἔςαι $1\times1\times\beta^2=\beta^2$· οἱ δὲ τρεῖς ὗτοι ὅροι, οἱ διὰ τῦ γενικῦ εὑρημένοι τύπυ, εἰσὶ τὸ ἀπὸ $\alpha+\beta$ τετράγωνον $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, ταὐτὸν ὅπερ ϗ πρότερον ἄλλως εὕρηται·

Ζητηθήτω δὲ διὰ τῦ γενικῦ τύπυ ϗ ὁ τέταρτος ἀπὸ $\alpha+\beta$ βαθμός· εἰσαχθέντος ὗν 4 ἀντὶ μ τραπήσεται ὁ τύπος εἰς τόνδε $\alpha^4+\alpha^{4-1}\beta^1+\frac{4\times4-1}{1\times2}\alpha^{4-2}\beta^2$ $+\frac{4\times4-1\times4-2}{1\times2\times3}\alpha^{4-3}+\frac{4\times4-1\times4-2\times4-3}{1\times2\times3\times4}$ $\alpha^{4-4}\beta^4$, ὃς δι' ἀναγωγῆς γίνεται $\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$· Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῦ ἕκτυ ὅρυ τῦ γενικῦ τύπυ τεθῇ $\mu=4$, φανήσεται ἅπας ὁ ἀριθμητὴς ὁ καταλήγων ἐς -4 τῦ κλάσματος, ὃ πολλαπλασιάζει τὸ $\alpha^{\mu-5}\beta^5$, γινόμενος 0, ϗ δὴ ϗ ἡ $\alpha^{\mu-5}\beta^5$ ἐξυθενυμένη· ἄρα τῦ τετάρτυ βαθμῦ ὁ ἕκτος ὅρος ἐςὶ μηδὲν, ὅ ἐςιν ὁ ἀπὸ $\alpha+\beta$ τέταρτος βαθμὸς καταλήγει εἰς τὸν πέμπτον τῦ τύπυ ὅρον, ἔνθα τὸ β ἔχει δείκτην τὸν 4.

114. Ἐν Γένει δὲ ἅπαντα βαθμὸν ἀπὸ $\alpha+\beta$ καταλήγειν δεῖ, ἔνθα τὸ β εὑρίσκεται ἔχον τὸν δεἰκτην τῦ βαθμῦ· ἕπεται δὲ τυτὶ ϗ ἐξ ὧν ἔφθημεν εἰπόντες, ὅτι

τὸ μὲν ἀπὸ δυωνύμȣ τετράγωνον ἀεὶ ἔχει ὅρȣς τρεῖς, ὁ δὲ κύβος τέσσαρας κτ.

115. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Καίπερ ὁ ἐκτεθεὶς ἀνωτέρω γενικὸς τύπος ἐς τὸν ἕκτον ἀφικνεῖται μόνον βαθμὸν, ἀπονητὶ ȣ̑ν προαγαγεῖν αὐτὸν δυνάμεθα μέχρις ἅπαντος βαθμȣ̃.

116. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἡνίκα δὲ διαφοραὶ συμβόλων ἐμφιλοχωρῶσι τῷ ῥιζικῷ πολυωνύμῳ, τιθέναι ἔχομεν τὰ ἀνήκοντα ἑκάςῳ ὅρῳ σύμβολα, ἐξ ὧν παρετηρήσαμεν (103).

117. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἔςω τετραώνυμον τό $\alpha+\xi+\pi+\rho$· δυνατὸν ȣ̑ν τȣ̀ς μὲν τρεῖς ὅρȣς $\alpha+\xi+\pi$ ἀντὶ α ἐκλαβεῖν, τὸν δὲ τέταρτον ρ ἀντὶ β. Ἐμφανεῖ ἄρα ȣ̈τως ἐν γένει ἅπαν πολυώνυμον τὸ δυώνυμον $\alpha+\beta$· ϗ δὴ ἡ ἄρτι ἐκδεδομένη μέθοδος, ϗ μὴν ϗ ὁ τȣ̃ Νεύτωνος τύπος ἐφαρμοσθῆναι δύναται παντὶ εἴδει πολυωνύμȣ ποσότητος· κείσθω γὰρ εὑρεῖν τὸ ἀπὸ τȣ̃ τεθέντος τετραωνύμȣ τετράγωνον ȣ̓κȣ̃ν τῶν $\xi+\pi+\rho$ ὅρων ἀνθ' ἑνὸς ληφθέντων ἔςαι πρῶτον $\alpha^2+2\alpha(\xi+\pi+\rho)+(\xi+\pi+\rho)^2=\alpha^2+2\alpha\xi+2\alpha\pi+2\alpha\rho+(\xi+\pi+\rho)^2$· β΄ (τȣ̃ τριωνύμȣ διαιρεθέντος εἰς ξ ϗ $\pi+\rho$) $\alpha^2+2\alpha\xi+2\alpha\pi+2\alpha\rho+\xi^2+2\xi(+\pi+\rho)+(\pi+\rho)^2=\alpha^2+2\alpha\xi+2\alpha\pi+2\alpha\rho+\xi^2+2\xi\pi+2\xi\rho+(\pi+\rho)^2$· γ΄. (τȣ̃ δυωνύμȣ εἰς τȣ̀ς δύω αὐτȣ̃ ὅρȣς π, ρ διαιρεθέντος) $\alpha^2+2\alpha\xi+2\alpha\pi+2\alpha\rho+\xi^2+2\xi\pi+2\xi\rho+\pi^2+2\pi\rho+\rho^2$· ὅπερ ἂν προκύψαι ϗ τȣ̃ τετραωνύμȣ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον εὑρεθείη ἂν ϗ ὁ κύβος ϗ ἅπας ἄλλος βαθμός ἀπὸ παντὸς πολυωνύμȣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ ῥιζῶν ἐξαγωγῆς.

118. Ποσότης, ἀφ' ἧς ὁ βαθμὸς γίνεται, ῥίζα ἤκουσε τοῦ βαθμοῦ ἐκείνου (78)· ῥίζα μὲν τετραγωνική, ἐὰν ὁ βαθμὸς ᾖ τετράγωνον· κυβικὴ δέ, ἣν ᾖ κύβος, καὶ ἑξῆς οὕτως· ὁ οὖν 3 ἐστι ῥίζα μὲν τετραγωνικὴ τοῦ 9, κυβικὴ δὲ τοῦ 27, τετάρτη δὲ τοῦ 81· ὡσαύτως τὸ α ἐστι ῥίζα τετραγωνικὴ μὲν τοῦ $α^2$, κυβικὴ δὲ τοῦ $α^3$ κτ· ἐξαγωγὴ τοίνυν ῥίζης οὐδὲν ἀλλ' ἢ εὕρεσίς ἐστι ποσότητος, ἥτις ὑψωθεῖσα εἰς βαθμὸν ὁμώνυμον τῇ ζητουμένῃ ῥίζῃ ἀπέδωκε τὴν ποσότητα, ἀφ' ἧς ἐξαγεῖν τὴν ῥίζαν πρόκειται· οὕτως ἐξαγαγεῖν ἀπὸ 16 τὴν τετράγωνον ῥίζαν εὑρεῖν ἐστι τὸν 4 ἀριθμόν, ὃς ὑψωθεὶς εἰς τετράγωνον ἐξήνεγκε τὸν 16.

119. Ἡ πάσης ῥίζης ἐξαγωγὴ σημαίνεται τῷ $\sqrt{}$, ὃ παρὰ τοῦτο ῥιζικὸν σύμβολον ἤκουσεν, ἐφ' οὗ γράφεται ἀριθμός, τὸν βαθμὸν τῆς ῥίζης ἐμφαίνων, ὃς καλεῖται ἐπίσημον *)· ἐπίσημον οὖν τῆς τετραγωνείου ῥίζης ἐστὶ 2, τῆς δὲ κυβικῆς 3, καὶ οὕτως ἑξῆς· οὕτω $\sqrt[3]{64}$

*) Οὕτω καλέσαι μοι ἔδοξε τὸν ἐπὶ τοῦ ῥιζικοῦ συμβόλου τιθέμενον ἀριθμόν, ἀντιδιαστέλλοντι αὐτὸν τοῦ ἐπὶ τῶν βαθμῶν, ὃς δείκτης ἡμῖν ὠνόμασται· ὅσον δὲ τουτὶ ἐξευμαρίσει τὰς παντοίας τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων ἐκφράσεις, προϊοῦσι δῆλον γενήσεται.

τὴν κυβικὴν ἐμφαίνει ῥίζαν τȣ̃ 64· μηδενὸς δὲ ἐπόντος τῷ ῥιζικῷ συμβόλῳ ἐπισήμȣ, ἐξαγωγὴ ἐννοεῖται τῆς τετραγωνείȣ ῥίζης· $\sqrt{25}$ ταυτὸν δηλοῖ τῷ $\sqrt[2]{25}$ ϗ $\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\sqrt[\mu]{\alpha}$ ἐν γένει δηλȣ̃σι τὰς ν, μ ῥίζας τῆς α ποσότητος.

120. Βαθμὸς τέλειος μὲν ὀνομάζεται ἡ ποσότης, ἥτις παράγεται ἀκριβῶς ἀπὸ ποσότητος ἑτέρας ὑψωθείσης ἐπ' αὐτὸν τὸν βαθμόν· 25 φέρ' εἰπεῖν ὑπάρχει τετράγωνος τέλειος· ἀλλ' ὁ αὐτὸς 25 ὑπάρχει κύβος ἀτελὴς, εἴγε ȣ̓δεὶς ὑπάρχει ἀριθμὸς ȣ̓́τε ὁλοχερὴς, ȣ̓́τε, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς φανήσεται, κλασματίας, ὃς ἂν κυβισθεὶς δυνηθείη παραγαγεῖν τὸν 25.

121. Ἐντυχόντες ȣ̃ν βαθμῷ ἀτελεῖ, ȣ̃ τὴν ῥίζαν θηρώμεθα, ἀρκεσθησόμεθα μόνον σημήναντες τὴν ἐξαγωγὴν ȣ̔́τω, φέρε, $\sqrt[3]{25}$· ἢ γȣ̃ν ἐξαγαγόντες αὐτόθεν, δι' ἧς αὐτίκα ἀποδώσομεν μεθόδȣ, ῥίζαν ὅσον ἄντις βȣ́λοιτο ἐγγίζȣσαν τῇ ἀληθεῖ, εἰς ὑπολογισμȣ̃ ἀκρίβειαν.

122. Ἐπειδὴ δὲ ὑψȣμένȣ παντὸς μονωνύμȣ εἰς βαθμὸν, πρῶτον μὲν ἐπ' αὐτὴν αἴρεται ὁ συνεργὸς, εἶτα ὁ ἐφ' ἑκάςȣ γράμματος δείκτης πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν δείκτην τȣ̃ βαθμȣ̃ (82)· ἐπανάγκες τȣ̓ναντίον ἐξαγαγεῖν μὲν τȣ̃ συνεργȣ̃ ῥίζαν, διελεῖν δὲ τὸν παντὸς γράμματος δείκτην διὰ τȣ̃ τῆς ῥίζης ἐπησίμȣ τὴν μονωνύμον θηρωμένοις ῥίζαν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἵν' ἐξαγάγωμεν ȣ̃ν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τȣ̃ $9\alpha^4\beta^2$, πρῶτον λαμβάνομεν τὴν τȣ̃ 9 τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἥτις ἐςὶ 3, εἶτα διαιρȣ̃μεν διὰ 2

ἐπισήμου τετραγωνικοῦ τοὺς 4, 2 δείκτας, ὅθεν ἐξίασι πηλίκα 2, 1 εὑρίσκομεν οὖν οὕτω $3α^2β$ ῥίζαν τετραγωνικὴν τοῦ $9α^4β^2$.

123. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἥτε γένεσις τῶν βαθμῶν, καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν, δύο οὖσαι ἀντικείμεναι πράξεις, ἑκατέρα εἰς βασανισμὸν ξυντελεῖ τῇ ἑτέρᾳ ἐπίτε συμβολικῶν καὶ ἀριθμητικῶν ποσοτήτων· εὑρεθείσης γὰρ ἀνωτέρω ῥίζης τεραγωνικῆς $3α^2β$ τοῦ τετραγώνου $9α^4β^2$, τετραγωνίσαντες αὖθις τὴν αὐτὴν ῥίζαν, καὶ εὑρόντες τὸ αὐτὸ τετράγωνον $9α^4β^2$, ἀσφαλῶς ἐξῆχθαι τὴν ῥίζαν συνάγομεν· ἢ γοῦν τετραγωνίσαντες τὴν $3α^2β$ καὶ εὑρόντες $9α^4β^2$, ἐξάγοντες ἀπ᾽ αὐτοῦ ῥίζαν καὶ ἀπολαμβάνοντες αὖθις $3α^2β$, γινώσκομεν ὡς ἀσφαλῶς ἐτετραγωνίσθη.

Ἕτερα ὑποδείγματα. Εἰς ἐξαγωγὴν τῆς τοῦ $α^2$ τετραγωνικῆς ῥίζης, ἐπεὶ ἡ ῥίζα τῆς ἐπινοουμένης εἰς συνεργὸν 1 ἐστὶ 1 (79) διαιρετέον τὸν 2 δείκτην τοῦ α διὰ τοῦ 2 ἐπισήμου, ὅθεν προκύπτει 1· οὕτως οὖν ἡ τοῦ $α^2$ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐστὶν $α^1$ ἢ α.

Εἰς ἐξαγωγὴν τῆς τοῦ $8α^6β^9$ κυβικῆς ῥίζης α΄. ἐξακτέον τὴν ῥίζαν τοῦ συνεργοῦ, ἥτις ἐστὶ 2. β΄. διαιρετέον τοὺς δείκτας 6, 9 διὰ τοῦ ἐπισήμου 3· ἔσται οὖν ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα $2α^2β3$.

124. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἡνίκ᾽ ἂν δείκτης μὴ ᾖ διὰ τοῦ ἐπισήμου διαιρέσιμος, σημανθήσεται μόνον ἡ διαίρεσις· ἡ τοίνυν τετραγωνικὴ τοῦ $α^3$ ῥίζα ἔσται $α^{\frac{3}{2}}$· ἡ δὲ τοῦ α κυβικὴ $α^{\frac{1}{3}}$

125. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἡνίκ᾽ ἂν μὴ ἀκριβῶς ἐξάγηται τοῦ συνεργοῦ ἡ ῥίζα, ὑπογραφήσεται πᾶσα ἡ ποσότης τῷ ῥιζικῷ συμβόλῳ.

Ἐπειδή, ἐπὶ βαθμοὺς ὑψοῦντες τὰ κλάσματα αἰ-

ρομεν τόντε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαςὴν (86), τοὐναντίον ἄρα, ἵν' ὑπεξαγάγωμεν κλάσματος τὴν τυχοῦσαν ῥίζαν, λαμβάνομεν τοῦτε ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαςοῦ τὰς ῥίζας· οὕτως οὖν ἵν' εὕρωμεν τὴν τετράγωνον ῥίζαν τοῦ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, ἐξάγομεν τὴν τοῦ α^2 ῥίζαν ἥτις ἐςὶν α, εἶτα τὴν τοῦ β^2, ἥτις ἐςὶ β, καὶ γράφομεν $\frac{\alpha}{\beta}$ ῥίζαν τὴν ζητουμένην· ἵνα δὲ λάβωμεν τὴν τοῦ $\frac{8}{27}$ κυβικὴν ῥίζαν, θηρώμεθα πρῶτον τὴν τοῦ 8, ἥτις ἐςὶ 2, εἶτα τὴν τοῦ 27 ἥτις ἐςὶ 3, καὶ οὕτως ἀπολαμβάνομεν $\frac{2}{3}$ κυβικὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{8}{27}$.

Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς ἐν συμβολικοῖς πολυωνύμοις τετραγωνικῆς ῥίζης.

126. Ἔςω $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$, Α, οὗ προτίθεται τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν· ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ μονωνύμου τετράγωνον ἐςι καὶ αὐτὸ μονώνυμον (82), ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἣ πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν παράγει τὸ Α, ἐξ ἀνάγκης ἔςαι πολυώνυμος· ἀλλὰ τῆς πολυωνύμου ταύτης ῥίζης τετραγωνισθείσης, ὁ πρῶτος ὅρος εἰσήνεγκεν ἀκριβὲς τὸ ἀφ' ἑαυτοῦ τετράγωνον (90)· ἡ ἄρα τετραγωνικὴ τοῦ α^2 ῥίζα α ἔςαι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ῥίζης· ὁ δὲ δεύτερος εἰσήνεγκε τῷ τετραγώνῳ τὸ δὶς γινόμενον ὑπὸ τοῦ πρώτου ὅρου α καὶ τοῦ δευτέρου σὺν τῷ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνῳ· ἐνορῶντες ἄρα τῷ Α πολυωνύμῳ, $2\alpha\beta + \beta^2$, συνάγομεν ὅτι β ἐςὶν ὁ δεύτερος ῥιζικὸς ὅρος· ὁ δέ γε τρίτος εἰσήνεγκε τὸ δὶς γινόμενον

ὑπὸ τῶν δύω πρώτων ϗ τȣ̃ τρίτȣ σὺν τῷ ἀπὸ τȣ̃ τρίτȣ τετραγώνῳ· ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ Α ἔςι $2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$, συμπεραίνομεν ὅτι γ ἐςὶν ὁ τρίτος ὅρος· ἀλλὰ $\alpha + \beta + \gamma$ τετραγωνισθεῖσα ἀποδίδωσι τὸ πολυώνυμον Α, ἀληθῶς ἄρα ἐςιν αὕτη, ἥτις ἐζητεῖτο, ἡ ῥίζα.

127. Περὶ δὲ τῶν προτακτέων μονωνύμȣ, ἢ πολυωνύμȣ ῥίζης, συμβόλων, ἐξέςαι ἐκ τῶν προειρημένων ἐπενεγκεῖν τὰ ἑξῆς· ά. ἅπας μονώνυμος, ἢ πολυώνυμος βαθμὸς, ἀρτιαρίθμȣ εὐμοιρῶν δείκτȣ, ἀναγκαίως περιέχει ῥίζας δύω· α^2 ἔχει ῥίζας τετραγωνικὰς $+ \alpha$, ϗ $- \alpha$ (85)· ὡς δ' αὕτως τετραγωνικὴ ῥίζα τȣ̃ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ȣ̓δὲν ἧττον ἔςιν $\alpha + \beta$, ἢ $-\alpha - \beta$· τȣ̃ δὲ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ ἤτε $+\alpha - \beta$ ϗ $-\alpha + \beta$· ταυτόν ἐςι ῥητέον ϗ περὶ τȣ̃ ἀπὸ δυωνύμȣ τετάρτȣ, ἕκτȣ κτ. βαθμȣ̃· ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τῶν περισσαρίθμȣ δείκτȣ βαθμῶν ταυτὸν ȣ̓ κρατεῖ· κυβικὴ γὰρ, φέρε, ῥίζα τȣ̃ α^3 ἔςι μόνη ἡ $+ \alpha$, ȣ̓κέτι δὲ ϗ ἡ $- \alpha$

128. Ἐν γένει ἄρα „ῥίζης ἀρτιαρίθμῳ ἐμφαινομέ„νης ἐπισήμῳ, πάντες οἱ ὅροι ἀδιαφόρως ἔσονται εἴτε „ὑπαρκτικοὶ, εἴτε λείποντες· βαθμȣ̃ δὲ ἀπὸ δυωνύμȣ „παραγομένȣ ῥίζης, τὰ ὑπαρκτικὰ τοῖς λειπτικοῖς ἀνα„μὶξ ἔχοντος σύμβολα, πρὸς τὸ δοκȣ̃ν ὁ μὲν τῶν ὅρων „τεθήσεται ὑπαρκτικὸς, ὁ δὲ λειπτικός.

129. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σαφὲς ἄρα, ὅτι ἐξαγαγεῖν ἀληθῆ ῥίζαν ȣ̓κ ἔνεςι, τȣ̃ βαθμȣ̃ ἀτελῶς ἔχοντος, (120) ὅπερ γνωσθήσεται παρατηρηθέντων τῶν πολλαπλασιαζόντων, ἢ πολλαπλασιαζομένων ποσῶν, εἰ ἄρα δύναιντο ῥιζικοὶ ὅροι ὑποτεθῆναι, ϗ τȣ̃ πολυωνύμȣ ἀνερευνωμένȣ, εἰ ἄρα περιέχοι ἀληθῶς πάντα τὰ γινόμενα, ἃ δεῖ ἀποδȣ̃ναι πάντας τȣ̀ς ῥιζικȣ̀ς ὅρȣς. Ἐν γένει δὲ τȣ̃ πολυω-

νύμου ἀτελοῦς ὑπάρχοντος βαθμοῦ, ἅλις ἔσται, ὡς εἴθισται, ἐπισημαίνειν τὴν τῆς ῥίζης ἐξαγωγὴν (117).

Ἐξαγωγὴ ῥίζης τετραγώνου ἀριθμητικῆς.

130. Γράφοντες ὑπαλλήλως πάντα τὰ κατὰ τάξιν προκύπτοντα, ἃ περιέχει ὁ ἀπὸ 235 τετράγωνος, ἢ ὁ ἀπὸ 200+30+5 (91) καὶ συνάπτοντες αὐτά, εὑρίσκομεν τὸν 55225 τετράγωνον

Νῦν δέ, καταχωρισθέντων δεξιόθεν ἐπὶ τὰ λαιὰ εἰς κατατομὰς ἀνὰ δύο, τῶν τε κατὰ τὰ γινόμενα χαρακτήρων, καὶ αὐτοῦ τοῦ Δ τετραγώνου, ὡς ἐνταῦθ' ὁρᾶται, τὸν νοῦν προσχόντες τῇ γενομένῃ συνάψει, συναγαγεῖν ἕξομεν τὰ ἐφεξῆς

$$
\begin{array}{r}
\overline{235}^{2} \\
4,00,00 \\
1,20,00 \\
9,00 \\
23,00 \\
,25 \\
\hline
5,52,25.\Delta
\end{array}
$$

ά. 4 ὁ ἀπὸ τοῦ 2 πρώτου ὅρου τετράγωνος περιέχεται ἐν τῇ πρώτῃ πρὸς ἀριστερὰν κατατομῇ τοῦ Δ τετραγώνου κατὰ τὸν μονάζοντα ἀριθμὸν 5

β΄. Τὸ λείψανον 1 τῆς πρώτης τοῦ Δ κατατομῆς σὺν τῇ δευτέρᾳ 52, ἢ 152, περιέχουσι τὸ δὶς γινόμενον ὑπὸ τοῦ πρώτου ῥιζικοῦ ὅρου 2, καὶ τοῦ δευτέρου ῥιζικοῦ ὅρου 3, εἴτ' οὖν 12, σὺν τῷ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου τετραγώνῳ 9, εἴτ' οὖν 129.

γ΄. Ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τῶν πρώτων δύο κατατομῶν, τοῦ ἀπὸ τοῦ πρώτου ῥιζικοῦ ὅρου τετραγώνου σὺν τῷ δὶς ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου γινομένῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνῳ, εἴτ' οὖν ἀφαιρεθέντος τοῦ 529 ἀριθμοῦ, τὸ 23 λείψανον συνάμα τῷ ἐν τῇ τρίτῃ κατατομῇ 25 περιέχει τὸ δὶς γινόμενον ὑπὸ τῶν δυοῖν πρώτων

ῥιζικῶν ὅρων ϗ τῦ τρίτȣ 5 σὺν τῷ ἀπὸ τῦ τρίτȣ τῦδε τετραγώνῳ.

131. Ἐν γένει δὲ „ἐπὶ παντὸς ἀριθμητικῦ τε„τραγώνȣ τὸ κατάλοιπον τῶν προτέρων κατοτομῶν, ἀφ᾽ „ὧν ἀφῄρηται τὰ γινόμενα, τὰ σχετικῶς ἔχοντα πρὸς τȣ̀ς „ἄρτι εὑρημένȣς ῥιζικȣ̀ς ὅρȣς, εἰ δήτι ϗ κατείλειπται, „συνάμα τῇ καταγομένῃ κατομῇ, περιέχει ἀεὶ τὸ δὶς γι„νόμενον ὑπὸ τῶν εὑρεθέντων πρὸ μικρῦ ῥιζικῶν ὅρων, ϗ „τῦ ῥιζικῦ ὅρȣ, τῦ ἀντισοιχῦντος τῇδε τῇ νεωςὶ καταχθεί„σῃ κατομῇ σὺν τῷ ἀπὸ τῦδε τῦ ὅρȣ τετραγώνῳ." Ἐντεῦθεν ἄρα ἐκπηγάζει ἡ ἐφεξῆς μέθοδος.

132. Ἐπ᾽ ἐξαγωγῇ τετραγωνείȣ ἀριθμητικῆς ῥίζης, ά. δίελε τȣ̀ς χαρακτῆρας τῦ ἀριθμῦ εἰς κόμματα ἀνὰ δύω, δεξιόθεν ἐπὶ τὰ ἀρισερὰ προϊών.

β΄. Ἐξάγαγε τὴν ῥίζαν τῦ μεγίςȣ τετραγώνȣ περιεχομένȣ ἐν τῷ πρώτῳ κατὰ τὰ λαιὰ κόμματι, γράψας ὑπ᾽ αὐτὸ τὸ κατάλοιπον, εἴπερ εἴη.

γ΄. Κατάγαγε τȣ̀ς τῦ δευτέρȣ κόμματος χαρακτῆρας, ϗ διὰ τῦ διπλῦ τῆς ἄρτι εὑρημένης ῥίζης δίελε τὸ κατάλοιπον, συνημμένον τῷ κατηγμένῳ κόμματι· διὰ δὲ τῦ εὑρεθέντος πηλίκȣ πολλαπλασίασον τὸ διπλῦν τῆς πρὸ μικρῦ ληφθείσης ῥίζης, ϗ τῷ γινομένῳ σύναψον τὸ ἀπὸ τῦ εὑρεθέντος τῦδε πηλίκȣ τετράγωνον· κἂν μὲν τὸ ἄθροισμα τῦδε τῦ γινομένȣ ϗ τῦδε τῦ τετραγώνȣ μὴ ὑπερέχῃ τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, γράψον εἰς ῥίζαν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον· ἂν δ᾽ ὑπερέχῃ, ἐλάττȣ ἀεὶ τὸ πηλίκον μονάδι, ἕς τ᾽ ἂν τὸ ἄθροισμα μὴ ὑπερκέηται τȣ́των· ἀφελὼν εἶτα τῦ καταλοίπȣ ϗ τῦ καταχθέντος κόμματος τὸ μὴ ὑπερέχον τόδε ἄθροισμα, ὑπόγραψον τὸ καινὸν λείψανον.

δ'. Κατάγαγε τὸ τρίτον κόμμα, ϗ διπλασιάσας τὸ ἄθροισμα τῶν δυεῖν εὑρημένων ῥιζῶν, πράττε ὡς ϗ ἐπὶ τᴕ δευτέρᴕ, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως.

133. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁ πρῶτος πρὸς ἀριςερὰν χαρακτὴρ ἀριθμᴕτινος, ὃς ὑποτίθεται ῥίζα ἄλλᴕ, παραβαλλόμενος πρὸς τὸν δεύτερον, ἐμφαίνει δεκάδας, οἱ δὲ δύω πρῶτοι, παραβαλλόμενοι πρὸς τὸν τρίτον κτ. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐν ἐξαγωγῇ ἁπάσης ῥίζης χρώμενοι γινομένῳτινὶ ὑπὸ τῆς πρὸ μικρᴕ εὑρεθείσης ῥίζης πρὸς εὕρεσιν τᴕ ἐφεξῆς ῥιζικᴕ χαρακτῆρος, ἀπονεμᴕμεν αὐτῇ τὴν δεκάδων δύναμιν, ὑποτιθέντες κατὰ δεξιὰν τὸ ο

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Κείσθω ἐξαγαγεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τᴕ 55225· ά. ᴕν ἐκ δεξιῶν ἐπὶ τὰ λαιὰ χωρῶν δίελε αὐτὸν εἰς κόμματα ἀνὰ χαρακτῆρας δύω ἕκαςον ὡς ἐνταῦθα καταφαίνεται.

β'. Ὁ μέγιςος τετράγωνος περιεχόμενος ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς ἀριςερὰν κόμματι, τῷ 5, ἐςὶν ὁ 4, ᴕ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐςὶ 2· γράψον ᴕν τὸν 2 ἐπὶ τῆς ῥίζης, τὸν δ' ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον 4 ἄφελε τᴕ 5· τὸ δὲ κατάλοιπον 1 ὑπόγραψον τῷ 4

5,52,25	
4	235
152	
129	
2325	
2325	
0	

γ'. Καταγαγὼν τὸ δεύτερον κόμμα γράψον πρὸς δεξιὰν τᴕ καταλοίπᴕ 1· γενήσεται ᴕν 152· διπλασιάσας δὲ τὴν ἄρτι εὑρημένην ῥίζαν 2 (ὑπομνησθεὶς πρῶτον, ὅτι 2 ἐμφαίνει 20 (133), ᴕ τὸ διπλᴕν ἐςι 40) δίελε διά 40 τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ κατηγμένῳ κόμματι, εἴτ' ᴕν 152· τὸ δὲ 3 πηλίκον, πρὶν ἢ προσθῇς ὡς δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης, βασάνισον ᴕτω: πολλαπλασίασον τὸ διπλᴕν τῆς ἄρτι εὑρημένης ῥίζης, εἴτ' ᴕν 40 ἐπὶ 3· ὅθεν

προκύψει 120, ᾧ πρόσθες τὸν ἀπὸ 3 τετράγωνον 9· ϗ ἐπείπερ τὸ 129 ἄθροισμα ἐχ᾽ ὑπερβαίνει τὸ τȣ̃ καταλοίπȣ ϗ τȣ̃ καταχθέντος κόμματος ἄθροισμα 152, τὸν μὲν 3 τίθει ὡς δεύτερον ὅρον τῆς ῥίζης, τὸν δὲ 129 ἀφαίρει τȣ̃ 152, ὅθεν λειφθήσεται 23.

δ΄. Πρὸς δεξιὰν τȣ̃ καταλοίπȣ 23 γράψας τὸν τρίτον ὅρον, ἕξεις 2325· διπλασιάσας δὲ τὴν εὑρημένην ῥίζαν 23, εἶτ᾽ ἓν 230 (133) διὰ 460 δίελε τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, εἶτ᾽ ἓν τὸν 2325· τὸ δὲ 5 πηλίκον βασάνισον αὖθις ὅτω: πολλαπλασίασον 460 ἐπὶ 5, ὅθεν προκύψει 2300, ᾧ σύναψον τὸν ἀπὸ 5 τετράγωνον 25· ἐπεὶ δὲ τὸ ἄθροισμα 2325 ἰσȣ̃ται ἀκριβῶς τῷ καταλοίπῳ σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, τίθει ὡς τρίτον τῆς ῥίζης ὅρον τὸν 5· ἐπεὶ δὲ ἀφαιρέσει τοῦ 2325 ἀπὸ 2325 μηδὲν καταλείπεται, ἔςιν ἄρα ὁ 235 ῥίζα τετραγωνικὴ ἐντελὴς τȣ̃ 55225.

134. Βάσανος τῆς πράξεως. Τετραγωνισθεὶς γὰρ ὁ 235 ἀποδίδωσιν αὖθις τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 55225.

135. Δεῖξις τῆς μεθόδȣ· ἐπειδήπερ ἐν γένει τὸ κατάλοιπον τῶν προτέρων κομμάτων, εἴτι καταλειφθὲν τύχοι, σὺν τῷ προσεχεῖ κόμματι, ἐπάναγκες ἐφ᾽ ἑκάςης πράξεως περιέχειν τὸ δὶς γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω προτέρων ῥιζικῶν ὅρων ϗ τȣ̃ ζητȣμένȣ ὅρȣ σὺν τῷ ἀπὸ τȣ̃δε τȣ̃ ὅρȣ τετραγώνῳ (131), ἐὰν διαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα τȣ̃δε τȣ̃ κόμματος ϗ τȣ̃ καταλοίπȣ, εἴτι εἴη, διὰ τȣ̃ διπλȣ̃ τῶν προευρημένων ῥιζῶν, ἀπολαβεῖν προσήκει πηλίκον, ὃ μήτε πλεονεκτοίη, μήτ᾽ ἐλαττοῖτο τȣ̃ ζητȣμένȣ ῥιζικȣ̃ ὅρȣ (Ἀριθ. 108)· ἕκαςος ἄρα τῶν κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον θηρευομένων ῥιζικῶν ὅρων ὅτ᾽ ἐλάττων,

ὔτε, μείζων λαμβάνεται, ἢ ὅσον ἀπόχρη· ἄλλως γὰρ, ἐπείπερ οἱ ἄλλοι ῥιζικοὶ ὅροι ἐκ εἰσὶν ἐλάττες, ὁ μείζων ἢ ὅσον ἔδει ὑποτεθεὶς ποιήσει τὴν ὅλην ῥίζαν τῆς δικαίας μείζονα· ἀδύνατον ἄρα ὅτως ἀφελεῖν τῦ ἀριθμῦ, ὗ τὴν ῥίζαν θηρώμεθα, πάντα τὰ κατὰ τάξιν γινόμενα, ἃ συντιθέασι τὸν ἀπ' αὐτῆς τῆς ῥίζης τετράγωνον, τῦθ' ὅπερ ἀπαραιτήτως βύλεται ἡ προεκτεθεῖσα μέθοδος· ὅλη ἄρα ἡ τετραγώνειος ῥίζα, ἡ τῇ εἰρημένῃ μεθόδῳ ἀπολαμβανομένη, ὔτε μείζων, ὔτε ἐλάσσων ἔσεται, ἢ ὅσον ἀπαιτεῖται Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Βύλεταί τις περιφράξασθαι κῆπον, ὃς ἂν περιέχοι ὀργυιὰς τετραγωνικὰς 5184· πόσας ἄρα δεῖ ὀργυιὰς θεῖναι εἰς πλευρὰν τῦ κήπυ; ἡ ἡ ζητυμένη πλευρὰ ἔςαι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῦ 5184 (Ἀριθ. 153)· ἐπ' ἐξαγωγῇ τοίνυν ταύτης, α΄. διῃρήσθω ἀνὰ δύω χαρακτῆρας ὁ 5184· β΄. ὁ μέγιςος τετράγωνος τῶν περιεχομένων ἐν τῷ πρώτῳ κόμματι πρὸς ἀριςερὰν 51, ἔςιν ὁ 49, ὗ ἡ ῥίζα 7 γεγράφθω ἰδίᾳ· ὁ δὲ ἀπὸ 7 τετράγωνος 49 ἀφῃρήσθω τῦ 51, ὅθεν ἔςαι κατάλοιπον 2· γ΄. κατὰ δεξιὰν τῦ καταλοίπυ γεγράφθω τὸ δεύτερον κόμμα 84· διπλασιασθέντος δὲ τῦ 7, εἴτ' ὖν τῦ 70 (133) διῃρήσθω διὰ 104 ὁ 284· τὸ δὲ 2 πηλίκον βεβασανίσθω· πολλαπλασιασθεῖσα ὖν ἡ διπλῆ προηγησαμένη ῥίζα 140 ἐπὶ τὸ πηλίκον 2, δίδωσι 280, ᾧ προςεθέντος τῦ ἀπὸ 2 τετραγώνυ 4, ἐπεὶ τὸ ἄθροισμα 284 ἐξισῦται ἀκριβῶς τῷ καταλοίπῳ μετὰ τῦ καταχθέντος κόμματος, εἴτ' ὖν 284, γεγράφθω δεύτερος ὅρος τῆς ῥίζης 2· εὕρηται ἄρα ῥίζα τελεία τετραγωνικὴ τῦ 5184 ὁ 72, ὅ ἐςιν ἐπὶ σχη-

51, 84	
49	72
284	
284	
0	

ματισμῷ κήπου, 5184 τετραγωνικὰς ὀργυιὰς περιέχοντος, ἑκάστῃ πλευρᾷ μῆκος ἀποδοῦναι χρὴ ὀργυιὰς 72· καὶ γὰρ πολλαπλασιασθεισῶν ὀργυιῶν 72 μήκους ἐπὶ 72 πλάτους τῶν τοῦ ζητουμένου χωρίου, εὑρεθήσονται περιεχόμεναι 5184 ὀργυιαὶ τετράγωνοι.

136. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅταν τὸ διπλοῦν τῆς προευρημένης ῥίζης μεῖζον ᾖ τοῦ καταλοίπου, εἰ εἴη, σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, τιθέσθω ο ῥίζα τοῦ καταχθέντος ἀνικάνου κόμματος· εἰ γὰρ μὴ εἴη ο ὁ ζητούμενος ῥιζικὸς ὅρος, ἔστω ἄλλος τις, φέρ' εἰπεῖν, 1· δεῖ ἄρα τὸ κατάλοιπον μετὰ τοῦ καταχθέντος κόμματος περιέχειν τὸ δὶς γινόμενον ὑπὸ τῆς προτέρας ῥίζης καὶ τῆς 1 σὺν τῷ ἀπὸ 1 τετραγώνῳ (131)· ἔστιν ἄρα τὸ κατάλοιπον μετὰ τοῦ καταχθέντος κόμματος μεῖζον, ἢ τὸ διπλοῦν τῆς προευρημένης ῥίζης, ὅπερ κατὰ τῆς ὑποθέσεως· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, α. θετέον τῇ ῥίζῃ τοσαῦτα ο, ὅσα ὑπάρχει κόμματα τῆς μονάδος ἐλάττω· β΄. εἰ τὸ ἔσχατον τοῦ καταχθέντος ἀριθμοῦ κόμμα μὴ ἐξικανοίη, δείκνυσιν ὅτι ὁ ἔσχατος ῥιζικὸς ὅρος ἔσται ο.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ· Κείσθω γὰρ λαβεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 11881 0000· ἡ οὖν ῥίζα τοῦ μείζονος τῶν ἐν τῷ πρώτῳ κόμματι περιεχομένων τετραγώνων σεσημειώσθω ἰδίᾳ· ἐπεὶ δὲ τὸ διπλοῦν τῆς ῥίζης 1, ἢ 10 (133), εἴτ' οὖν 20, οὐκ ἐμπεριέχεται τῷ 18, γράψας ῥίζαν ο, κατάγαγε τὸν 81· διὰ δὲ τῆς ἄρτι εὑρημένης ῥίζης 10, ἢ 100, διπλασιασθείσης, καὶ γενομένης 200, δίελε τὸν 1881· ἐπεὶ δὲ τὸ πηλίκον 9 βα-

```
1,18,81,00,00 |
--------------
1             | 10900
01881
 1881
     00000
```

πανιθὲν εὑρίσκεται καλῶς ἔχον, ἀφαιρέσει δὲ καταλείπεται ο, κατάγαγε ἑξῆς τὸ κόμμα οο, ὅπερ ἐπεὶ μήδ' ἅπαξ περιέχει τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν, γράψον προσεχῆ ῥίζαν ο, ὡσαύτως δὲ ϗ ἕτερον ο περὶ τῦ ἐφεξῆς κόμματος οο· ἡ ἄρα ὁλικὴ ῥίζα τῦ 11881οοοο ἐςὶ 109οο.

Περὶ τῆς ἐν συμβολικοῖς πολυωνύμοις ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης.

137. Ἀνακαλεσαμένοις τὰ ἀλληλεχῆ γινόμενα, ἃ περιέχει ἅπας ὅρος κυβιζομένυ πολυωνύμυ, εὐχερὲς ἔςαι κατανοῆσαίτε καὶ εἰς πρᾶξιν ἀγαγεῖν τὴν ἐφεξῆς θεωρίαν.

Ἔςω γὰρ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + 3\alpha^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma + 3\beta^2\gamma + 3\alpha\gamma^2 + 3\beta\gamma^2 + \gamma^3$, Ρ, ἦ πρόκειται τὴν κυβικὴν ῥίζαν λαβεῖν· ὁρῶντες ὖν ἐν ἀρχῇ α^3 τὸν ἀπὸ α κύβον, ὑποθέσθαι δυνάμεθα ὅτι α ἔςιν ὁ πρῶτος ῥιζικὸς ὅρος.

Ὁ δεύτερος ὅρος παρέχει τὸ ὑπὸ $3\alpha^2$ ϗ τῦ δευτέρυ ὅρυ γινόμενον (100)· ὁρῶντες τοίνυν $3\alpha^2\beta$, ἐκ τύτυ συνάγομεν ὅτι β δύναται εἶναι ὁ δεύτερος ῥιζικὸς ὅρος ὅςτις παρέχει ὁλικῶς $3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ (αὐτ.)· εἰς εὕρεσιν δὲ τῦ τρίτυ ῥιζικῦ ὅρυ σκεπτέον ὕτως· ὁ τρίτος ὅρος παρέχει τὸ ὑπὸ $3\alpha^2$ ϗ τῦ τρίτυ αὐτῦ γινόμενον· ἐκ πρώτης ἄρα ἐποπτείας τῦ $3\alpha^2\gamma$ συνάγεται ὅτι γ ἔςιν ὁ τρίτος ὅρος· ἀλλὰ γὰρ παρέξει ὗτος α΄· τὸ τρὶς τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῦ προλαβόντος δυωνύμυ $\alpha+\beta$, ἐπαχθὲν ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον, ἢ $3\alpha^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma + 3\beta^2\gamma$· β΄. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω προτέρων ὅρων, ϗ τῦ ἀπὸ τῦ τρίτυ τετραγώνυ, εἴτ' ὖν $3\alpha\gamma^2 + 3\beta\gamma^2$ · γ΄. τελευ-

ταῖον τὸν ἀπὸ τȣ͂ τρίτȣ κύβον γ^3· ὕτως ἄρα κυβικὴ ῥίζα τȣ͂ προτεθέντος πολυωνύμȣ Ρ ἐςὶν $\alpha+\beta+\gamma$· κυβιωθέντος γὰρ τȣ́τȣ, εὑρεθήσεται αὐτὸς ὁ Ρ κύβος

ἐν ἀριθμοῖς.

138. Οὐκ ἀξυντελὲς ἔςαι ἔχειν ἀεὶ πρὸ ὀφθαλμῶν τὸν ἑξῆς πίνακα, περιέχοντα τȣ̀ς ἀπὸ τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν κύβȣς

ῥίζαι	1	2	3	4	5	6	7	8	9
κύβοι	1	8	27	64,	125,	216,	343,	512,	729

Διαιρεθέντων ȣ̓͂ν εἰς κόμματα ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας περιέχοντα δεξιόθεν ἐπ' ἀριςερὰ τῶν ἀλληλεχῶν γινομένων, ἃ περιέχειν ἀνάγκη τὸν ἀπὸ 725, ἢ 700+20 +5 κύβον, ὡσαύτως δὲ ϗ αὐτȣ͂ τȣ͂ κύβȣ Γ, καθ' ὃν ἐνταῦθα ὁρᾶται τρόπον,

139. Ἐξέςαι ἐπιπαρατηρεῖν τῷδε τῷ ἀριθμῷ, ὡς ϗ ἐπὶ παντὶ ἑτέρῳ, ὅτι ὁ ἀπὸ τȣ͂ πρώτȣ ῥιζικȣ͂ ὅρȣ κύβος περιέχεται ἐν τῷ πρὸς ἀριςερὰν πρώτῳ κόμματι τȣ͂ Γ κύβȣ· ϗ ἐν γένει, εἴτι λειφθείη μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τῶν προτέρων κομμάτων, τῶν πρὸς αὐτὰ ἀπονεμομένων

343,000,000
29,400,000
840,000
8,000
7,776,000
54,000
125
381,078,125 Γ

προκυπτόντων, τȣτὶ τὸ κατάλοιπον μετὰ τȣ͂ νεωςὶ καταγομένȣ κόμματος, περιέχει, ά. τὸ τρὶς γινόμενον ἐκ τȣ͂ τετραγώνȣ, τȣ͂ ἀφ' ὅλης τῆς προευρημένης ῥίζης, ϗ τȣ͂ ἐφεξῆς ὅρȣ· β'. τὸ τρὶς γινόμενον ὑφ' ὅλης τῆς προευρημένης ῥίζης, ϗ τȣ͂ τετραγώνȣ τȣ͂ ἀπὸ τȣ͂ ἐφεξῆς ῥιζικȣ͂ ὅρȣ· γ'. τὸν ἀπὸ τȣ͂ ἐφεξῆς ῥιζικȣ͂ ὅρȣ κύβον· ἐντεῦθεν ἄρα ἀποισόμεθα τὴν ἑξῆς μέθοδον.

140. Ἵν' ἐξαχθῇ ἀριθμοῦ ἡ κατ' αὐτὸν κυβικὴ ῥίζα, α΄. διῃρήσθω ὁ ἀριθμὸς ἐκδεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ προϊοῦσιν εἰς κόμματα, τρεῖς ἕκαστον περιέχοντα χαρακτῆρας· β΄. ἐξήχθω ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ μείζονος τῶν ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς ἀριστερὰν κόμματί περιεχομένων κύβων, καὶ ἀφῃρήσθω τοῦδε τοῦ κόμματος ὁ τῆς ῥίζης τῆσδε κύβος· γ΄. ἐν γένει δὲ, τοῦ καταλοίπου, εἴπερ εἴη τι, συνάμα τῷ καταγομένῳ, διαιρεθέντος διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς προευρημένης ῥίζης, εἰλήφθω τὸ τρὶς ὑπὸ τοῦδε τοῦ τετραγώνου, καὶ τοῦ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαντος πηλίκου γινόμενον, ᾧ συνήφθω τὸ τρὶς ὑφ' ὅλης τῆς προευρημένης ῥίζης, καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ πηλίκου τετραγώνου γινόμενον σὺν τῷ ἀπὸ τοῦ πηλίκου κύβῳ· καὶ εἰ μὲν τὸ ἄθροισμα τόδε μὴ ὑπερέχῃ τοῦ καταλοίπου σὺν τῷ κατηγμένῳ κόμματι, γεγράφθω ῥίζα τὸ πηλίκον· ὑπερέχοντος δὲ, ἠλαττώσθω τὸ πηλίκον μονάδι, ἕστ' ἂν μὴ ᾖ μεῖζον τοῦ δικαίου τὸ ἄθροισμα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Κείσθω εὑρεῖν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 381078125 α΄. οὖν δίελε τὸν ἀριθμὸν, ὡς ἐνταῦθ' ὁρᾶται· β΄. ἐπεὶ ὁ μείζων τῶν τῷ πρὸς ἀριστερὰν πρώτῳ ἐμπεριεχομένων κόμματι κύβων ἐκ τοῦ προεκτεθέντος τῶν κυβικῶν ἀριθμῶν πίνακος ἐστι 343, γράψον ἰδίᾳ τὴν ῥίζαν αὐτοῦ 7, τὸν δὲ 343 κύβον ἀφελὼν τοῦ 381, ὑπόγραψον αὐτῷ τὸ κατάλοιπον 38· γ΄. πρὸς δεξιὰν τοῦ καταλοίπου γράψας τὸ δεύτερον κόμμα 078, διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς πρευρημένης ῥίζης 7, εἴτ' οὖν 70, ὅ ἐστι διὰ 14700 δίελε τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ κατηγμένῳ κόμ-

```
381, 078, 125 |
--------------------
343           | 725
 38078
 30248
   7830125
   7830125
         0
```

ματι, εἴτ' ἒν 38078· τὸ δ' ἐντεῦθεν πηλίκον, εἰ ἀληθὴς εἴη ῥίζα, βασάνισον τοιῷδε λόγῳ· α΄. πολλαπλασίασον ἐπὶ 2 πηλίκον τὸν τριπλῦν τετράγωνον τὸν ἀπὸ τῆς πρὸ μικρῦ εὑρημένης ῥίζης, εἴτ' ἒν τὸν 14700, ὅθεν προκύψει 29400· β΄. τῷδε τῷ γινομένῳ πρόσθες τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τῆς ῥίζης 7, εἴτ' ἒν 70, ϗ τῦ ἀπὸ 2 τετραγώνυ 4 σὺν τῷ ἀπὸ 2 κύβῳ 8· ϗ ἐπεὶ τὸ ἄθροισμα 30248 ὐχ' ὑπερέχει τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι, 2 ἐϛὶν ἡ ἀληθὴς ῥίζα, ἣν γράψον ἐν τῷ οἰκείῳ αὐτῆς χώρῳ.

Τῦ τρίτυ καταχθέντος κόμματος πρὸς δεξιὰν τῦ καταλοίπυ 7830, λαβὲ τὸν ἀπὸ τῆς προευρημένης ῥίζης, εἴτ' ἒν 720, τετράγωνον, ὅς ἐϛι 518400, δι' ὗ τριπλασιασθέντος ϗ γενομένυ 1555200 δίελε τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, εἴτ' ἒν τὸν 7830125, τὸ δὲ πηλίκον 5 βασάνισον ὡσαύτως: πολλαπλασίασον τὸν τρὶς συνεϛῶτα ἀφ' ὅλης τῆς προευρημένης ῥίζης τετράγωνον, εἴτ' ἒν 1555200 ἐπὶ 5· τῷ δ' ἐντεῦθεν προκύπτοντι 7776000 πρόσθες τὸ τρὶς γινόμενον ὑφ' ὅλης τῆς προευρημένης ῥίζης ϗ τῦ ἀπὸ 5 τετραγώνυ 25, εἴτ' ἒν 54000 σὺν τῷ ἀπὸ 5 κύβῳ 125· ϗ ἐπεὶ τὸ ἀποτελύμενον ἄθροισμα 7830125 ἰσῦται ἀκριβῶς τῷ καταλοίπῳ μετὰ τῦ καταχθέτος κόμματος, ἔϛιν ἄρα ἀληθὴς μὲν τελευταία ῥίζα 5· ἔϛι δὲ ἀκριβῶς 725 ἡ ὅλη κυβικὴ ῥίζα τῦ 381078125.

141. Δεῖξις τῆς μεθόδυ. Ἐρείδεται γὰρ ϗ αὕτη τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾧ ϗ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης (135) ὅτι ἕκαϛος ῥιζικὸς χαρακτὴρ, ὔτε μείζων, ὔτ' ἐλάσσων, ἢ ὅσον ἀπόχρη διὰ τῆσδε τῆς μεθόδυ λαμβάνεται.

Βάσανος τῆς πράξεως· Κυβισθεὶς γὰρ ὁ 725 ἀποδȣ̃ναι ὀφείλει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 381078125, ȣ̃ τὴν κυβικὴν ἐθηρασάμεθα ῥίζαν.

142. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡνίκ' ἂν τὸ κατάλοιπον, εἴτι εἴη, σὺν τῷ κατηγμένῳ κόμματι ἔλαττον ᾖ τȣ̃ τριπλȣ̃ τετραγώνȣ, τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἄρτι εὑρημένης ῥίζης, τιθέσθω ο ῥίζα, ὡσαύτως καὶ ὑπὲρ ἑκάςȣ μὴ ἀποχρῶντος κόμματος.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τὸ ἐξαγαγεῖν τȣ̃ 3377000-125 τὴν κυβικὴν ῥίζαν· ά. ὁ μείζων τῶν ἐν τῷ πρώτῳ κόμματι 3 περιεχομένων κύβων ἐςὶ 1, ȣ̃ τὴν κυβικὴν ῥίζαν γράψον ἰδίᾳ (80)· ἀφαιρέσει τȣ̃ κύβȣ 1 ἀπὸ 3 καταλείπεται 2· β'. τὸ προσεχὲς κόμμα, συναφθὲν τὸ 2 κακαταλοίπῳ, ἀποτελεῖ 2377, ὃν δίελε διὰ τȣ̃ ἀπὸ 1 ἢ 10 τριπλȣ̃ τετραγώνȣ 300, τὸ δ' 7 πηλίκον βασάνισον ὡς πρότερον: πολλαπλασίασον γὰρ 300 ἐπὶ 7· τῷ δὲ προκύπτοντι 2100 σύναψον τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τῆς προευρημένης ῥίζης 10, ϗ τȣ̃ ἀπὸ 7 τετραγώνȣ 49, εἶτ' ȣ̃ν τὸν 1470 σὺν τῷ ἀπὸ 7 κύβῳ, ϗ ἐπεὶ τὸ ἀποτελȣ́μενον ἄθροισμα ὑπερέχει τȣ̃ 2377, 7 ἐςὶ ῥίζα μείζων τȣ̃ δικαίȣ· βασανίσας δὲ τὸν 6 εὑρήσεις ϗ αὐτὸν ὡσαύτως τȣ̃ δικαίȣ μείζονα· βασάνισον ἑξῆς τὸν 5· 300 ὁ ἀπὸ τῆς προευρημένης ῥίζης τριπλȣ̃ς τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 5, παρέχεται 1500· 30 δὲ τὸ τριπλȣ̃ν ταύτης τῆς ῥίζης πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀπὸ 5 τετράγωνον 25, ἀποδίδωσιν 750· συναφθέντος δὲ τοῖς δυσὶ τοῖσδε ἀριθμοῖς τȣ̃ ἀπὸ 5 κύβȣ 125, τὸ μὲν ἀποτε-

3,377,000,125	
1	1500
2377	
2377	
2000125	

λέμενον ἄθροισμα ἐςὶν οἷον ἀφαιρεῖσθαι· 5 δὲ ἐςὶν ἡ ἀληθὴς ῥί-ζα· ἀφαιρεθέντος οὖν τοῦ 2375 ἀπὸ 2377, καταλείπεται 2.

Τοῦ τρίτου δὲ καταχθέντος κόμματος, τετραγωνίσας τὴν εὑρημένην ῥίζαν 15, ἢ 150 (133), ἕξεις 22500· τριπλασιάσας δὲ τόνδε τὸν τετράγωνον, ἀπολήψῃ 67500, οὗ μείζονος ὄντος, ἢ τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, θὲς ῥίζαν ο (142).

Καταχθέντος δ᾽ ἔτι καὶ τοῦ προσεχοῦς κόμματος, λαβὲ τὸν ἀπὸ 150, εἴτ᾽ οὖν 1500 (133) τετράγωνον 2250000· τὸ δὲ τριπλοῦν τοῦδε τοῦ τετραγώνου, ὅ ἐςιν 6750000, ἐπεὶ καὶ τοῦτο ὑπερέχει τὸ κατάλοιπον σὺν τοῖς καταχθεῖσι κόμμασι, γράψον καινὴν ῥίζαν ο· καὶ οὕτως εὑρεθήσεται ἡ ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς ἐν ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς ῥίζα τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ ἡ 1500, καταλειπομένου τοῦ 2000125.

143. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁπόταν ᾖ τι κατάλοιπον ἐν τῇ ἐξαγωγῇ ῥίζης τετραγωνικῆς, κυβικῆς κτ, βασανισθήσεται ἡ πρᾶξις οὕτω, α. ὑψούσθω ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα εἰς τὸν συνώνυμον αὐτῇ βαθμὸν, ᾧ τοῦ καταλοίπου προσεθέντος, ἐπάναγκες εὑρεθῆναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, οὗ ἡ ῥίζα ἐξήνεκται· ὃ δείκνυσι τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν οὖσαν τὴν ἐν ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς τῇ ἀληθεῖ ἐγγίζουσαν· β΄. διὰ τὸ κατάλοιπον μέντοι ἐςὶν αὕτη τῆς ἀπαιτουμένης ἐλάσσων· Ἵν᾽ ἄρα γνωσθῇ, εἰ ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα μὴ εἴη ἐλάττων τῆς ζητουμένης μεγεθυνέσθω μονάδι, καὶ οὕτως ὑψούσθω εἰς τὸν, περὶ οὗ ζητεῖται, βαθμόν· ὁ δ᾽ ἐντεῦθεν προκύπτων ἀριθμὸς, δίχα τοῦ λειψάνου, ὑπερέξει τοῦ, οὗ ἐξῆκται ἡ ῥίζα.

Αὐτίκα δὴ ἐπὶ τοῦ φθάσαντος ὑποδείγματος, ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα 1500 κυβισθεῖσα ἀποδίδωσι 3375000000, ᾧ συναφθέντος τοῦ καταλοίπου 2000125, ἐπεὶ τὸ ἄθροι-

σμα 3377000125 ἰσȣ̃ται τῷ, ȣ̃ ἡ ῥίζα ἐξήνεκται, ἀριθμῷ, ἐκ τȣ́τȣ συνάγομεν, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα 1500 ȣ̓κ ἔςι μείζων τῆς ἀπαιτȣμένης ἐν ὁλοχερέσιν· εἰδέτις εἴποι, ὅτι εἴη ἐλάσσων, ἐςω ἀληθὴς ἡ 1501· ἐπεὶ δὲ ὁ ἐκ ταύτης κύβος 3381754501 ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν 3377000125, ȣ̃ εἴληπται ἡ ῥίζα· ἔςιν ἄρα 1501 ῥίζα μείζων, ἢ ὅση ἀπαιτεῖται· ἡ ἄρα 1500 ȣ̓κ ἔςιν ἡμαρτημένη.

Περὶ τῆς διὰ προσεγγίσεως τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς.

144. Καίτοι μὴ ἐξὸν, ὡς παρακατιȣ̃σι δειχθήσεται, βαθμȣ̃ ἀτελȣ̃ς τὴν ἀληθῆ εὑρεῖν ῥίζαν, δυνάμεθα μέντοι μᾶλλον ϗ μᾶλλον αὐτῆς ἔγγιον γίνεσθαι ἐπ᾽ ἄπειρον, κατὰ τόνδε τὸν τρόπον.

Α΄. Ἐξαχθείσης ἐν ὁλοχερέσιν ἀριθμοῖς κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν ἡμῖν μέθοδον τῆς μειζονος δυνατῆς ῥίζης, συνήφθωσαν πρὸς τὰ δεξιὰ τȣ̃ μετὰ τὴν τελευταίαν πρᾶξιν καταλοίπȣ πλείω κόμματα, ἕκαςον περιέχοντα τοσαῦτα ο, ὅσας μονάδας περιέχει τὸ ἐπίσημον τῆς ἐξαγομένης ῥίζης, ὅ ἐςι, περιέχον μὲν δύω ο, εἰ ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, τρία δὲ, εἴπερ ἡ κυβικὴ, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως περὶ τῆς τετάρτης, πέμπτης κτ ῥίζης, περὶ ὧν ὕςερον.

Β. Ἐξαγέσθω συνεχῶς ἡ ῥίζα ἐκ τȣ̃ καινȣ̃ τȣ̃δε ἀριθμȣ̃ τȣ̃ συγκειμένȣ ἐκ τȣ̃ καταλοίπȣ ϗ τῶν κομμάτων τῶν περιεχόντων τὰ ο, ὡς εἰ ϗ ἦν ὁλοχερής· διακεκρίσθωσαν μόνον δὶ ὑποδιαςολῆς οἱ προευρεθέντες τῶν αὐτίκα εὑρεθησομένων ῥιζικῶν χαρακτήρων· Τοιγαρȣ̃ν τοσοίδε δε-

καδικοὶ χαρακτῆρες τῇ ῥίζῃ προσεπιτεθήσονται (Ἀριθ. 222), ὅσα κόμματα μηδενικῶν συναφθήσονται τῷ λειψάνῳ.

Ὑπόδειγμα ἐπὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Ἵν᾽ ἐξαχθῇ διὰ προσεγγίσεως ἡ τοῦ 535 τετραγωνικὴ ῥίζα· α΄. ἐξήχθω ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἐν ὁλοχερέσιν, ἥτις εὑρεθήσεται 23 μετὰ καταλοίπου 6.

Β΄. Τιθέσθω, ὅσα πότ᾽ ἂν ᾖ βουλομένοις κόμματα μηδενικῶν, πέντε, φέρε, ἀνὰ δύω περιέχοντα ἕκαστον, κατὰ δεξιὰν τοῦ καταλοίπου, γενήσεται οὖν 6,00,00,00, 00,00, καὶ ἐπανειλήφθω ἡ τῆς ῥίζης ἐξαγωγὴ, ὡς εἴπερ ἦν ὁ καινὸς οὗτος ἀριθμός μέρος κατάλοιπον τοῦ προτεθέντος· οὐκοῦν διπλασιασθεῖσα ὅλη ἡ προευρημένη ῥίζα ἔσεται 460 (133)· τοῦ δὲ καταλοίπου 6 συναφθέντος τῷ ἐγγὺς καινῷ κόμματι 00, διαιρεθεὶς 600 διὰ 460 δίδωσι 1, ὃ γεγράφθω ἐν δεξιᾷ τῆς ὁλοχεροῦς ῥίζης 23 διακριθείσης πρότερον δι᾽ ὑποδιαστολῆς, ὡς ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν. 460×1=460, ᾧ ἀναφθέντος τοῦ ἀπὸ 1 τετραγώνου 1, γίνεται 461· ἀφαιρέσει δὲ λείπεται 139, οὗ πρὸς δεξιὰν ἐπισυναφθέντος τοῦ ἐγγὺς κόμματος 00, ἔσαι 13600.

Δι᾽ ὅλης τῆς ἄρτι εὑρημένης ῥίζης, διπλασιασμῷ γενομένης 4620, διῃρήσθω ὁ 13900 ἀριθμὸς, τὸ δὲ πηλίκον 3 βασανισθὲν γραφέσθω ἐν τῇ ῥίζῃ δεύτερον δεκαδικόν.

Ἐπαναλαμβανομένης δὲ ὡσαύτως τῆς πράξεως κἀπὶ τῶν ἑξῆς τριῶν κομμάτων, εὑρεθήσεται ῥίζα τοῦ 535 τῇ ἀληθεῖ προσεγγίζουσα ἡ 23,13006· ἔστι μὲν οὖν αὕτη

τῆς ἀληθοῦς ἐλάττων, ἅτε δὴ λειψάνου τινὸς ἐγκαταλειπομένου· ἡ μέντοι ποσότης, ἥπερ ἡ 2313006 ἐλαττοῦται τῆς ἀληθοῦς ῥίζης, ἐστὶν ἐλάττων ἢ δεκακισμυριοστημόριον τῆς μονάδος· εἰ γὰρ ἦν ἡ διαφορὰ $\frac{1}{100000}$, ἐπεὶ ὁ ἔσχατος δεκαδικός ὅρος 6 τὸν τῶν δεκακισμυριοστημορίων ἐπέχει χῶρον, τεθέντος 7 ἀντὶ 6, καὶ διεκπεραιωθείσης ἁπάσης τῆς πράξεως, φανήσεται ὁ 7 μείζων εἰλημμένος τοῦ ἀπαιτουμένου.

535	6,00,00,00,00,00
600	23,13006
461	
13900	
13869	
31000000	
27756036	
3243964	

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὑποσυναφθέντος ἔτι ἑνὸς κόμματος ο τῷ εὑρεθέντι καταλοίπῳ, καὶ τῆς ἐξαγωγῆς ἐπανειλημμένης, εὑρεθήσεται ῥίζα τῆς ἀληθοῦς μιλλιονιστημορίῳ διαφέρουσα· ἑτέρου δὲ ἐπιπροστεθέντος διοίσει δεκακισμιλλιονιστημορίῳ, καὶ οὕτως ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον·

Ὑπόδειγμα ἐπὶ τῆς κυβικῆς ῥίζης.

Ἔστω ἐξαγαγεῖν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 1953227.

145. Α΄. Ἐξήχθω τοῦδε τοῦ ἀριθμοῦ ἡ κατ' αὐτὸν κυβικὴ ῥίζα ἐν ὁλοσχερέσιν, ἥτις ἔσται 125· β΄. συνήφθω

τῷ καταλοίπῳ 102, τρία, φέρε, κόμματα ἕκαςον ἀνὰ ο. τρία· ἔςαι ἓν 102,000,000,000· ἐπεὶ δὲ ὁ ἀπὸ τῆς εὑρημένης 125 ῥίζης τετράγωνος 1250 (133), τριπλασιασμῷ γινόμενος 4687500, ὑπερέχει τῦ λειψάνυ συνημμένυ τῷ πρώτῳ τῶν ο κόμματι, γεγράφθω ο τῇ ῥίζῃ ὡς πρῶτον δεκαδικόν.

Ο᾽ ἀπὸ τῆς προευρημένης ῥίζης 12500 (133) τριπλῦς τετράγωνος 468750000 ὑπερέχει τῦ καταλοίπυ συνάμα τοῖς δυσὶ κόμμασι τῶν μηδενικῶν· ὐκῦν γραφέσθω ἔτι ϗ ἕτερον ο ὡς δεκαδικὸν δεύτερον.

Ο᾽ τριπλῦς ἤδη ἀπὸ 125000 τετράγωνος 46875000000 ἐλαττῦται τῦ μετὰ τριῶν κομμάτων λειψάνυ· διῃρήσθω ὖν ὗτος δἰ ἐκείνυ τῦ ἀριθμῦ· τὸ δὲ πηλίκον 2 δοκιμασθὲν γεγράφθω τῇ ῥίζῃ ὡς τρίτον δεκατημόριον.

Εἴληπται ἄρα 125,002 κυβικὴ ῥίζα τῦ 1953227 τῆς ἀληθῦς ἐγγὺς ἔχυσα· συναχθήσεται δὲ, ὡς κἀπὶ τῆς τετραγωνείυ, ὅτι ϗ αὕτη τῆς ἀληθῦς ὐ διενήνοχεν ἀλλ᾽ ἢ χιλλιοςημορίῳ τῆς μονάδος.

146. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δεῆσαν δὲ δἰ ἀκρίβειαν πλείω λαβεῖν ῥίζαν ἐγγυτέραν τῇ ἀληθεῖ, ἢ τὴν εὑρεθεῖσαν, προςιθέσθωσαν τῷ καταλοίπῳ καινὰ μηδενικῶν κόμματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Τύποι παντοῖοι βαθμῶν ϗ ῥιζῶν, ἔνθα καὶ περὶ ἐξαγωγῆς ῥιζῶν, ἐκτελουμένης διὰ τοῦ Νευτωνείου δυωνύμου τύπου.

147. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων περὶ βαθμῶν ϗ τῆς τῶν κατ' αὐτὰς ῥιζῶν ἐξαγωγῆς καταμαθεῖν δυνάμεθα, ὅ,τι ποτὲ σημαίνουσιν οἱ τύποι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, $\alpha^{-\mu}$, $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}$, κτ. ὧν τὰς δυνάμεις γνωσόμεθα ἀναχθέντος ἑκάστου ἐπὶ α^{μ}.

148. ά. οὖν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ τρέπεται εἰς α^{μ}, ἐὰν ὑψωθῇ εἰς τὸν βαθμὸν ν· οὕτω γὰρ (82) $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}\times\nu} = \alpha^{\frac{\mu\nu}{\nu}} = \alpha^{\mu}$. οὐκοῦν α^{μ} ἐστὶν ὁ ἀπὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ βαθμὸς ν· τοὐναντίον δὲ ἡ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἐστὶ ῥίζα ν τοῦ βαθμοῦ α^{μ}· εἴτ' οὖν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$· ἐν γένει ἄρα „ποσότης πᾶσα, κλασματικὸν δείκτην ἔχουσα, ἴσα δύναται „ποσότητι, ῥιζικῷ σημείῳ καθυπαγομένῃ, ἧς ἐπίσημον „μέν ἐστιν ὁ τοῦ κλάσματος παρονομαστὴς, δείκτης δὲ ὁ ἀ„ριθμητής· τοιγαροῦν ἔσται $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$, ϗ $\alpha^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^{2}}$, $\alpha^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{\alpha^{3}}$ κτ.

149. β΄. Ἵνα $\alpha^{-\mu}$ τραπῇ εἰς α^{μ}, ἀνάγκη τὴν $\alpha^{-\mu}$ πολλαπλασιάσαι ἐπὶ $\alpha^{2\mu}$· ϗ γὰρ οὕτω (40) $\alpha^{-\mu}\times\alpha^{2\mu}=$

$\bar{\alpha}^{\mu+2\mu} = \alpha^{\mu}$· ἐςὶν ȣ̃ν τὸ α^{μ} γινόμενον ἐκ τȣ̃ $\bar{\alpha}^{\mu}$ καὶ $\alpha^{2\mu}$· ἐπεὶ δὲ τȣ̃ γινομένȣ διαιρεθέντος διὰ θατέρȣ τῶν ποιητῶν προκύπτει ὁ ἕτερος ἄρα $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{2\mu}} = \bar{\alpha}^{\mu}$ ἐπεὶ δὲ $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{2\mu}} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}$ (κ̀ γὰρ τȣ̃ $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{2\mu}}$ διαιρεθέντος διὰ κοινȣ̃ διαιρέτȣ τȣ̃ α^{μ} ἐκ μὲν τȣ̃ ἀριθμητȣ̃ ἀποφέρεται μονὰς, ἐκ δὲ τȣ̃ παρονομαςȣ̃ α^{μ} (142)), ἄρα $\frac{1}{\alpha^{\mu}} = \bar{\alpha}^{\mu}$ δῆλον ἄρα ἐν γένει ὅτι „ποσότης πᾶσα λειπτικὸν δείκτην ἔχȣσα ἴσα „δύναται κλάσματι, ȣ̃ ἀριθμητὴς μὲν ἡ μονὰς, παρονο„μαςὴς δὲ ἡ αὐτὴ ποσότης τὸν αὐτὸν μὲν δείκτην, ἀλλ' ὑπαρκτικὸν ἔχȣσα· ὅτως $\bar{\alpha}^{2} = \frac{1}{\alpha^{2}}$, $\bar{\alpha}^{3} = \frac{1}{\alpha^{3}}$, $\alpha\beta^{-5} = \alpha \times \frac{1}{\beta^{5}} = \frac{\alpha}{\beta^{5}}$.

150. γ΄. Σαφὲς ἄρα ἐκ τῶν (147, 148) ὅτι

$$\bar{\alpha}^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\mu}}$$

151. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τȣ́των δῆλον, ὅτι τύποι ῥιζικοὶ ἐν σχήματι βαθμῶν παραςαθῆναι δύνανται· ἐξέςαι ȣ̃ν ἐντεῦθεν κ̀ τὴν παντὸς δυωνύμȣ ποσότητος ῥίζαν ἡντιναȣ̃ν θηρωμένοις διὰ τȣ̃ Νευτωνείȣ τύπȣ ἐν ἐπιτεύξει αὐτῆς γενέσθαι· πρὸς πλείω δὲ εὐμάρειαν ἐπεξεργαςέον ἐςὶ τὸν τύπον ἐπὶ τὸ τελειότερον.

152. Κείσθω ȣ̃ν αὖθις ὁ τύπος· $\alpha^{\mu} + \mu\alpha^{\mu-1}\beta +$

$$\frac{\mu \times \mu - 1}{1 \times 2} \alpha^{\mu-2}\beta^2 + \frac{\mu \times \mu - 1 + \mu - 2}{1 \times 2 \times 3} \alpha^{\mu-3}\beta^3 +$$

$$\frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3}{1 \times 2 \times 3 + \times 4} \alpha^{\mu-4}\beta^4$$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3 \times \mu - 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \alpha^{\mu-5}\beta^5$$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3 \times \mu - 4 \times \mu - 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \alpha^{\mu-6}\beta^6 \text{ κτ.}$$

ἐπειδὴ δὲ $\alpha^{\mu-1} = \frac{\alpha^\mu}{\alpha}$, ϗ $\alpha^{\mu-2} = \frac{\alpha^\mu}{\alpha^2}$ (55), τιθέντες τὸ ἴσον ἀντὶ ἴσϐ ἐν τῷ ἐκτεθέντι τύπῳ, ἕξομεν $\alpha^\mu +$

$$\frac{\mu\alpha^\mu\beta}{\alpha} + \frac{\mu.\mu-1}{1.2} \frac{\alpha^\mu\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3.} \frac{\alpha^\mu\beta^3}{\alpha^3}$$

$$+ \frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.2.3.4} \frac{\alpha^\mu\beta^4}{\alpha^4} + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3.\mu-4}{1.2.3.4.5}$$

$$\frac{\alpha^\mu\beta^5}{\alpha^5} + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3.\mu-4.\mu-5}{1.2.3.4.5.6} \frac{\alpha^\mu\beta^6}{\alpha^6} \text{ κτ·}$$

τϐτϐ ϐ̃ν τϐ̃ τύπϐ ἅπασι τοῖς ὅροις μετὰ τὸν πρῶτον ὑπάρχει $\frac{\alpha}{\beta}$· ἐν μὲν γὰρ τῷ δευτέρῳ ἔϛιν $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐν δὲ τῷ τρίτῳ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$· ἐν δὲ τῷ τετάρτῳ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^3}{\beta^3}$ κτ. ἐὰν ϐ̃ν κληθῇ $\frac{\alpha}{\beta} = \Xi$, ὁ τύπος τρέψεται εἰς τὸν $\alpha^\mu + \frac{\mu\alpha^\mu}{1}\Xi + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}\alpha^\mu\Xi^2 + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}$

$$\alpha^\mu\Xi^3 + \frac{\alpha.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.2.3.4} \alpha^\mu\Xi^4$$

$$+\frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3.\mu-4}{1.2.3.4.5.}\alpha^{\mu}\Xi^{5}$$

$$\frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3.\mu-4.\mu-5}{1.2.3.4.5.6.}\alpha^{\mu}\Xi^{6} \quad \text{κτ.}$$

ἐν τέτῳ ἒν τῷ τύπῳ ὁ ά. ὅρος ἐμπεριέχεται τῷ β΄.· ὁ δὲ β΄ τῷ γ΄ κτ. ὁ γὰρ β΄ γίνεται ὑπὸ τε ά α^{μ} ϗ τε $\frac{\mu}{1}\Xi$· ὁ δὲ γ΄. ἐκ τε β΄. $\frac{\mu\alpha^{\mu}\Xi}{1}$ ϗ τε $\frac{\mu-1\,\Xi}{2}$· ὁ δὲ τέταρτος ἐκ τε γ΄ ϗ τε $\frac{\mu-2\,\Xi}{3}$ κτ., ὡς παντὶ τῷ ϗ μικρὸν ἐπισήσαντι τὴν διάνοιαν δῆλον· ἐὰν ἒν ῥηθῇ ὁ μὲν ά. ὅρος Α, ὁ δὲ β΄. Β, ὁ δὲ γ΄. Γ, ὁ δὲ δ΄. Δ, ὁ δὲ ε. Ε, ὁ δὲ ς΄. ς. κτ., ἔςαι μὲν ὁ ά. ὅρος $\alpha^{\mu}=\text{Α}$· ὁ δὲ β΄. ὁ ὑπὸ τε πρώτε ϗ τε $\frac{\mu\Xi}{1}$ γινόμενος $=\frac{\mu\text{Α}\Xi}{1}=\text{Β}$· ὁ δὲ γ΄. ὁ ὑπὸ τε β΄. ϗ τε $\frac{\mu-1\,\Xi}{2}$ γινόμενος $=\frac{\mu-1\,\Xi\text{Β}}{2}=\text{Γ}$· ὁ δὲ δ΄ $=\frac{\mu-2\,\text{Γ}\Xi}{3}=\Delta$· ὁ δὲ έ $=\frac{\mu-3\,\Delta\Xi}{4}=\text{Ε}$· ὁ δὲ ς΄ $=\frac{\mu-4\,\text{Ε}\Xi}{5}=$ ς κτ. ὁ δὲ τύπος γενήσεται $\alpha^{\mu}+\frac{\mu\text{Α}\Xi}{1}+\frac{\mu-1\,\text{Β}\Xi}{2}+\frac{\mu-2\,\text{Γ}\Xi}{3}+\frac{\mu-3\,\Delta\Xi}{4}+\frac{\mu-4\,\text{Ε}\Xi}{5}+\frac{\mu-5\,\varsigma\Xi}{6}$ κτ.· ἐν ᾧ ὑπομνηςέον ὅτι

$\Xi = \frac{\beta}{\alpha}$, καὶ ὅτι τὰ μεγάλα γράμματα Α, Β, Γ κτ. ἐμφαίνουσιν ἀεὶ τὴν δύναμιν τοῦ ἡγησαμένου ὅρου· τοῦτον τὸν τύπον ὃς ἂν ἀκριβῶς τῇ διανοίᾳ ἐντυπώσαιτο ἐν πολλοῖς ἐπιγνώσεται τὸ χρήσιμον αὐτοῦ· ὑψώσει τε δι' αὐτοῦ ποσὰ εἰς βαθμοὺς, ὡς καὶ διὰ τοῦ ἀνεπεξεργάστως προεκτεθέντος (133)· καὶ ἀπὸ ποσῶν δοθέντων ῥίζας ἐξάξεται, ὡς ἐπὶ τοῦ ἑξῆς ὑποδείγματος δῆλον ἔσται.

153. Ἔστω οὖν ἐξαγεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 2, εἴτ' οὖν εὑρεῖν τὴν δύναμιν τοῦ $\sqrt{2}$· καὶ δὴ διῃρήσθω ὁ 2 εἰς 1 + 1· οὐκοῦν ἔσται $\sqrt{1+1} = (1+1)^{\frac{1}{2}}$ (149)· ἐν ταύτῃ τοίνυν τῇ περιπτώσει ἔσται $\mu = \frac{1}{2}$ καὶ $\Xi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$· ὁ δὲ τύπος ὧδε μερικευθήσεται.

$$+\alpha^{\mu} = 1^{\frac{1}{2}} = +1 = A$$

$$+\frac{\mu}{1} = A\Xi = \tfrac{1}{2} . 1 . 1 = \tfrac{1}{2} = B$$

$$+\frac{\mu-1}{2} B\Xi = -\tfrac{1}{4} . \tfrac{1}{2} . 1 = -\tfrac{1}{8} = \Gamma$$

$$+\frac{\mu-2}{3} \Gamma\Xi = -\tfrac{1}{2} . -\tfrac{1}{8} . 1 = +\tfrac{1}{16} = \Delta$$

$$+\frac{\mu-3}{4} \Delta\Xi = -\tfrac{5}{8} . \tfrac{1}{16} . 1 = -\tfrac{5}{128} = E$$

$$+\frac{\mu-4}{5} E\Xi = -\tfrac{7}{10} . -\tfrac{5}{128} . 1 = \tfrac{35}{1280} = Ϛ$$

$$+\frac{\mu-5}{6} Ϛ\Xi = -\tfrac{3}{4} . \tfrac{35}{1280} . 1 = -\tfrac{105}{5120} = Z \text{ κτ.}$$

ὥςε ἡ $\sqrt{2}$ εἴη ἂν $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{35}{1280} - \frac{105}{5120}$ κτ. ἐξ ὧν δῆλον, ὅτι τȣ̃ τύπȣ προαγομένȣ περαιτέρω, δυνατὸν ἀπείρȣς ἔτι προσευρεῖν ὅρȣς ἀμοιβαδὸν τὸν μὲν ὑπάρχοντα, τὸν δὲ λείποντα· ἐὰν ȣ̃ν χωρὶς συναφθῶσιν οἱ ὑπαρκτικοὶ τῶν ὅρων, εἶτα οἱ λειπτικοὶ, ϗ ȣ̃τοι ἐκείνων ἀφαιρεθῶσι, προκύψει $1 + \frac{415}{1024}$ $=$ περίπȣ 1,405, ῥίζα τετραγωνικὴ τȣ̃ 2 τῆς ἀληθȣ̃ς ἅλις ȣ̃σα ἐγγύς.

154. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἱκανὰ δὲ ταῦτα περὶ τȣ́τȣ τȣ̃ τύπȣ τοῖς γε πρωτοπείροις· ἐκ τȣ́των δὲ ϗ ὅπως δι' αὐτȣ̃ ῥίζαι καθυπερτέρων βαθμῶν ἐξαχθῆναι δύνανται, ϗ ἐπὶ βαθμȣ̀ς λειπτικȣ̀ς ποσὰ δοθέντα ἐξαίρονται, ὡς $(\alpha+\beta)^{-2}$ $= \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}$, ϗ λειπτικῶν βαθμῶν αἱ ῥίζαι θηρεύονται, οἷον $(\alpha+\beta)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(\alpha+\beta)^3}}$ (150), δυνατὸν ἐκμαθεῖν· περὶ μέντοι τῆς καθυπερτέρων βαθμῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς, ϗ τῆς ὡς οἷόν τε ταῖς ἀληθέσι προσεγγίσεως ἀποδώσομεν μέθοδον γενικωτέραν μετὰ τὸ περὶ λογαρίθμων διαλαβεῖν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Λογισμὸς τῶν βαθμῶν διὰ τῶν κατ' αὐτȣ̀ς δεικτῶν.

155. Ἐπὶ παντὸς μονωνύμȣ ὁ τῶν δεικτῶν κανὼν

ἐςὶν ὗτος: ἐπὶ βαθμῶν σχηματισμῷ πολλαπλασιαςέον τὸν δείκτην τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸν δείκτην τοῦ βαθμȣ͂ (82): ἐπὶ ῥιζῶν ἐξαγωγῇ διαιρετέον τὸν δείκτην διὰ τȣ͂ ἐπισήμȣ (122): ἐπὶ πολλαπλασιασμῷ μονωνύμȣ διὰ μονωνύμȣ, ληπτέον τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν τῶν αὐτῶν γραμμάτων (40): ἐπὶ δὲ διαιρέσει ληπτέον τὴν μεταξὺ αὐτῶν διαφορὰν (55)· ἐντεῦθεν ἄρα ὑποσυνάψομεν τὰ ἐφεξῆς.

156. Α'. Ὁ παντὸς ποσȣ͂ δείκτης δύναται εἶναι $= 0$, ἢ ἀριθμὸς ὁσισȣ͂ν ὑπαρκτικὸς, ἢ λειπτικὸς, ὁλοχερὴς ἢ κλασματώδης· κληθέντος ȣ͂ν πρὸς τὸ δοκȣ͂ν μ μὲν δείκτȣ παντὸς, ν δὲ ἐπισήμȣ παντὸς, ἀμφοῖν ὁλοχερῶν τε καὶ ὑπαρκτικῶν, ἕξομεν $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{0}$ (59) $\frac{\alpha^{2\mu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{2\mu-\mu} = \alpha^{\mu}$. $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{3\mu}} = \alpha^{\mu-3\mu} = \alpha^{-2\mu}$. $\sqrt{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ (122) κτ.

157. Β'. Ἐντεῦθεν ἄρα εὐμαρῶς γινώσκομεν, ὅπως ἐν ἄλλῳ τύπῳ μεταποιητέον ἔςαι τὸν παντὸς βαθμȣ͂ δείκτην. ἀναχθήσεται γὰρ α^{0} εἰς τὸν τύπον α^{μ}, πολλαπλασιαζομένȣ α^{0} ἐπὶ α^{μ}, εἴγε $\alpha^{0} \times \alpha^{\mu} = \alpha^{0+\mu} = \alpha^{\mu}$ τὸ δὲ α^{μ} γενήσεται $\alpha^{-\mu}$, διαιρεθὲν διὰ $\alpha^{2\mu}$· καὶ γὰρ $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{2\mu}} = \alpha^{\mu-2\mu} = \alpha^{-\mu}$· τȣ͂ναντίον δὲ τὸ $\alpha^{-\mu}$ τραπήσεται εἰς α^{μ} διὰ $\alpha^{-\mu} \times \alpha^{2\mu} = \alpha^{-\mu+2\mu} = \alpha^{\mu}$ (155). τραπήσεται δὲ α^{μ} ἐπὶ τὸν τύπον $\alpha^{\frac{\mu\nu}{\nu}}$, ἐὰν α^{μ} ὑψωθῇ εἰς

βαθμὸν $\frac{\nu}{\pi}$ (82). τὐναντίον δὲ $\sqrt[\frac{\nu}{\pi}]{\alpha^{\frac{\mu\nu}{\pi}}} = \alpha^{\mu}$ (122).

158. Οὐκοῦν ἵνα μὲν ἀφανισθῇ τὸ ῥιζικὸν σύμβολον, διαιρετέον τὸν δείκτην διὰ τοῦ ἐπισήμου· $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$· ἵνα δ' αὖ προτεθῇ τοῦ ποσοῦ τὸ ῥιζικὸν σύμβολον, πολλαπλασιαστέον τὸν δείκτην ἐπὶ τὸ ἐπίσημον $\alpha^{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\nu}}$

159. Γ'. Ἐξέσαι ὑπαρκτικὸν δείκτην ἀντὶ λειπτικοῦ ἐκλαβεῖν, καὶ τἀνάπαλιν, μηδοτιοῦν τῆς κατὰ τὸν βαθμὸν δυνάμεως μεταποιουμένης· καὶ γὰρ ἀντὶ α^{-3} ἐξέσαι λαβεῖν $\frac{1}{\alpha^3}$, ἐπείπερ $\frac{1}{\alpha^3} = \frac{\alpha^0}{\alpha^3} = \alpha^{0-3} = \alpha^{-3}$ (55)· ἄρα „πᾶσα ποσότης, λειπτικὸν δείκτην ἔχουσα, οὐδὲν ἕ„τερόν ἐστιν, εἰμὴ ἡ μονὰς διῃρημένη διὰ τῆς αὐτῆς πο„σότητος τὸν αὐτὸν δείκτην ὑπάρχοντα ἐχούσης" (149).

160. Δ'. „Πᾶσα ποσότης ὑπαρκτικὸν μὲν ἔχου„σα δείκτην, ἐὰν ὑψωθῇ εἰς βαθμὸν λειπτικὸν, ἀποβή„σεται κλάσμα τῆς μονάδος ἔλασσον, λειπτικὸν δὲ „ὁλοχερής· καὶ γὰρ $\overline{\alpha^{\mu}}^{-\nu} = \alpha^{-\mu\nu}$ (82) $= \frac{1}{\alpha^{\mu\nu}}$ (159) καὶ αὖ $\overline{\alpha^{-\mu}}^{-\nu} = \alpha^{-\mu\times-\nu} = \alpha^{+\mu\nu}$ περὶ δὲ τῶν τοιῶνδε διαφόρων τύπων ἅλις εἴρηται κἀν (148 κτ.)·

161. Ε'. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν διαφόρων βαθμῶν δυσχερείας ἁπάσης ἐξῄρηνται· ἔσω γὰρ προσθεῖναι $2\alpha^2$ τῷ $3\alpha^2$· ἔσαι οὖν ἄθροισμα $2\alpha^2+3\alpha^2=5\alpha^2$, καὶ $3\alpha^2\chi^3$ τῷ $5\alpha^2\chi^3$· ἔσαι οὖν $3\alpha^2\chi^3+5\alpha^2\chi^3=8\alpha^2+^2\chi^3$· καὶ

$+4\chi^3\upsilon^2$ τῷ $-2\chi^3\upsilon^2$· οὐκοῦν ἔσται $4\chi^3\upsilon^2 - 2\chi^3\upsilon^2 = 2\chi^3\upsilon^2$· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν $\alpha^{-3\mu}$ καὶ α^{μ} ἔσται $\alpha^{-3\mu} + \alpha^{\mu}$ (31)· τὸ δὲ τῶν $\chi^{\nu}\alpha^{\mu}$, υ^{ρ} ἔσται $\chi^{\nu}\alpha^{\mu} + \upsilon^{\rho}$· ἔστω ἀφελεῖν ἀπὸ $4\alpha^2$ τὸ $2\alpha^2$· ἔσται οὖν ἡ διαφορὰ $4\alpha^2 - 2\alpha^2 = 2\alpha^2$· ἡ δὲ τῶν $4\alpha\chi^{\mu}$, $\alpha^{\nu}\chi^{\mu}$ διαφορὰ ἔσται $4\alpha^{\nu}\chi^{\mu} - \alpha^{\nu}\chi^{\mu} = 3\alpha^{\nu}\chi^{\mu}$· ὡσαύτως τοῦ χ^3 καὶ υ^3 διαφορὰ ἔσται $\chi^3 - \upsilon^3$, καὶ ἡ τοῦ χ^{ν} πρὸς τὸ $\upsilon^{\mu+\rho}$, ἔσται $\chi^{\nu} - \upsilon^{\mu+\rho}$ (32).

162. ϛ'. Ἐν δὲ τῷ πολλαπλασιάζειν αὐτοὺς, εἰ μὲν ὅ,τε πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς τὰ αὐτὰ ἔχωσι γράμματα, συναπτέον αὐτῶν τοὺς δείκτας· οὕτως $\alpha^2 \times \alpha^3 = \alpha^{2+3} = \alpha^5$ (11) καὶ $\chi^2 y^2 \times \chi^3 y^3 = \chi^{2+3} y^{2+3} = \chi^5 y^5$· καὶ $\alpha^{\pi} \times \alpha^{\rho} = \alpha^{\pi+\rho}$ καὶ $y^{\rho}\chi^{\nu} \times y^{\kappa}\chi^{\tau} = y^{\rho+\kappa}\chi^{\nu+\tau}$· ἔτι δὲ $\alpha^{-1} \times \alpha^2 = \frac{1}{\alpha} \times \alpha^2$ (159) $= \frac{1}{\alpha} \times \frac{\alpha^2}{1} = \alpha$· καὶ $\alpha^{-2} \times \alpha^2 = 1$, καὶ $\alpha^{\nu} \times \alpha^{-\mu} = \alpha^{\nu} \times \frac{1}{\alpha^{\mu}} = \frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}}$ κτ. εἰ δὲ διάφορα, γραπτέον κατὰ συνέχειαν τοὺς βαθμοὺς μηδενὸς μεσολαβοῦντος συμβόλου (11)· οὕτως $\alpha^2 \times \beta^2 = \alpha^2\beta^2$, καὶ $\alpha^{\mu} = \gamma^{\nu} \times \alpha^{\mu}\gamma^{\nu}$, καὶ $\alpha\beta\gamma^{\nu-1} \times \kappa^{\pi+\rho} = \alpha\beta\gamma^{\nu-1}\kappa^{\pi+\rho}$ κτ.

163. Ζ'. Διαιροῦντας δ' αὐτοὺς, εἰ μὲν τὰ αὐτὰ ἔχωσι γράμματα, ἀφαιρετέον τὸν δείκτην τοῦ διαιροῦντος ἀπὸ τοῦ τοῦ διαιρουμένου (55)· οὐκοῦν $\alpha^4 : \alpha^2 = \alpha^{4-2} = \alpha^2$ καὶ $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, καὶ $\alpha^{-4} : \alpha^4 = \frac{1}{\alpha^4} : \frac{\alpha^4}{1} = \frac{1}{\alpha^4} \times \frac{1}{\alpha^4} = \frac{1}{\alpha^8}$, καὶ $\alpha^{-\mu} : \alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}} : \frac{1}{\alpha^{\mu}} = \frac{1}{\alpha^{\mu}} \times \frac{\alpha^{\mu}}{1} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}} = 1$·

ἐὰν δὲ διάφορα ἔχωσι γράμματα, παρίςανται ἤτοι ἐν σχήματι κλάσματος, ἢ τῦ διαιρετέυ πρῶτον γραφέντος, εἶθ' ἑξῆς τῦ συμβόλυ (:) μετὰ ταῦτα τίθεται κατ' ἀκολυθίαν ὁ διαιρέτης· οἷον διαιρῦντες $α^ν$ διὰ $β^ν$ γράφομεν ἤτοι $\frac{α^ν}{β^ν}$ ἢ $α^ν : β^ν$· ὡσαύτως $α^{ν-γ} : δ^{μ-κ}$ καὶ $\frac{α^{ν-γ}}{δ^{μ-κ}}$ ἑκάτερον ἐμφαίνει τὴν τῦ $α^{ν-γ}$ διὰ $δ^{μ-κ}$ διαίρεσιν.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τύτων δῆλον καὶ ὅπως τὰς τῶν κλασματικῶν βαθμῶν πράξεις μετελευσόμεθα, εἴτ' ὖν τὴν πρόσθεσιν, τὴν ἀφαίρεσιν, τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν· σημειωτέον μόνον, ὡς ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ ἐν τῇ διαιρέσει, ἔνθα προσθέσεως τῆς τῶν δεικτῶν, καὶ ἀφαιρέσεως χρήζομεν, ἀναγκαῖον τὺς τῶν βαθμῶν κλασματίας δείκτας ἐπὶ κοινὸν ἀνάγειν ὄνομα, εἶθ' ὕτω τὰ τῆς πράξεως περαίνειν· ὑκῦν τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν $κ\frac{ν}{μ}$, $α\frac{κ}{λ}$ ἔςαι $α\frac{ν}{μ} + α\frac{κ}{λ}$, ἡ δ' αὐτῶν διαφορὰ $α^{\frac{ν}{μ}} - α^{\frac{κ}{λ}}$· τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν γινόμενον $α^{\frac{ν}{μ}+\frac{κ}{λ}} = α^{\frac{νλ+κλ}{μλ}}$· τὸ δὲ προκύπτον πηλίκον διαιρέσει τῆς ἑτέρας διὰ τῆς ἑτέρας, $α^{\frac{νλ-κλ}{μλ}}$ κτ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Λογισμὸς τῶν ῥιζικῶν.

165. Αἱ ποσότητες, ὧν προκεχάρακται τὸ σύμβολον $\sqrt{}$, ῥιζικαὶ ὀνομάζονται· καὶ τὸ μὲν ἐπὶ τȣ́τȣ τȣ̃ συμβόλȣ ποσὸν ἐπίσημον ἀκȣ́ει, τὸ δ' ἐξ ἀριστερῶν αὐτȣ̃ τȣ̃ $\sqrt{}$, συνεργός, τὸ δ' ἐν τοῖς δεξιοῖς, ποσὸν ὑπόῤῥιζον.

Ποσότης πᾶσα, ὁλοχερῆ μὲν ἐπιγεγραμμένη δείκτην, ἀεί ἐστι βαθμός, κλασματώδηδὲ, ἀείπερ ὑπάρχει ῥιζικὸν, ȣ̃ ἐπίσημον μὲν ὁ τȣ̃ κλάσματος παρονομαστὴς, ὑπόῤῥιζος δὲ αὐτὴ ἡ ποσότης εἰς βαθμὸν ὑψȣμένη ἐμφαινόμενον ὑπὸ τȣ̃ κατὰ τὸ κλάσμα ἀριθμητȣ̃· ȣ̃τως α^3 ἐστιν ὁ κύβος τȣ̃ α· $\alpha^{\frac{2}{3}}$ ἐστι $\sqrt[3]{\alpha^2}$ (122)· ἐπεὶ τοίνυν τἀναντία ἀποτελεῖ τῷ ἐπισήμῳ ὁ δείκτης, ἐκ τȣ́τȣ ἄρα, ἣν μὲν τȣ̓πίσημον ᾖ ὁλοχερὲς, ἡ ἐκτιθεμένη ποσότης ἔσται ῥίζα, βαθμὸς δὲ, ἐὰν τȣ̓ναντίον ὑπάρχῃ κλασματῶδες· καὶ τοίνυν $\sqrt[5]{\alpha}$ δηλοῖ τὴν πέμπτην τοῦ α ῥίζαν $\sqrt[\frac{1}{5}]{\alpha}$ ἐμφαίνει τὸν πέμπτον τȣ̃ α βαθμὸν, εἴτ' ȣ̃ν α^5· τῷ ὄντι γὰρ $\sqrt[\frac{1}{5}]{\alpha}$ ἰσȣ̃ται τῷ α^1, ȣ̃ ὁ δείκτης 1 ὀφείλει διαιρεθῆναι διὰ $\frac{1}{5}$ (122) $= \alpha^{\frac{1}{1}\times\frac{5}{1}}$ (205) $= \alpha^5$.

166. Μετασχηματισμὸς καλεῖται διάφορός τις μεταποίησις ἐπὶ τῶν ῥιζικῶν κατὰ χρείαν γινομένη

δίχατινὸς τροπῆς τῆς κατ᾽ αὐτὰ δυνάμεως· τοιοῖς δε χρησόμεθα ἐχομένως.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Χρησόμεθα ἐν τοῖς ἐφεξῆς τῷ ν εἰς δήλωσιν παντὸς δείκτȣ τε ϗ ἐπισήμȣ παντὸς βαθμȣ̃ ϗ ῥίζης.

167. Ἵνα πᾶν ῥιζικὸν τὸ $\beta\sqrt[\nu]{\gamma}$ τȣ̃ πρὸ αὐτȣ̃ συνεργȣ̃ β ἀπαλλάξωμεν, ἀρτέον εἰς τὸν ν βαθμὸν τὸ β, β^{ν}, καὶ τακτέον αὐτὸ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν σύμβολον ȣ̃τω $\sqrt[\nu]{\beta^{\nu}\gamma}$· ϗ γὰρ $\beta\sqrt[\nu]{\gamma} = \beta \times \sqrt[\nu]{\gamma} = \sqrt[\nu]{\beta^{\nu}} \times \sqrt[\nu]{\gamma}$, (158), $= \sqrt[\nu]{\beta^{\nu}\gamma}$· τȣ̓ναντίον ἄρα, ἵνα πρὸ τῶν δεξιῶν τȣ̃ συμβόλȣ τάξωμεν ἅπαν ποσὸν α, ὃ μετάτινος ἄλλȣ ποσȣ̃ συνίςησιν ὑπόῤῥιζον γινόμενον, ὡς ἐπὶ $\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$, ἐξακτέον τȣ̃ α τὴν ν ῥίζαν, ποιȣ̃ντας $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$, ϗ ταύτην τȣ̃ ῥιζικȣ̃ προτακτέον συμβόλȣ ȣ̃τως $\alpha^{\frac{1}{\nu}}\sqrt[\nu]{\beta}$

168. Ἵν ἅπαν ἐπίσημον μεταποιήσωμεν τὸ ν φέρε ἐπὶ τȣ̃ $\sqrt[\nu]{\beta\gamma}$, πολλαπλασιαςέον ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν ν τό,τε ἐπίσημον, ϗ τὸν δείκτην ȣ̃τω $\sqrt[\nu\pi]{\beta^{1\times\pi}\gamma^{1\times\pi}} = \sqrt[\nu\pi]{\beta^{\pi}\gamma^{\pi}}$· εὔδηλον γὰρ ὅτι $\sqrt[\nu\pi]{\beta^{\pi}\gamma^{\pi}} = \beta^{\frac{\pi}{\nu\pi}}\gamma^{\frac{\pi}{\nu\pi}} = \beta^{\frac{1}{\nu}}\gamma^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\beta\gamma}$ (167)· ἵνα δὲ μεταποιήσωμεν τὸ τȣ̃ $\frac{\beta}{\gamma}\sqrt[\nu]{\frac{\delta}{\zeta}}$ ἐπίσημον ν, γραπτέον $\frac{\beta}{\gamma}\sqrt[\nu\pi]{\frac{\delta^{\pi}}{\zeta^{\pi}}}$· ἵν᾽ ἄρα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίσημον δύω τινα ῥιζικὰ τὰ $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$, $\sqrt[\nu]{\frac{\delta}{\zeta}}$ ἀγά-

γωμεν, πολλαπλασιαςέον τὸ ἐπίσημον τȣ̃ δευτέρȣ π ἐπὶ τὸ τȣ̃ πρώτȣ ν, ὡσαύτως ϗ τὸν δείκτην τȣ̃ δευτέρȣ ὑπορρίζȣ· ϗ τἀνάπαλιν· ἀντὶ ȣ̃ν $\sqrt[\pi]{\frac{\delta}{\zeta}}$ γραπτέον $\sqrt[\pi\nu]{\frac{\delta^{1\times\nu}}{\zeta^{1\times\nu}}}$ $=\sqrt[\pi\nu]{\frac{\nu\delta}{\nu\zeta}}$ · ἀντὶ δὲ $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$, γραπτέον $\alpha\sqrt[\nu\pi]{\beta^{\pi}}$ · ἡ δ' ἑκατέρȣ τῶν ῥιζικῶν δύναμις τȣ̃τον τὸν τρόπον ȣ̉ μεταποιηθήσεται· πολλαπλασιαζομένων γὰρ τȣ̃ δείκτȣ ϗ τȣ̃ ἐπισήμȣ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν, διὰ δύω ἐναντίων πράξεων, τὸ ποσὸν ἐπὶ τῆς αὐτῆς διατηρεῖται δυνάμεως (123).

169. Ἐντεῦθεν ἄρα, ἐφ' ᾧ πλείω ῥιζικὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἐπισήμȣ ποιήσωμεν τὰ $\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\sqrt[\pi]{\alpha}$, $\sqrt[\kappa]{\delta}$, πολλαπλασιαςέον ἕκαςον ἐπίσημον ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐπισήμων, ϗ τὸ ὑπόῤῥιζον ἀρτέον εἰς βαθμὸν, ȣ̃ δείκτης ἂν εἴη τὸ αὐτὸ γινόμενον· ἔσονται ἄρα ȣ̃τω

$$\sqrt[\nu\pi\kappa]{\alpha^{\pi\kappa}},\ \sqrt[\nu\pi\kappa]{\beta^{\nu\kappa}},\ \sqrt[\nu\pi\kappa]{\delta^{\nu\pi}}$$

170. Ἵνα ποσόν τι τὸ μ ὑπόῤῥιζον ποιήσωμεν τῷ $\sqrt[\nu]{\beta}$, πολλαπλασεέον μὲν διὰ μ^{ν} τὸ ὑπόῤῥιζον β, διαιρετέον δὲ διὰ μ τὸν τȣ̃ ῥιζικȣ̃ συνεργόν· γενήσεται τοίνυν ȣ̃τω $\frac{1}{\mu}\sqrt[\nu]{\beta\mu^{\nu}}$· ἔςι γὰρ $\frac{1}{\mu}\sqrt[\nu]{\beta\mu^{\nu}}=\frac{1}{\mu}\times\sqrt[\nu]{\beta\mu^{\nu}}$

$$\frac{1}{\mu}\sqrt[\nu]{\beta\mu^{\nu}}=\frac{\beta^{\frac{1}{\nu}}\ \mu^{\frac{\nu}{\nu}}}{\mu}\ (165)=\frac{\beta^{\frac{1}{\nu}}\mu}{\mu}=\beta^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\beta}$$

κατὰ τοίνυν τὴν χρείαν οἵδε οἱ μεταχηματίσμοὶ γενήσονται ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς πράξεων κατὰ τόνδε τὸν τρόπον.

171. Ἥτε πρόσθεσις ϗ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ῥιζικῶν

ἀπολύτως, ὡς εἴθισαι, ἐκτελοῦνται· οὕτω τὸ ἄθροισμα τοῦ $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$ καὶ $\sqrt[\pi]{\gamma}$ ἐστιν $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}+\sqrt[\pi]{\gamma}$, ἡ δὲ τοῦ $\sqrt[\nu]{\alpha}$ πρὸς $\sqrt[\pi]{\beta}$ διαφορὰ ἐστι $\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\pi]{\beta}$· εἰδ' ἀπαντῷεν ῥιζικὰ τὸ αὐτότε ἐπίσημον, καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόῤῥιζον ἔχοντα, ἀνακτέον τοὺς ὅρους ὡς ὁμοίους, καθάπερ ἄλλοθι κεκανόνισαι· ἔχοντες φέρε $2\sqrt[\nu]{\beta}+4\sqrt[\nu]{\beta}$ γράφομεν $+6\sqrt[\nu]{\beta}$· ἐν γένει δὲ ἔχοντες $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}+\gamma\sqrt[\nu]{\beta}$, δυνάμεθα γράφειν $\overline{\alpha+\gamma}\sqrt[\nu]{\beta}$· ὅπερ καθ' ἑαυτὸ εὔδηλον.

172. Ἵνα ῥιζικὸν ἅπαν τὸ $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ἐφ' ὁλοσχερὲς τὸ μ πολλαπλασιάσωμεν, ἢ καὶ τοὐναντίον, πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸ ὁλοσχερὲς μ τὸν τοῦ ῥιζικοῦ συνεργόν· $=\mu\times 1\sqrt[\nu]{\alpha}=\mu\sqrt[\nu]{\alpha}$· ἐπὶ δὲ πολλαπλασιασμῷ ῥιζικοῦ ἐπὶ ῥιζικόν, ἀνακτέον ταῦτα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίσημον (163) καὶ πολλαπλασιαστέον θατέρου μὲν τὸν συνεργὸν ἐπὶ τὸν θατέρου, θάτερον δὲ ὑπόῤῥιζον ἐπὶ θάτερον· οὕτως οὖν $2\sqrt[3]{\beta^3}\times 3\sqrt[3]{\beta^3}=2\times 3\sqrt[3]{\beta^3\times\beta^3}=6\sqrt[3]{\beta^6}=6\beta^2$· καὶ γὰρ $1\sqrt[3]{\beta^3}=\beta$. ἄρα $2\sqrt[3]{\beta^3}=2\beta$, καὶ $3\sqrt[3]{\beta^3}=3\beta$· ἄρα $2\sqrt[3]{\beta^3}\times 3\sqrt[3]{\beta^3}=2\beta\times 3\beta=6\beta^2$.

173. Ἐπὶ δὲ διαιρέσει τῶν ῥιζικῶν, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὴν ἐναντίαν τῇ διαιρέσει βαίνοντος, ἀναχθέντα, εἰ δέοι, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίσημον διαιρετέον ἐνταῦθα διὰ θατέρου θάτερον, τὰ ἐκεῖθι πολλαπλασιασθέντα· οὕτως

οὖν τὸ πηλίκον τοῦ $\sqrt[\nu]{\beta}$ διαιρεθέντος διὰ τοῦ ὁλοχεροῦς μ, ἔϛαι $= \frac{1}{\mu}\sqrt[\nu]{\beta}$· τὸ δὲ πηλίκον τοῦ α $\sqrt[\nu]{\beta}$ διαιρεθέντος διὰ μ $\sqrt[\nu]{\delta}$, ἔϛαι $= \frac{\alpha}{\mu}\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\delta}}$.

174. Ἵνα πᾶν ῥιζικὸν τὸ α $\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}}$ ἐπὶ πάντα βαθμὸν τὸν μ ὑψώσωμεν, πολλαπλασιαϛέον ἐπὶ τὸν τοῦ βαθμοῦ δείκτην μ τὸν τοῦ κατὰ τὸν ῥιζικὸν συνεργοῦ α δείκτην, καὶ τὸν τῆς ὑποῤῥίζου ποσότητος, οὕτως, $\alpha^{1\times\mu}\sqrt[\nu]{\beta^{\pi\mu}} = \alpha^{\mu}\sqrt[\nu]{\beta^{\pi\mu}}$· ἔνδηλον γὰρ, ὅτι, φέρε, ὁ τοῦ α $\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}}$ κύβος ἐϛὶν $= \alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}} \times \alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}} \times \alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}} = \alpha^{3}\sqrt[\nu]{\beta^{3\pi}}$ (172)· τοὐναντίον ἄρα πρὸς ἐξαγωγὴν ἁπάσης ῥίζης τῆς ν ἀπὸ ῥιζικοῦ τοῦ α $\sqrt[\nu]{\beta}$ διαιρετέον διὰ ν τόν τε τοῦ α συνεργοῦ καὶ τὸν τοῦ β, ὑποῤῥίζου ποσοῦ, τοὺς δείκτας, οὕτως, $\alpha^{\frac{1}{\nu}}\sqrt[\nu]{\beta^{\frac{1}{\nu}}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ποσῶν ἐπιπλάϛων, ἢ κατ' ἐπίνοιαν.

175. Ἔϛω $\sqrt{-\alpha^{2}}$· αὕτη οὖν ἡ ῥίζα προφανῶς οὐκ ἔϛιν οὔτε $+\alpha$, οὔτε $-\alpha$· καὶ γὰρ $\alpha\times\alpha=\alpha^{2}$, καὶ $-\alpha$

$\times - \alpha = \alpha^2$· ἄρα $\sqrt{-\alpha^2}$ ἐςὶ ῥίζα κατ' ἐπίνοιαν, ἢ ποσὸν ἐπίπλασον· ἐν γένει δὲ ἡ παντὸς λειπτικȣ̃ ποσȣ̃ ῥίζα, ἀρτιαρίθμȣ εὐμοιρȣ̃σα ἐπισήμȣ, ἐςὶ ποσὸν ἐπίπλαςον (84)· νοητέον δὲ ταὐτὸν κἀπὶ πάσης ῥίζης, ἧς τὸ μὲν ἐπίσημον ἐςὶν ἄρτιον, ἡ δὲ ποσότης λειπτικὴ, ὁ δ' ἐπ' αὐτῆς δείκτης ὁστισȣ̃ν· ȣ̃τω $\sqrt{-\alpha}$, ἢ $\sqrt[4]{-\alpha}$ κτ. εἰσὶ ποσότητες κατ' ἐπίνοιαν· πολλήτις ȣ̃ν ϗ εὐαίσθητος ἡ διαφορὰ τῆς λειπτικῆς ποσότητος, τῆς τε ἀνυπάρκτȣ ϗ τῆς ἀῤῥήτȣ, περὶ ἧς ὕςερον· ἡ μὲν γὰρ λειπτικὴ ποσότης $-\alpha^2$ προδήλως ἐςὶν ἔχȣσα δυνατῶς· ἔςω γὰρ $\alpha = 2$, $-\alpha^2$ ἔςαι $= -4$, κατάςασις ἀληθὴς τȣ̃ πρὸς τῷ μηδὲν ἔχειν ϗ 4 ὀφείλοντος· τῆς δ' ἀῤῥήτȣ ποσότητος ἐπ' ἄπειρον τῇ δυνάμει προσπελάζειν δυνάμεθα, ἐξευρίσκοντες τῇ τȣ̃ λογισμȣ̃ ἀκριβείᾳ ἱκανώτατα αὐτῆς μέρη (144)· τὰ γάρτοι ἐπίπλαςα ποσὰ, οἷον τὸ $\sqrt{-\alpha^4}$, ἀδύνατά εἰσι πάντῃ, ϗ γέλωτ' ἄντις ὀφλήσειεν, εἰ διὰ προσεγγίσεως τὴν τοιȣ̃δε ποσȣ̃ δύναμιν ἀποπειρῷτο ἐκτιμῆσαι· ἐκ τῶν τοιῶνδε μέντοι ἀνυπαρκτȣ́ντων ποσῶν διὰ τῶν τȣ̃ λογισμȣ̃ πράξεων πραγματικὰ ποσὰ, τȣ̃το δὴ τὸ θαυμάσιον, ἀναφύονται, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὀψόμεθα.

176. Αἰεὶ τοίνυν δυνάμεθα ζητεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ποσοτήτων $\sqrt{-\alpha}$, $\sqrt{-\beta}$, ϗ τὴν μεταξὺ αὐτῶν διαφορὰν, ϗ ἔτι τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, ναὶ μὴν ϗ τὸ διαιρέσει δι' ἀλλήλων προϊὸν πηλίκον· ἴδωμεν ȣ̃ν ϗ ἐπ' αὐτῶν τὰς τελȣμένας τέσσαρας ταύτας πράξεις.

177. Ἔςω ȣ̃ν συνάψαι τὰς $\sqrt{-\alpha}$, $\sqrt{-\beta}$, $\sqrt{-\gamma}$, $-\sqrt{-\delta}$· ἐκȣ̃ν τῶν συμβόλων αὐτοῖς τῶν τῆς συνάψεως προταττομένων ȣ̓δενὶ σὺν ἔργῳ συνάπτονται·

ϗ δὴ τὸ τῶν προτεθεισῶν ἄθροισμα ἔςαι $\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta}$, $+ \sqrt{-\gamma} - \sqrt{-\delta}$· ὡσαύτως τὸ ἄθροισμα τῶν $-\sqrt{-\zeta}$, $3\sqrt{-\beta^2}$, $\gamma\sqrt{-\pi^4}$, ἔςαι $\gamma\sqrt{-\pi^4} + 3\sqrt{-\beta^2} - \sqrt{-\zeta}$· ἡ δέγε μεταξὺ δυεῖν ἐπιπλάσων ποσοτήτων διαφορὰ, φέρε τῆς $\sqrt{-\alpha}$, ϗ $\sqrt{-\gamma}$· ἔςαι $\sqrt{-\alpha} - \sqrt{-\gamma}$ κτ. (31, 32).

178. Εἰς τὸν αὐτῶν πολλαπλασιασμὸν, ἐπεὶ $\sqrt{\alpha} \times \sqrt{\alpha} = \alpha$ (172), δῆλον ὅτι, ῥιζικὸν ποσὸν ἐπὶ ῥιζικὸν ὁμοβάθμιον πολλαπλασιάζοντες, τὴν ὑπόῤῥιζον ἀποφερόμεθα ποσότητα μεθ' ἧ εἶχε συμβόλȣ ὑποκειμένη τῷ ῥιζικῷ· ἐκȣ̃ν ϗ $\sqrt{-\alpha} \times \sqrt{-\alpha} = -\alpha$· ἐπεὶ δὲ ϗ πρὸ τȣ̃ ῥιζικȣ̃ τίθεται σύμβολον τὸ $+$, ἢ τὸ $-$, ταύτητοι ἔςαι ποσότης ἡ μὲν $-\sqrt{-\alpha}$ ἄλλη δὲ τυχὸν $+\sqrt{-\alpha}$· ἐπεὶ δὲ πρὸ τȣ̃ ῥιζικȣ̃ συνεργὸς προτίθεται, ὡς $\alpha\sqrt{-\gamma}$, ἀπόντος τȣ́τȣ νοητέον ἐςὶ τὴν μονάδα. Ταῦτ' ἄρα $\sqrt{-\alpha} = 1\sqrt{-\alpha}$, ϗ $-\sqrt{-\alpha} = -1\sqrt{-\alpha}$· ἐὰν ȣ̃ν προκέηται πολλαπλασιάσαι $+1\sqrt{-\alpha}$ ἐπὶ $+1\sqrt{-\alpha}$, ἔςαι κατὰ τȣ̀ς ἀποδοθέντας κανόνας $+1\sqrt{-\alpha} \times +1\sqrt{-\alpha} = +1 \times -\alpha = -\alpha$ (37), ϗ $-\sqrt{-\alpha} \times -\sqrt{-\alpha} = -1\sqrt{-\alpha} \times -1\sqrt{-\alpha} = +1 \times -\alpha = -\alpha$· ϗ $-\sqrt{-\alpha} \times +\sqrt{-\alpha} = -1\sqrt{-\alpha} \times +1\sqrt{-\alpha} = -1 \times -\alpha = \alpha$· δῆλον ἄρα ὡς ἐξ ἐπιπλάσων ποσοτήτων πολλαπλασιασμῷ παραχθείη ἂν ποσότης λογικὴ ϗ πραγματική.

179. Ἐὰν δὲ ποσοτήτων ἐπιπλάσων αἱ ὑπόῤῥιζοι μὴ ταυτίζωνται ὡς $\sqrt{-\alpha}$, ϗ $\sqrt{-\beta}$, τὰ γινόμενα πορισθήσονται κατὰ τὰ ἑξῆς ὑποδείγματα· ἔςω πολλαπλασιάσαι $\alpha\sqrt{-\alpha}$ ἐπὶ $-\sqrt{-\beta}$

ἐκȣ̃ν γενήσεται $-\alpha.\sqrt{-\alpha} \times \sqrt{-\beta}$

ἐκ δὲ $\sqrt{-\beta} \times \sqrt{\beta}$ ἔςαι $\sqrt{-\beta\beta}$· ἐπεὶ γὰρ $\sqrt{\beta} = \beta^{\frac{1}{2}}$ (124) ἄρα $\sqrt{-\beta} \times \sqrt{\beta} = \sqrt{-\beta} \times \beta^{\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{1}{2}}\sqrt{-\beta}$, ϗ τοῦ συνεργοῦ τετραγωνισθέντος ($\beta^{\frac{1}{2}} \times \beta^{\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{2}{2}} = \beta$), ϗ πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν ὑπόῤῥιζον (167) ἔςαι $\sqrt{-\beta\beta}$

Ὑποδείγματα πολλαπλασιασμοῦ

ἔςω πολλαπλασιάσαι τὴν δυώνυμον ποσότητα $\sqrt{-3}+\sqrt{-2}$ ἐπὶ τὴν μονώνυμον $+\sqrt{-3}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{-3}+\sqrt{-2} \\ +\sqrt{-3} \\ \hline \text{γινόμενον } -3-\sqrt{-2} \end{array}$$

ὅτι δὲ $\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} = -\sqrt{6}$ δείκνυται ῥᾷςα· ἔςι γὰρ $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$ (ὡς δῆλον ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος, ἔνθα ἐγένετο $\sqrt{-\beta} \times \sqrt{\beta} = \sqrt{-\beta\beta}$) ϗ $\sqrt{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$· οὐκοῦν $\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{6} \times -1 = -1\sqrt{6} = -\sqrt{6}$

Ἕτερον Ὑπόδειγμα

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3} \\ 3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2} \\ \hline -45-6\sqrt{15} \qquad\qquad \\ +6\sqrt{10}+4\sqrt{6} \\ \hline -45-6\sqrt{15}+6\sqrt{10}+4\sqrt{6} \end{array}$$

ἔςι γὰρ $3\sqrt{-5} \times 3\sqrt{-5} = 9 \times -5 = -45$, ϗ $3\sqrt{-5} \times 2\sqrt{-3} = 3\sqrt{5} \times \sqrt{-1} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{-1} = 3 \times 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = 6\sqrt{15} \times -1 = -6\sqrt{15}$· ϗ $-2\sqrt{-2} \times 3\sqrt{-5} = -2.\sqrt{2}.\sqrt{-1} \times 3\sqrt{5}.\sqrt{-1} = -2.$

3. $\sqrt{2}.\sqrt{5}\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-6\sqrt{10}\times-1$ $=+6\sqrt{10}$. ὡσαύτως δὲ καὶ $-2\sqrt{-2}\times+2\sqrt{-3}=4\sqrt{6}$.

$$\begin{array}{l} \text{ἕτερον}\quad \sqrt{\alpha}-2\sqrt{-\beta} \\ \quad\quad \sqrt{\gamma}+3\sqrt{-\beta} \\ \hline \sqrt{\alpha\gamma}-2\sqrt{-\beta}.\sqrt{\gamma} \\ \quad\quad +3\sqrt{\alpha}.\sqrt{-\beta}+6\beta \\ \hline \sqrt{\alpha\gamma}-2\sqrt{-\beta}.\sqrt{\gamma}+3\sqrt{\alpha}.\sqrt{-\beta}+6\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ἄλλο}\quad 2+\sqrt{-5} \\ \quad\quad 3-\sqrt{-2} \\ \hline 6+3\sqrt{-5} \\ \quad -2\sqrt{-2}+\sqrt{10} \\ \hline 6+3\sqrt{-5}-5-\sqrt{-2}+\sqrt{10} \end{array}$$

180. Ἡ δὲ τῶν ἐπιπλάςων ποσῶν διαίρεσις ἔτως ἐκτελεῖται· ἐὰν φέρε προκέηται διαιρεῖν $\sqrt{-\alpha}$ διὰ $\sqrt{-\beta}$, πηλίκον ἔςαι $\frac{\sqrt{-\alpha}}{\sqrt{-\beta}}$· ἐὰν δὲ τὴν λογικὴν γ διὰ τῆς ἐπιπλάςϐ $\sqrt{-\beta}$, ἔςαι $\frac{\gamma}{\sqrt{-\beta}}$· ἐκ δὲ τῆς διαιρέσεως $(\alpha\sqrt{-\delta}):(\beta\sqrt{-\delta})$ ἀποισόμεθα $\frac{\alpha\sqrt{-\delta}}{\beta\sqrt{-\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}$ ἐκ δὲ $(-\beta):(\sqrt{-\beta})$ ἔςαι $\frac{-\beta}{\sqrt{-\beta}}=\sqrt{-\beta}$· ᾗ γὰρ $-\beta$ ἔςι τετράγωνον, ἔ ῥίζαι $\sqrt{-\beta}$, $\sqrt{-\beta}$, εἴγε $\sqrt{-\beta}\times\sqrt{-\beta}=-\beta$· ὅκϐν $\frac{-\beta}{\sqrt{-\beta}}=\frac{\sqrt{-\beta}.\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\beta}}$

$= \sqrt{-\beta}$· ὡσαύτως $(\sqrt{-\beta}) : -\beta = \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\beta}.\sqrt{-\beta}} = \frac{1}{\sqrt{-\beta}}$· ϗ $(\alpha\sqrt{-\beta\beta}) : (-\beta\beta) = \frac{\alpha\sqrt{-\beta\beta}}{-\beta\beta} = \frac{\alpha\sqrt{-\beta\beta}}{\sqrt{-\beta\beta}\cdot\sqrt{-\beta\beta}} = \frac{\alpha}{\sqrt{-\beta\beta}}$· ϗ ἔτι $+\sqrt{-3} : -\sqrt{-3} = \frac{+\sqrt{-3}}{-\sqrt{-3}} = \frac{+1\sqrt{-3}}{-1\sqrt{-3}} = \frac{+1}{-1} = -1$ ἀλλ' ἔτι ἐςιν $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{4} = 2$· ϗ $\frac{-\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{-\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{4} = -2$, ϗ $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}$· δῆλον ȣ̃ν, ὡς χρήσιμον πάνυ τοῖς πρωτοπείροις τὸ ȣ̎τως ἀναλύειν τὰ ποσά· εὐκατάληπτα γὰρ ȣ̎τω καθίςανται τὰ ἄλλως παράδοξα δοκȣ̃ντα γινόμενά τε ϗ πηλίκα ἔντε τῷ πολλαπλασιασμῷ, κἀν τῇ διαιρέσει.

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Περὶ Λόγων καὶ Ἀναλογιῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Ὁρισμοί.

181. Λόγος, ἢ σχέσις, ἐςὶ τρόπος ποιὸς, καθ᾽ ὃν ποσότης πρὸς ποσότητα θεωρεῖται· εἰ μὲν οὖν δυοῖν ποσῶν παραβαλλομένων θάτερον ὡς μεῖζον ἢ ἔλασσον θατέρου θεωρηθείη, ὁ λόγος ἀκούει Ἀριθμητικός· εἰ δὲ θάτερον ὡς ἅπαξ ἢ πλεονάκις περιεκτικὸν θατέρου ὁλοσχερῶς ἢ ἐν μέρει ἐκληφθῇ, ὁ λόγος Γεωμετρικὸς ὀνομάζεται.

182. Λόγος μὲν οὖν ἀριθμητικός ἐςιν ἡ ὑπεροχὴ, ἢ ἡ διαφορὰ, ᾗ ποσὸν ποσοῦ διαφέρει, πρὸς αὐτὸ παραβαλλόμενον· ἀφαιρέσει ἄρα γινώσκεται.

183. Γεωμετρικὸς δέ ἐςι τὸ πηλίκον, ὃ ἐμφαίνει ὁσάκις θάτερον θατέρῳ ποσῷ ἐμπεριέχεται· διαιρέσει ἄρα γινώσκεται.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ὁ τοῦ 10 πρὸς 2 ἀριθμητικὸς λόγος ἐςὶν 8, εἴγε $10 - 2 = 8$· ὁ δὲ τοῦ 10 πρὸς 2 γεω-

μετρικός ἐςὶ 5, ἐκληφθέντος ὡς διαιρετέȣ τȣ͂ 10, εἴγε $\frac{10}{2}=5$· ἀλλ᾽ ὁ τȣ͂ 2 πρὸς 10, ἐκλαμβανομένȣ ἤδη τȣ͂ 2 διαιρετέȣ, ἐςὶ $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

184. Παντὶ ἄρα λόγῳ δυεῖν ποσοτήτων δεῖ, αἳ καλείσθων ὅροι τȣ͂ λόγȣ· καὶ ὁ μὲν πρῶτος καλεῖται ἡγȣ́μενος, ὁ δὲ δεύτερος ἑπόμενος· ἐν ἓν τῷ τȣ͂ 10 πρὸς 2 λόγῳ, 10 μέν ἐςιν ἡγȣ́μενος, 2 δὲ ὁ ἑπομένος.

Α῞πας ἀριθμητικὸς λόγος, οἷος ὁ τȣ͂ 10 πρὸς 2, ὕτως ἐκτίθεσθαι ἐκράτησε: 10· 2· ὁ δὲ γεωμετρικὸς, 10 : 2. ἐφ ἑκατέρȣ δὲ ἀπαγγέλλεται: 10 πρὸς 2.

185. Ο῞ταν τέσσαρα ποσὰ ὕτως ἐκκέωνται, ὥςε τὸν τȣ͂ πρώτȣ πρὸς τὸ δεύτερον λόγον τὸν αὐτὸν εἶναι τῷ τȣ͂ τρίτȣ πρὸς τὸ τέταρτον, ταῦτα τὰ τέσσαρα ποσὰ ἐν ἀναλογίᾳ εἶναι λέγεται.

186. Α᾽ναλογία ἄρα ἐςὶν ἡ δυοῖν λόγων ἰσότης.

187. Ω῞σπερ ἄρα δύω εἴδη λόγων εἰσὶν, ὕτω καὶ δύω εἴδη ἀναλογιῶν, ἀμέλειτοι Α᾽ριθμητικὴ ἀναλογία καὶ Γεωμετρική.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Οἱ τέσσαρες ἓν ἀριθμοὶ 2, 5, 4, 7 παριςῶσιν ἀναλογίαν ἀριθμητικὴν, εἴγε ἥτις διαφορὰ, εἴτ᾽ ἓν λόγος ἀριθμητικὸς, ἐςὶ τῶν δύω προτέρων, ἡ αὐτή ἐςι καὶ τῶν δύω ὑςέρων· καὶ γὰρ 5 — 2 = 3, καὶ 7 — 4 = 3· ἀλλὰ γὰρ 2, 6, 5, 15 ἐμφαίνȣσιν ἀναλογίαν γεωμετρικὴν, εἴγε τὸ πηλίκον, ἢ ὁ γεωμετρικὸς λόγος, ὁ ἐν τοῖς δυσὶ προτέροις, ὁ αὐτὸς ἐςι κἀν τοῖς δυσὶν ὑςέροις· 6 γὰρ διαιρεθεὶς διὰ 2 δίδωσι 3, 15 δὲ διαιρεθεὶς διὰ 5 ὡσαύτως παρέχει 3.

Γράφȣσι δὲ τὴν μὲν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν ὕτως 2 . 5 : 4 . 7, ἐφ᾽ ἧς ἀναγινώσκεται: 2 πρὸς 5 ἐςὶν

ὡς 4 πρὸς 7· τὴν δὲ γεωμετρικὴν, οἷα ἐςὶν ἡ 2, 6, 5, 15, ἔτω, 2 : 6 : : 5 : 15, ἣν ἀναγινώσκομεν ὡσάυτως: 2 πρὸς 6 ὡς 5 πρὸς 15.

188. Πᾶσα ἄρα ἀναλογία τέσσαρας ποσότητας, εἴτ' ἒν ὅρες περιέχει· ϗ ὁ μὲν πρῶτος ϗ ἔσχατος τῆς ἀναλογίας ὀνομάζονται ἄκροι, ὁ δὲ δεύτερος ϗ τρίτος, μέσοι· ἐν ἒν τῇ 2 : 6 : : 5 : 15 ἀναλογίᾳ 2 ϗ 15 εἰσὶν ἄκροι, 6 δὲ ϗ 5 μέσοι.

189. Ἡ ἀναλογία καλεῖται μὲν ὀρθὴ, ὅταν, ὃν λόγον ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ὅρον, τὸν αὐτὸν ἔχῃ ϗ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον· Ἀντίθετος δὲ, ἢ Ἀντίςροφος, ἢ ἐν Ἀντιπεπονθότι λόγῳ εἶναι τέσσαρα ποσὰ λέγονται, ὅταν, ὃν λόγον ἔχει ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἔχῃ ὁ τέταρτος πρὸς τὸν τρίτον· 2 : 6 : : 5 : 15 εἰσὶν ἐν ὀρθῇ ἀναλογίᾳ· τὸ γὰρ διαιρέσει τε̃ δευτέρε διὰ τε̃ πρώτε προϊὸν πηλίκον ταὐτόν ἐςι τῷ διαιρέσει τε̃ τετάρτε διὰ τε̃ τρίτε· ἀλλὰ 2 : 6 : : 15 : 5 εἰσὶν ἐν ἀναλογίᾳ ἀντιθέτῳ· εἴγε, τε̃ δευτέρε διὰ τε̃ πρώτε διαιρεθέντος, ἀνάγκη τὸ αὐτὸ θηρωμένοις πηλίκον διελεῖν ἐ τὸν τέταρτον διὰ τε̃ τρίτε, ἀλλὰ τὸν τρίτον διὰ τε̃ τετάρτε· μεταποιηθήσεται ἄρα ἡ ἀναλογία εἰς ὀρθὴν, ἢ εἰς ἀντίςροφον, ἑνὸς μόνον μέσε τὸν ἑνὸς ἄκρε ἐπισχόντος χῶρον.

190. Ὅταν τέσσαρα ποσὰ παρισῶσιν ἀναλογίαν ὀρθὴν, οἱ δύω πρότεροι ὅροι ὀρθὸν λόγον ἔχειν πρὸς τὲς δύω ὑςέρες λέγονται· ὅταν δὲ ἀντίςροφον, οἱ πρότεροι δύω πρὸς τὲς ὑςέρες ἀντίςροφον λόγον, ἢ ἀντιπεπονθότα ἔχειν λέγονται.

191. Ὅταν ἐπίτινος ἀναλογίας ὁ ἑπόμενος τε̃ πρώτε λόγε γίνηται τε̃ δευτέρε ἡγέμενος, ὥσπερ ἐν τῇδε τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, 2 : 6 : 6 : 18, ἡ ἀναλογία

ἀκȣει συνεχής. ὁ δ᾽ ἐπανειλημμένος ὅρος, ὡς ὁ 6, μέσος ἀνάλογος, ὃν ἅπαξ εἰώθασι γράφειν ȣτω ∺ 2 : 6 : 12· τὴν δὲ συνεχῆ ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν οἷον 2 . 4 : 4 . 6, ȣτω ÷ 2 . 4 . 6.

192. Στίχος τις ὅρων ἐν συνεχεῖ ὄντων ἀναλογίᾳ ὀνομάζεται Πρόοδος· ȣτως ȣ͂ν ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 κτ ἐςι πρόοδος ἀριθμητική, εἴγε πάντες οἱ ὅροι τȣ͂δε τȣ͂ ςίχȣ τὴν αὐτὴν ἔχοντες πρὸς ἀλλήλȣς διαφοράν, εἴτ᾽ ȣ͂ν 2, ἐπαναλαμβάνεσθαι δύνανται παρὰ τὸν πρῶτον ϗ ὕςατον· ἀναγνώσκεται δὲ ἡ ἔκθεσις ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 κτ ȣτως· 1 πρὸς 3, ὡς 3 πρὸς 5, ὡς 5 πρὸς 7, ὡς 7 πρὸς 9 κτ. ὁ δὲ ςίχος ∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 κτ. ἐςι πρόοδος γεωμετρική· ἕκαςος γὰρ τῶνδε τῶν ὅρων διαιρȣμενος διὰ τȣ͂ προτέρȣ, ϗ τὸ αὐτὸ προάγων πηλίκον, ἐπαναλαμβάνεσθαι δύναται παρὰ τὸν πρῶτον καὶ ἔσχατον· ἀναγινώσκεται δὲ ϗ αὕτη ὡσαύτως: 1 πρὸς 3, ὡς 3 πρὸς 9, ὡς 9 πρὸς 27, ὡς 27 πρὸς 81 κτ.

193. Ὅταν προόδȣ οἱ ὅροι προϊόντες μεγεθύνωνται, ἡ πρόοδος καλεῖται αὔξουσα· ὅταν δ᾽ ἐλαττῶνται, μειȣμένη· πρόοδος ȣ͂ν αὔξȣσα ἐςὶν ἡ ∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 κτ, μειȣμένη δὲ ∺ 81 : 27 : 9 : 3 : 1 κτ.

Πᾶσα ἄρα αὔξȣσα πρόοδος ἀποκαθίςαται μειȣμένη ϗ ἐξ ἐναντίας τῆς τῶν ὅρων τάξεως ἀντιςραφείσης.

194. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἐπείπερ ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία ἐν πλείονι χρήσει γίνεται τοῖς Μαθηματικοῖς· διὰ ταῦτα, ὅταν ἁπλῶς λέγηται λόγος, ἀναλογία, λόγον τε ϗ ἀναλογίαν τὰ γεωμετρικὰ ἐννοȣ͂μεν· ἀναλογίαν δὲ ἁπλῶς λέγοντες τὴν ὀρθὴν ἀεὶ ἐκλαμβάνομεν.

195. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἡ τῶν ἀναλογιῶν πραγματεία τῶν, ὧν προβάλλονται οἱ Μαθηματικοὶ, τὸ λυσιτελέ-

ϛατον ὑπάρχει· ϗ γὰρ ϗ ἐπὶ τῶν ἄλλων μερῶν τῆς ἐπιϛήμης ταύτης μεταφέρεται, ϗ μάλιϛα ἐπὶ τῶν φυσικῶν ἐπεκτείνεται γνώσεων· ϗ πάντα δὲ τὰ ὄντα ἐκ τῆς ἀναλογίας τό, τε καλὸν ϗ τὸ τέλειον ἐπλέτησαν. ἐπάναγκες ἄρα ἰδιαιτέραν τινὰ καταβαλέσθαι σπεδὴν εἰς τὴν ταύτης ἔκθεσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Λόγων καὶ Ἀναλογιῶν ἀριθμητικῶν.

196. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Παντὸς ἀριθμητικȣ̃ λόγȣ ὁ ἑπόμενος ὅρος ἴσος ἐϛὶ τῷ ἡγȣμένῳ σὺν, ἢ πλὴν τῆς διαφορᾶς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔϛι γὰρ ἤτοι μείζων ἢ ἐλάσσων τȣ̃ ἡγȣμένȣ· ϗ εἰ μὲν ἐκεῖνο, συναφθέντος τῷ ἡγȣμένῳ τȣ̃, ᾧ διενήνοχεν αὐτȣ̃ ὁ ἑπόμενος, γενήσονται οἱ ὅροι ἰσάλληλοι· ἔϛιν ἄρα ὁ ἑπόμενος ἴσος τῷ ἡγȣμένῳ σὺν τῇ διαφορᾷ· εἰ δὲ τȣ̃το, ἀποχωρισθέντος ἐκ τȣ̃ ἡγȣμένȣ τȣ̃, ᾧ ὑπερεῖχε τȣ̃ ἑπομένȣ, ἔσονται αὖθις οἱ ὅροι ἰσάλληλοι· ἰσȣ̃ται ἄρα ὁ ἑπόμενος τῷ ἡγȣμένῳ πλὴν τῆς διαφορᾶς· ἄρα κτ. Ο.Ε.Δ.

Ρᾷϛα δὲ τȣ̃το καταφαίνεται ἐν ἀριθμοῖς· τȣ̃ μὲν γὰρ ἀριθμητικȣ̃ λόγȣ 2 . 5, ὁ ἑπόμενος 5 ἐϛὶν ἴσος τῷ ἡγȣμένῳ 2 σὺν τῇ διαφορᾷ 3· τȣ̃ δὲ 5· 2 ὁ ἑπόμενος 2 ἐϛὶν ἴσος τῷ 5 πλὴν τῆς διαφορᾶς 3.

197. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τῶν ἀριθμητικὸν ὁντιναȣ̃ν λόγον συμπληρȣσῶν δύω ποσοτήτων, ἡ πρώτη ἀεὶ διὰ τȣ̃ α γράμματος παρίϛασθαι δύναται· ἡ δ' αὐτῶν διαφο-

ρὰ διὰ τȣ̃ δ· εἰ μὲν ȣ̃ν ὁ δεύτερος ὅρος μείζων εἴη τοῦ πρώτȣ, ἐπειδὴ ἰσȣ̃ται τῷ πρώτῳ α σὺν τῇ διαφορᾷ δ, ἀεὶ παραςαθῆναι δυνήσεται διὰ $\alpha+\delta$· εἰδ᾽ ἐλάττων, ἐπειδὴ τηνικαῦτα ἰσοδυναμεῖ τῷ πρώτῳ α πλὴν τῆς διαφορᾶς δ, παραςαθήσεται ἀεὶ διὰ $\alpha-\delta$.

Ἐντεῦθεν ἄρα ἅπας λόγος ἀριθμητικὸς, ἄυξων μὲν δηλωθήσεται διὰ $\alpha.\alpha+\delta$· μειȣ́μενος δὲ, διὰ $\alpha.\alpha-\delta$· κοινῇ δὲ ἐκεῖνός τε καὶ ȣ̃τος σημανθήσεται διὰ $\alpha\cdot\alpha\pm\delta$, ὃν ἀναγνωςέον: α σὺν ἢ πλὴν δ.

Ἐπὶ γὰρ φέρε τȣ̃ 2 . 5 ἀριθμητικȣ̃ λόγȣ, κληθέντος τȣ̃ ἡγȣμένȣ $\alpha=2$, τῆς δὲ διαφορᾶς $\delta=3$, ὁ ἑπόμενος 5 ἐμφανθήσεται διὰ $2+3=\alpha+\delta$, ὁ δὲ σύμπας λόγος 2· 5 διὰ $\alpha\cdot\alpha+\delta$. ἐπὶ δὲ τȣ̃ μειȣμένȣ 5 · 2, κληθέντος τȣ̃ α ἡγȣμένȣ 5, τῆς δὲ δ διαφορᾶς 3, ὁ ἑπόμενος 2 ἔςαι $5-3$, $\alpha-\delta$, ὁ πᾶς λόγος $\alpha\cdot\alpha-\delta$.

198. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄· Ὅταν παραβάλλωνται δύω ἀριθμητικοὶ ὅροι, σημανθέντος τȣ̃ πρώτȣ διὰ $\alpha\cdot\pm\delta$, εἴπερ εἶεν ἴσοι οἱ λόγοι, κληθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διαφορὰ δ (8)· κληθέντος ἄρα πρὸς τὸ δοκοῦν τοῦ κατὰ τὸν δεύτερον λόγον ἡγȣμένȣ γ, διατυπωθήσεται ὁ δεύτερος ȣ̃τω $\gamma.\gamma\pm\delta$· εἰ δ᾽ ἄνισοι εἶεν οἱ παραβαλλόμενοι λόγοι, ἡ διαφορὰ ἐκτεθήσεται δι᾽ ἄλλȣ γράμματος φέρ᾽ εἰπεῖν τȣ̃ ζ· ἡ δ᾽ ἅπασα ἔκθεσις τȣ̃ δευτέρȣ λόγȣ ἔςαι $\gamma\cdot\gamma\pm\zeta$.

199. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Πᾶσα ἀναλογία ἀριθμητικὴ παραςαθῆναι δύναται διὰ τȣ̃ τύπȣ $\alpha.\alpha\pm\delta : \gamma\cdot\gamma\pm\delta$, ὃς ἀναγινώσκεται: α πρὸς α σὺν ἢ πλὴν δ, ὡς γ πρὸς γ σὺν ἢ πλὴν δ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἐκ δύω

συγκροτεῖται ἀριθμητικῶν ἴσων λόγων (187), ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἀεὶ παρίςασθαι δύναται διὰ α $\cdot$ α $\pm$ δ ο ὁ δὲ δεύτερος διὰ γ $\cdot$ γ $\pm$ δ (198) Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔςω ἀριθμητικὴ ἀναλογία 2 $\cdot$ 6 : 5 . 9 $\cdot$ ὁ μὲν ἂν πρῶτος λόγος 2 $\cdot$ 6 δυνήσεται ἀεὶ παραςαθῆναι διὰ α $\cdot$ α + δ $\cdot$ ὁ δὲ δεύτερος 5 $\cdot$ 9 διὰ γ $\cdot$ γ + δ $\cdot$ τῆς δὲ 6 . 2 : 9 . 5. ὁ μὲν πρῶτος, διὰ α . α — δ, ὁ δὲ, διὰ γ $\cdot$ γ — δ (198).

200. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐφ' ἁπάσης ἀριθμητικῆς ἀναλογίας τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα ἴσον ἐςὶ τῷ τῶν μέσων $\cdot$ ϗ γὰρ πᾶσα ἀριθμητικὴ ἀναλογία παρίςασθαι ἔχει διὰ τȣ τύπȣ α $\cdot$ α $\pm$ δ : γ $\cdot$ γ $\pm$ δ (199), ἧς πρῶτον μὲν ἄκρον ἐςὶν α, ἔσχατον δὲ γ $\pm$ δ, ϗ πρῶτον μὲν μέσον α $\pm$ δ, δεύτερον δὲ γ $\cdot$ ἀλλὰ τὸ α $\pm$ γ + δ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἐςὶν ἴσον τῷ α $\pm$ δ + γ ἀθροίσματι τῶν μέσων $\cdot$ ἑκάτερον γὰρ (51) σύγκειται ἐκ τῶν αὐτῶν ὑπαρκτικῶν τε ϗ λειπτικῶν ποσοτήτων (21) $\cdot$ ἐν γένει ἄρα ἐφ' ἁπάσης ἀριθμητικῆς ἀναλογίας τὸ τῶν ἄκρων ἰσȣται τῷ τῶν μέσων ἀθροίσματι. Ο. Ε. Δ.

Καὶ ἐν ἀριθμοῖς. Ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας 3 $\cdot$ 5 : 10 : 12 τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα 3 + 12 = 15, ἴσον ἐςὶ τῷ τῶν μέσων 5 + 10 = 15.

201. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν, ὡς ποιεῖν εἰώθαμεν, μετὰ τὴν διὰ συμβολικȣ λογισμȣ γενικὴν δεῖξιν, ἐμπεδῶμεν τὸ θεώρημα διὰ μερικωτέρων ἀριθμῶν, ἥκιςα παρὰ τȣτο τὴν τῆς δείξεως ἰσχὺν ἐπικρατύνομεν $\cdot$ ἐπαισθητοτέραν μὲν ἂν τοῖς τῶν πρωτοπείρων ὀφθαλμοῖς παριςῶμεν

τὴν γενικὴν ἀλήθειαν, μερικωτέραις ἐφαρμοζομένην περιπτώσεσι.

202. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπὶ πάσης ἀριθμητικῆς συνεχοῦς ἀναλογίας τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ μέσῳ δὶς εἰλημμένῳ· ἐπιεικῶς γὰρ ὁ μέσος ἀνάλογος, τὸν χῶρον πληρῶν τῶν δύω μέσων, ἅπαξ γράφεται (191)· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ διπλῷ τοῦ μέσου.

Ἐπὶ τῆς ἐν ἀριθμοῖς συνεχοῦς ἀναλογίας ⁚ 5.10.15 τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων 5+15 ἐστι διπλοῦν τοῦ μέσου ἀναλόγου 10.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς Ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν Μεθόδου.

203. Μέθοδος τῶν τριῶν ἐν γένει καλεῖται ὁ τρόπος τοῦ, τριῶν ἀναλογίας ὅρων δοθέντων, εὑρεῖν τὸν τέταρτον (188)· ἐντεῦθεν ἄρα, ὥσπερ ἀναλογιῶν εἴδη πεφύκασι δύω, οὕτω καὶ ἡ τῶν τριῶν μέδοθος δισσή τις ὑπάρχει, ἡ μὲν ἀριθμητικὴ, γεωμετρικὴ δὲ ἡ ἑτέρα.

204. Μέθοδος οὖν τῶν τριῶν ἀριθμητικὴ μέν ἐστιν ὁ τρόπος, καθ᾽ ὃν, τριῶν ποσοτήτων δεδομένων, τετάρτη ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται, τοσούτῳ τῆς τρίτης διαφέρουσα, ὅσῳ ἡ δευτέρα τῆς πρώτης (182, 186)· γεωμετρικὴ δέ ἐστιν ὁ τρόπος, δι᾽ οὗ, τριῶν δοθεισῶν ποσοτήτων, τετάρτη ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται, περιέχουσα τοσάκις τὴν τρίτην, ὁσάκις τὴν δευτέραν ἡ πρώτη (245).

205. Οὐκοῦν τῆς τῶν τριῶν Γεωμετρικῆς Μεθόδου πλείονα χρῆσιν παρεχομένης τῷ κοινωνικῷ βίῳ, δεῖν ἡγησάμην περὶ ταύτης καὶ πρὸ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ διαλα-

βεῖν (245, καὶ ἐν τοῖς ἐφεξῆς), ὡς ἂν καὶ οἱ τȣ̃του ἄπειροι, μήτε μὴν πειραθῆναι αὐτοῦ ἐφιέμενοι (εἰσὶ γὰρ συχνοὶ, οἱ εἴτε τῷ χρήματι ἐπαηδιάζοντες εἴτε ὑπ' ἄλλων τȣ́τȣ ἀπειργόμενοι) τὴν ταύτης χρῆσιν εἰδέναι ἔχοιεν.

206. Ὑπὲρ ȣ̃ν τῆς ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν Μεθόδȣ· α΄. ἐκτίθει διὰ χ (5) τὸν τέταρτον ζητȣ́μενον ὅρον, διατάξας αὐτὸν μετὰ τῶν τριῶν δεδομένων ἐν ἀναλογίας σχήματι.

207. β΄. Ἐὰν μέν τις τῶν ἄκρων ζητῆται, συνάψας τȣ̀ς μέσȣς, ἀφαίρει ἀπὸ τȣ̃ αὐτῶν ἀθροίσματος τὸν δεδομένον τῶν ἄκρων· ἐὰν δέ τις μέσος, ἀπὸ τȣ̃ τῶν ἄκρων ἀθροίσματος ἀφαίρει τὸν γνωςὸν μέσον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Δοθέντων τριῶν ἀριθμῶν τῶν 3, 7, 11, ἵν' εὑρεθῇ τέταρτος ὅρος, διενηνοχὼς τȣ̃ 11, ὅσῳ τȣ̃ 3 ὁ 7· α΄. γεγράφθω 3 . 7 : 11 . χ· β΄. συναφθέντων τῶν μέσων 7 καὶ 11, ἀπὸ τȣ̃ αὐτῶν ἀθροίσματος 18 ἀφῃρήσθω ὁ γνωςὸς ἄκρος 3· τὸ δὲ κατάλοιπον 15 ἔςαι τῶν ὅρων ὁ ζητȣ́μενος τέταρτος· εἰσαχθέντος ȣ̃ν 15 ἀντὶ χ, ἀποληφθήσεται ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία 3 . 7 : 11 . 15 (187).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἵνα δὲ εὑρεθῇ ὅρος, ὃς ἂν εἴη μέσος τῶν δοθέντων ὅρων 4, 20, 46· α΄. γεγράφθω 4 . 20 : χ . 46· β΄. συναφθέντων τῶν ἄκρων 4 καὶ 46, ἀπὸ τȣ̃ αὐτῶν ἀθροίσματος 50 ἄφελε τὸν γνωςὸν μέσον 20· τὸ δὲ 30 κατάλοιπον ἔςαι ὁ ζητȣ́μενος μέσος· ἡ δὲ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἔςαι 4 . 20 : 30 . 46 (187).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐφ' ἁπάσης γὰρ ἀριθμητικῆς ἀναλογίας τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα ἐξισȣ̃ται τῷ τῶν μέσων· ἐὰν ȣ̃ν τοῦδε τοῦ ἀθροίσματος ἅτερος τῶν ἄκρων ἀφαιρεθῇ,

λειφθήσεται πάντως ὁ ἕτερος· εἰ δέτις μέσος, λειφθήσεται ἅτερος τῶν μέσων.

208. Εἰ δὲ πρόκειται συνεχῆ σχηματίσαι ἀναλογίαν (191) τῶν δύω δοθέντων ἄκρων, συνάψας ταῦτα, τὸ ἥμισυ τῦ ἀθροίσματος ἕξεις μέσον ἀνάλογον· θατέρυ δέ τῶν ἄκρων ἐ τῦ μέσυ ἀναλόγυ δοθέντων, ἀπὸ τῦ μέσυ διπλασιασθέντος ἀφελὼν τὸν δεδομένον ἄκρον, ἀπολήψῃ τὸν ζητύμενον ὅρον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Δοθέντων ∸ 3 . χ . 9, συνάψαντι 3 ἐ 9, τὸ τῦ ἀθροίσματος 12 ἥμισυ, εἴτ᾽ ὖν 6, ἔςαι ὁ μέσος ἀνάλογος· ὖκῦν ∶ 3 . 6 . 9.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἐπὶ ∸ 5 . 20 . χ· διπλασιασθέντος τῦ 20, ἐ ἀπὸ 40 ἀφαιρεθέντος τῦ 5, τὸ κατάλοιπον 35 ἔςαι ὁ ζητύμενος ἄκρος ὅρος τῆς συνεχῦς ἀναλογίας ∸ 5 . 20 . 35 (191).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπιςηρίζεται ἡ μέθοδος τοῖς προαποδεδειγμένοις, ὅτι πάσης συνεχῦς ἀναλογίας ἀριθμητικῆς τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα ἰσῦται τῷ διπλῷ μέσῳ (202).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Προόδυ Ἀριθμητικῆς.

209. Πᾶσα ἀριθμητικὴ πρόοδος, εἴτε αὔξυσά ἐςιν (193), ἥτις προάγεσθαι ἐπ᾽ ἄπειρον ἔχει, οἵα ἐςὶν ἥδε ἡ φυσικὴ τῶν ἀριθμῶν σειρὰ ∸ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . κτ. ἢ γῦν ∶ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 κτ. εἴτε μειυμένη, ἥτις ἐν μὲν ὑπαρκτικοῖς ποσοῖς καταλήγει εἰς 0, ἐν δὲ λείπυσιν ἐπεκτείνεται ἐς ἄπειρον, οἵα ἐςὶν ἡ ∸ 5 . 4 . 3 . 2 . 1 . 0.

$-1.-2.-3.-$ κτ., ἢ γοῦν $\div 7.4.1.-2.-5.-8.-$ κτ.

210. Θεώρημα στοιχειῶδες· Πᾶσα πρόοδος ἀριθμητικὴ ἐκτεθῆναι ἔχει διὰ τοῦ τύπου $\div \alpha . \alpha \pm \delta . \alpha \pm 2\delta . \alpha \pm 3\delta . \alpha \pm 4\delta$ κτ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα πρόοδος ἀριθμητικὴ οὐδὲν ἐστιν ἕτερον, ὅτι μὴ στίχος ὅρων, ὧν ὁ πρῶτος διαφέρει τοῦ δευτέρου, ὅσῳ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου, ὁ δὲ τρίτος τοῦ τετάρτου κτ. (192)· κληθέντος ἄρα τοῦ μὲν πρώτου ὅρου α, τῆς δὲ διαφορᾶς δ, ὁ δεύτερος ὅρος προόδου, αὐξούσης μὲν, ἐστιν ἴσος τῷ πρώτῳ σὺν τῇ διαφορᾷ, ἢ τῇ ὑπεροχῇ, ᾗ ἐκείνου ὑπερέχει· ἐστιν ἄρα ὁ δεύτερος $\alpha+\delta$ (196)· ὁ δὲ δεύτερος ἰσοῦται τῷ τρίτῳ σὺν τῇ αὐτῇ διαφορᾷ δ. ἐστιν ἄρα $\alpha+\delta+\delta=\alpha+2\delta$· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁ τέταρτος ἐστιν $\alpha+2\delta+\delta=\alpha+3\delta$ καὶ ἑξῆς ὡσαύτως.

Μειουμένης δὲ, ὁ δεύτερος ὅρος ἐστιν ἴσος τῷ πρώτῳ πλὴν τῆς διαφορᾶς (196), ἢ $\alpha-\delta$· ὁ δὲ τρίτος ἴσος τῷ δευτέρῳ πλὴν τῆς διαφορᾶς, εἴτ' οὖν $\alpha-\delta-\delta$, ἢ $\alpha-2\delta$, καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

Πᾶσα ἄρα πρόοδος ἀριθμητικὴ, αὔξουσα μὲν παραστα-θήσεται διὰ $\div \alpha . \alpha+\delta . \alpha+2\delta . \alpha+3\delta .$ κτ. μειουμένη δὲ, διὰ $\div \alpha . \alpha-\delta . \alpha-2\delta . \alpha-3\delta .$ κτ. κοινὸς δ' ἑκατέρας τῶν ἀριθμητικῶν προόδων τύπος ἔσται $\div \alpha . \alpha \pm \delta . \alpha \pm 2\delta . \alpha \pm 3\delta . \alpha \pm 4\delta$ κτ. Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τῆς αὐξούσης ἀριθμητικῆς προόδου $\div 2.5.8.11.14$, ὁ δεύτερος ὅρος 5 ἰσοῦται τῷ πρώτῳ 2 σὺν τῇ διαφορᾷ 3· ὁ δὲ τρίτος 8 ἰσοῦται τῷ πρώτω 2 σὺν τῇ δὶς εἰλημμένῃ διαφορᾷ 3· ὁ δὲ τέταρτος 11 τῷ πρώτῳ σὺν τῇ τριττῇ διαφορᾷ 3, καὶ ἑξῆς ὡσ-

αὕτως· τȣ̃ ἄρα πρώτȣ ὅρȣ 2 κληθέντος α, δ δὲ τῆς 3 διαφορᾶς, ὁ μὲν δεύτερος ὅρος 5 ἔϛαι $\alpha + \delta$, ὁ δὲ τρίτος 8, $\alpha + 2\delta$, ὁ δὲ τέταρτος 11, $\alpha + 3\delta$ κτ. ἐπὶ δὲ τῆς μειȣμένης ÷ 14.11.8.5.2, $11 = 14 - 3$, ἢ $\alpha - \delta$, $8 = 14 - 3 - 3$, ἢ $\alpha - 2\delta$, $5 = 14 - 3 - 3 - 3$, ἢ $\alpha - 3\delta$, ϗ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

211. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α΄. Ἁπάσης ἀριθμητικῆς προόδȣ τὸ κεφάλαιον τῶν ὅρων, οἳ ἴσον ἀπέχȣσι τῶν ἄκρων, ποσὸν ἐϛὶ μόνιμον· ἰσȣ̃ται γὰρ τῷ ἀθροίσματι τῶν ἄκρων, ἢ τῷ ἑτέρων δύω, οἳ ϗ αὐτοὶ ἴσον ἀπέχȣσι τῶν ἄκρων, ἢ τέλος τῷ μέσῳ δὶς εἰλημμένῳ, εἰ τύχοι ὁ τῶν τῆς ἀριθμητικῆς προόδȣ ὅρων ἀριθμὸς ὢν περιττός· ὅτω τῆς ἐξ ἑπτὰ συνεϛώσης προόδȣ ὅρων τὸ ἄθροισμα τȣ̃ τρίτȣ ϗ τȣ̃ πέμπτȣ, εἴτ' ȣ̃ν $\alpha \pm 2\delta \pm \alpha \pm 4\delta$, τȣτέϛι $2\alpha \pm 6\delta$, ἰσȣ̃ται τῷ τῶν ἄκρων, οἵτινές εἰσιν α ϗ $\alpha \pm 6\delta$, εἴτ' ȣ̃ν $2\alpha \pm 6\delta$· τὸ δὲ τȣ̃ δευτέρȣ ϗ ἕκτȣ ὡσαύτως ὑπάρχει $2\alpha \pm 6\delta$· ϗ ὁ μέσος δὲ ὅρος $\alpha \pm 3\delta$ δὶς εἰλημμένος γίνεται $2\alpha \pm 6\delta$

Ἐκκείσθω ἡ αὐτὴ πρόοδος ἐν ἀριθμοῖς ÷ 2.5.8.11.14.17.20. τὸ ἄθροισμα τοίνυν τȣ̃ τρίτȣ ϗ τȣ̃ πέμπτȣ ἐϛὶν $8 + 14 = 22$, ὃ ἰσȣ̃ται τῷ τῶν ἄκρων· ϗ γὰρ $2 + 20 = 22$· ϗ τῷ τȣ̃ δευτέρȣ ϗ τȣ̃ ἕκτȣ, $5 + 17 = 22$, ϗ τῷ δὶς εἰλημμένῳ μέσῳ $11 + 11 = 22$

212. ΠΟΡΙΣΜΑ. Β΄. Ἕκαϛος ὅρος προόδȣ ἀριθμητικῆς, αὐξȣ́σης μὲν, ἔϛιν ἴσος τῷ πρώτῳ σὺν τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς, ϗ τȣ̃ τῶν ἡγησαμένων αὐτȣ̃ ὅρων ἀριθμȣ̃, μειȣμένης δὲ, ἴσος τῷ πρώτῳ πλὴν τȣ̃ αὐτȣ̃ παραγομένȣ· ἐπὶ γὰρ τȣ̃ γενικȣ̃ τύπȣ ÷ α. $\alpha \pm \delta$. $\alpha \pm 2\delta$. $\alpha \pm 3\delta$. $\alpha \pm 4\delta$ κτ, ὁ μὲν τρίτος ὅρος $\alpha \pm 2\delta$

ἴσος ἐςὶ τῷ πρώτῳ α σὺν ἢ πλὴν τοῦ γινομένου ὑπὸ τῆς διαφορᾶς ϗ τοῦ 2, ὅτι δύω αὐτοῦ ἡγήσαντο ὅροι· ὁ δὲ τέταρτος α ± 3δ ἐςὶν ἴσος τῷ πρώτῳ α σὺν ἢ πλὴν τοῦ παραγομένου ὑπὸ δ ϗ 3 διὰ τοὺς τρεῖς προηγουμένους ὅρους κτ.

Ἐπὶ δὲ ÷ 2.5.8.11.14. ὁ πέμπτος, φέρ' εἰπεῖν, ὅρος 14 ἴσος ἐςὶ τῷ πρώτῳ 2 σὺν τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῆς 3 διαφορᾶς ϗ τοῦ 4 ἀριθμοῦ τῶν προηγηθέντων ὅρων.

213. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἁπάσης ἀριθμητικῆς προόδου ἡ μεταξὺ τοῦ πρώτου ϗ τοῦ ἐσχάτου τῶν ὅρων διαφορὰ ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κοινῆς διαφορᾶς ϗ τοῦ ἀριθμοῦ, τῶν ὅρων ὅλης τῆς προόδου, μειωθέντος μονάδι· οὕτως ἐπὶ τῆς προεκτεθείσης προόδου ἡ μεταξὺ α ϗ α ± 7δ διαφορὰ ἐςιν ± 7δ

214. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἵν' ἐμπαραβύσωμεν μεταξὺ δύω ὅρων ἀριθμὸν δεδομένον ὅρων, ὑφ' ὧν μετὰ τῶν προτέρων πρόοδος ἂν συςαίη ἀριθμητική, διαιρήσομεν τὴν μεταξὺ τῶν δύω ὅρων διαφορὰν διὰ τοῦ αἰτηθέντος ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, ηὐξημένου μονάδι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔςω ἐμπαραβύσαι πέντε ὅρους ἀριθμητικῶς ἀναλόγους μεταξὺ 8, ϗ 32, ταὐτὸν εἰπεῖν, πρόοδον ἀριθμητικὴν ἐξ ὅρων ἑπτὰ συγκροτῆσαι, ὧν πρῶτος μὲν εἴη 8, πύματος δὲ 32· α΄. λαμβάνομεν τὴν μεταξὺ 8 ϗ 32 διαφορὰν, ἥτις ἐςὶν 24· β΄. διαιροῦμεν ταύτην τὴν 24 διαφορὰν διὰ 5 σὺν 1, εἴτ' οὖν διὰ 6, ἅτε πέντε αἰτηθέντων ἀναλόγων ὅρων· τὸ οὖν πηλίκον 4 συνάπτοντες τῷ πρώτῳ ὅρῳ 8, ἀπολαμβάνομεν 12 δεύτερον ὅρον τῆς σχηματισθησομένης ἀριθμητικῆς προόδου· τρί-

τον δὲ τὸν 16, ἑξῆς ὕτως· ἐντεῦθεν ἄρα συςαθήσεται ἡ ζητηθεῖσα ἀριθμητικὴ πρόοδος ἑπτὰ εὐμοιρῦσα τῶν ὅρων ÷ 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32. σαφὲς γὰρ πάντως, ὡς ὕτω ποιῦντες ἕκαςον ὅρον ἕξομεν ἐξισύμενον τῷ πρώτῳ σὺν τῇ διαφορᾷ, πολλαπλασιαθείσῃ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγηθέντων ὅρων.

215. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄· Γνωσθέντος τῦ πρώτυ ὅρυ ϗ τῆς ἐπικρατύσης ἔν τινι ἀριθμητικῇ προόδῳ διαφορᾶς, ἅπας ὅρος εὑρεθήσεται, συναφθέντος τῷ πρώτῳ ὅρῳ τῦ παραγομένυ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς ϗ τῦ ἀριθμῦ τῶν ὅρων τῶν τῦ ζητυμένυ ἡγυμένων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐργάτῃ τινὶ ἐπήγγελται μισθὸς, τῆς μὲν πρώτης ἡμέρας ὀβολοὶ 2, τῆς δὲ δευτέρας 5, ϗ ἑξῆς κατὰ τὴν τάξιν τῆςδε τῆς ἀριθμητικῆς προόδυ ÷ 2. 5. 8 κτ. πόσον ἄρα λήψεται μισθὸν ἐν τῇ εἰκοςῇ πέμπτῃ ἡμέρᾳ;

Ἡ ὀβολὺς δύω σὺν τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῆς 3 διαφορᾶς, τῆς ἐπικρατύσης ἐν τῇ προτεθείσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ, ϗ τῦ 24· πρὸ γὰρ τῆς εἰκοςῆς πέμπτης ἡμέρας 24 προηγήθησαν· λήψεται ἄρα ὀβολὺς 74.

216 ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Τὐναντίον δὲ, ἵν' ὁρισθῇ ὁ χῶρος ὅρυ τινὸς, ῦ ἡ δύναμις δέδοται, ἐν ἀριθμητικῇ τινι προόδῳ, ἀφῃρήσθω μὲν τῦδε τῦ ὅρυ ὁ πρῶτος τῆς προόδυ ὅρος, διῃρήσθω δὲ τὸ κατάλοιπον διὰ τῆς ἐπικρατύσης ἐν τῇ προόδῳ διαφορᾶς· τὸ δὲ πηλίκον, ηὐξημένον μονάδι, ἐμφανεῖ τὸν χῶρον τῦ προτεθέντος ὅρυ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Στρατιῶται τετάχαται ἀνὰ πλείυς σειρὰς ἐν τριγώνυ σχήματι· ὁ δὲ τῶν ςρατιωτῶν ἑκάςης σειρᾶς ἀριθμὸς χωρεῖ κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τήνδε πρό-

οδον ÷ 1.4.7 κτ. πόση ἄρ᾽ ἐςιν ἡ σειρὰ, ἔνθ᾽ εἰσὶ ςρατιῶται 91;

Ἄφελε τοίνυν τὸν πρῶτον ὅρον 1 ἀπὸ 91· τὸ δὲ κατάλοιπον 90 δίελε διὰ τῆς διαφορᾶς 3· τὸ δὲ πηλίκον 30, μονάδι αὐξηθὲν, δείξει ὅτι ἡ ζητουμένη σειρὰ ἔςαι τριακοςὴ πρώτη.

217. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Τὸ σύμπαν ἄθροισμα ἁπάσης ἀριθμητικῆς προόδου ἴσον ἐςὶ τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἄκρων, καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ· συνάψαντες γὰρ τὸν γενικὸν τύπον ÷ $\alpha . \alpha \pm \delta . \alpha \pm 2\delta . \alpha \pm 3\delta . \alpha \pm 4\delta$, ἕξομεν $5\alpha \pm 10\delta$. ἐὰν ἄρα ά. ληφθῇ τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα, ὅ ἐςι $2\alpha \pm 4\delta$, καὶ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 ἀριθμὸν τῶν ὅρων, προκύψει $10\alpha \pm 20\delta$· ἐὰν β΄. ληφθῇ τὸ ἥμισυ τοῦδε τοῦ γινομένου, εὑρεθήσεται ὡσαύτως $5\alpha \pm 10\delta$ ἴσον τῷ ὁλικῷ ἀθροίσματι τῆς ἐκ πέντε ὅρων συγκεκροτημένης τῆςδε ἀριθμητικῆς προόδου.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ÷ 1· 3· 5· 7· 9· 11· 13· 15· 17· 19 τὸ πάντων τῶν ὅρων ἄθροισμα ἐςιν 100· ἀλλ᾽ εὑρήσομεν γὰρ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα 100, πολλαπλασιάσαντες τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα 1+19, εἴτ᾽ οὖν τὸν 20 ἐπὶ 10 ἀριθμὸν τῶν τῆς προόδου ὅρων· τὸν δὲ προκύπτοντα 200 διελόντες διὰ 2, ὅ ἐςι λαβόντες τοῦ 200 τὸ ἥμισυ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ὠνήσατό τις 20 πρόβατα, συνθέμενος ὑπὲρ μὲν τοῦ πρώτου καταβαλεῖν ὀβολοὺς 2, ὑπὲρ δὲ τοῦ δευτέρου 18, καὶ ἑξῆς ὁμοίως κατὰ πρόοδον ἀριθμητικήν· πόση ἄρ᾽ ἔςαι ἡ πάντων τῶν 20 προβάτων τιμή;

ά. εὑρεθήτω κατὰ τὴν προεκτεθεῖσαν μέθοδον (215) ἡ τοῦ εἰκοςοῦ προβάτου τιμὴ, ἥτις ἐςὶ 2 σὺν τῷ γινομένῳ

ὑπὸ 16, ϗ 19, εἶτ' ȣ̓͂ν 306· ἰδὲ δὴ ὁ ἔσχατος τῆς προόδȣ ὅρος· ἐπεὶ δὲ ὁ πρῶτος ἐςὶ 2, τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ἄκρων ἔςι 308, ὃ πολλαπλασιαθὲν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων, ταὐτὸν εἰπεῖν ἐπὶ 20, παράγει 6160, ȣ̓͂τινος τὸ ἥμισυ, εἶτ' ȣ̓͂ν 3080 ἐμφαίνει τὴν ὁλικὴν τιμὴν τῶν 20 προβάτων (217).

218. ΣΧΟΛΙΟΝ. Α'πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τέτταρα ταῦτα ἀναγκαίως ἐνυπάρχȣσιν· ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ ἔσχατος ω, ἡ κοινὴ τῶν ὅρων διαφορὰ δ, ϗ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ν· τȣ́των ȣ̓͂ν ἐὰν τρία τινὰ δοθῶσι, τὸ τέταρτον πάντως εὑρεθήσεται· ἀλλὰ γὰρ εἰς τȣ͂το προληπτέον τὸ ἐφεξῆς Α'ξίωμα.

219. ΑΞΙΩΜΑ. Ε'ὰν ποσότης ποσότητι ἴση ᾖ προςεθῇ δὲ ἑκατέρᾳ τὸ αὐτὸ ποσὸν, ἢ ἀφαιρεθῇ ἑκατέρας τὸ αὐτὸ, ἢ πολλαπλασιαθῇ ἑκατέρα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν, ἢ διὰ τȣ͂ αὐτȣ͂ ἑκατέρα διαιρεθῇ, τὰ ὅλα, ἢ τὰ κατάλοιπα, ἢ τὰ γινόμενα, ἢ τὰ πηλίκα, ἴσα ἔσονται.

220. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τȣ́των τὸ μὲν πρῶτον ϗ δεύτερον ταὐτά εἰσι τοῖς ἐκτεθεῖσιν ἀξιώμασι (Α'ριθμ. 13, 14)· τὸ δὲ τρίτον ϗ τέταρτον ϗ αὐτὰ μὲν προφανῆ, εἰς δὲ πλείω σαφήνειαν κείσθωσαν ὑποδείγματα ἀριθμητικά· ἐὰν γὰρ ᾖ $5=5$, δῆλον ὅτι ἔςαι ϗ $3\times 5=3\times 5$, εἶτ' ȣ̓͂ν $15=15$· ὡσαύτως εἴπερ εἴη $6=6$, ἔςαι ϗ $\frac{6}{2}=\frac{6}{2}$, εἶτ' ȣ̓͂ν $3=3$· ἐπιςήσασι δὲ τὸν νȣ͂ν δῆλον ὅτι τὸ μέν ἐςι ταὐτὸν τῷ (Αριθ. 13) τὸ δὲ, τῷ (Αριθμ. 14).

221. Α'. Υ'ποτεθήτω πᾶσα ἡ πρόοδος αὔξȣσα (ἐὰν γὰρ ᾖ μειȣμένη τȣ͂ ω ἀντὶ α ληφθέντος γενήσεται αὔξȣσα) ϗ τὰ εἰρημένα ἐν (214) ἐκτεθείσθωσαν συμβολικῶς εἶτ' ȣ̓͂ν $\omega-\alpha=\delta\nu-\delta$· ϗ ἐπεὶ $\omega-\alpha$ ἴσον ἐςὶ τῷ δν

—δ, ἄρα (219) ω—α+α=δν—δ+α· εἴτ' οὖν ω=δν—δ+α· καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτων τὸ αὐτὸ α ἀφαιρεθῇ τὰ λοιπὰ αὖθις ἴσα ἔσονται· ἄρα ω—α=δν—δ+α—α, εἴτ' οὖν ω—α=δν—δ· ἐπεὶ δὲ τὸ δν—δ γινομενόν ἐστι ἐκ τοῦ ν—1 καὶ δ (καὶ γὰρ $\overline{\nu-1}\cdot\delta=\delta\nu-\delta$, ὡς δῆλον)· ἐὰν ἄρα τό, τε ω—α, καὶ δν—δ διαιρεθῇ διὰ ν—1, ἔσται $\frac{\omega-\alpha}{\nu-1}=\delta$ (219)· ἐὰν ἄρα δοθῶσιν ὁ ἔσχατος ὅρος ω, καὶ ὁ πρῶτος α, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ν, ἔσται ἡ διαφορὰ $\delta=\frac{\omega-\alpha}{\nu-1}$· ἔστω α=5, καὶ ω=97, καὶ ν=19· ἄρα ἔσται $\delta=\frac{97-5}{19-1}=\frac{92}{18}=5\frac{1}{9}$· ἡ δὲ πρόοδος ἔσται ÷ 5· $10\frac{1}{9}$· $15\frac{2}{9}$· $20\frac{3}{9}$· $25\frac{4}{9}$· $30\frac{5}{9}$ κτ. μέχρι τῶν 97.

Β΄. Εἰλήφθω ὁ αὐτὸς συμβολικὸς τύπος ω—α=δν—δ (214)· ἐὰν οὖν τοῖς ἴσοις προσεθῇ τὸ αὐτὸ α, ἔσται ω—α+α=δν—δ+· εἴτ' οὖν ω=δν—δ+α, ἢ α+δν—δ=ω· ἐὰν δ' ἀπ' αὐτῶν τῶν ἴσων ἀφαιρεθῇ τὸ αὐτὸ δν—δ, ἔσται α+δν—δ—δν+δ=ω—δν+δ, εἴτ' οὖν α=ω—δν+δ· ἐὰν δ' ἑκατέρῳ προσεθῇ δν, ἔσται α+δν=ω—δν+δ+δν, ἢ α+δν=ω+δ· ἐὰν δ' ἀφ' ἑκατέρου ἀφαιρεθῇ τὸ αὐτὸ α, ἔσται α—α+δν, ἢ δν=ω—α+δ· ἐὰν δὲ ἑκάτερον ποσὸν διαιρεθῇ διὰ δ ἔσται $\nu=\frac{\omega-\alpha}{\delta}+\nu$· ἔστωσαν οὖν δεδομένα ὁ ἔσχατος ὅρος ω, καὶ ὁ πρῶτος α, καὶ ἡ διαφορὰ δ· καὶ ζητηθήτω ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ν· τοῦτον ἐμφανεῖ ὁ τύπος $\nu=\frac{\omega-\alpha}{\delta}+1$· ἐ-

ςω $\alpha = 2$ ϗ $\omega = 10$, ϗ $\delta = 2$· ἐκῦν ἔςαι $\nu = \frac{10 - 2}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 4 + 1 = 5$· ὁ τοίνυν ἀριθμὸς τῶν ὅρων ἔςαι 5· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει ÷ 2·4·6·8·10.

Γ. Ἐὰν δὲ, δοθέντων τῦ α, ϗ ν, ϗ δ, ζητῆται ὁ ω· τῦτον δηλώσει ὁ προεκτεθεὶς τύπος $\omega = \delta\nu - \delta + \alpha$· ἔςω $\alpha = 2$, ϗ $\delta = 3$, ϗ ν 12· ἄρα ἔςαι $\omega = 3 \times 12 - 3 + 2 = 36 - 3 + 2 = 35$· ἡ δέγε πρόοδος χωρήσει ὅτω ÷ 2·5·8·11·14·17·20·23·26·29·32·35.

Δ. Ἐὰν δὲ, δοθέντων τῶν ω, δ, ν, ζητῆται ὁ α εἰλήφθω αὖθις ὁ τύπος $\omega - \alpha = \delta\nu - \delta$, ϗ ἑκατέρῳ τῶν ἴσων προσεθέντος τῦ ἀυτῦ α, ἔςαι $\omega - \alpha + \alpha = \delta\nu - \delta + \alpha =$ εἴτ' ὖν $\omega = \delta\nu - \delta + \alpha$· ἐὰν δὲ τύτων ἑκατέρυ ἀφαιρεθῇ τὸ $\delta\nu - \delta$ ἔςαι $\omega - \delta\nu + \delta = \delta\nu - \delta + \alpha - \delta\nu + \delta$· εἴτ' ὖν $\omega - \delta\nu + \delta = \alpha$, καὶ δὴ $\alpha = \omega - \delta\nu + \delta$· ἔςω $\omega = 12$, ϗ $\delta = 2$, ϗ $\nu = 11$· ἔςαι ἄρα $\alpha = 12 - 22 + 2 = -8$· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει· ÷ −8·−6·−4·−2·0·2·4·6·8·10·12

Ἐκκείσθωσαν δ' ἑξῆς οἱ τέσσαρες εὑρεθέντες τύποι εἰς μνήμης ἐπιβοήθημα.

δοθέντων	εὑρεῖν
ω, α, ν	$\delta = \frac{\omega - \alpha}{\nu - 1}$
ω, α, δ	$\nu = \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1$
α, ν, δ	$\omega = \delta\nu - \delta + \alpha$
ω, δ, ν	$\alpha = \omega - \delta\nu + \delta$

Ἐὰν δὲ κληθῇ τὸ ἁπάσης ἀριθμητικῆς προόδυ ἄθροι-

σμα κ, ὁ γενικὸς αὐτȣ̃ τύπος ἐκ τῶν εἰρημένων (217) ἔςαι $κ = \frac{αν + ων}{2}$· ἐὰν ἄρα τὰ τέσσαρα α, ω, δ, ν γνωςὰ ὦσι, γνωσθήσεται πάντως ϗ τὸ κεφάλαιον διὰ τȣ̃δε τȣ̃ τύπȣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ λόγων γεωμετρικῶν.

222. **Μέρη ὅμοια** δυεῖν ὅλων ποσοτήτων καλȣ̃νται, ἃ ἰσάκις λήφθέντα παραγαγεῖν δύνανται ἕκαςα τὸ ἑαυτȣ̃ ὅλον, οἷά εἰσι τὰ πέμπτα, ἢ τὰ ἕκτα μέρη δυεῖν ὅλων κτ· 5 ϗ 10, φέρ' εἰπεῖν, εἰσὶ μέρη ὅμοια τȣ̃ 20 ϗ 40, ὡς αὐτῶν ὄντα τεταρτημόρια· ϗ γὰρ τετράκις μὲν ὁ 5 ποιεῖ 20, τετράκις δὲ ὁ 10 ποιεῖ 40.

223. Ὁ γεωμετρικὸς λόγος (183), καλεῖται μὲν **διπλάσιος**, ὅταν ὁ ἡγȣ́μενος διπλȣ̃ς ᾖ τȣ̃ ἑπομένȣ· **τριπλάσιος** δὲ, ὅταν τριπλȣ̃ς κτ· **ὑποδιπλάσιος** δ' αὖ, ἐπειδὰν ὁ ἡγȣ́μενος τὸ ἥμισυ ὑπάρχῃ τȣ̃ ἑπομένȣ, **ὑποτριπλάσιος** δ', ὅταν τὸ τρίτον κτ. ȣ̃τως ȣ̃ν 12 : 4 ἔςι λόγος τριπλάσιος, 4 : 12 δὲ ὑποτριπλάσιος.

224. Ὅταν τινὸς λόγȣ ἄνισος ᾖ τῷ ἑπομένῳ ὁ ἡγȣ́μενος, δύω εὑρίσκονται διάφορα πηλίκα ἢ δύω λόγοι διάφοροι (183)· ἤτοι γὰρ ὁ ἑπόμενος διὰ τȣ̃ ἡγȣμένȣ, ἢ ȣ̃τος δι' ἐκείνȣ διαιρεῖσθαι δύναται· πρὸς μέντοι εὐμάρειαν πλείονα ἐν τοῖς ἐφεξῆς ἀεὶ ἐκδεξόμεθα τὸν λόγον τὸν διαιρέσει τȣ̃ ἑπομένȣ διὰ τȣ̃ ἡγȣμένȣ προκύπτοντα· ἢ, ὃ δὴ ταὐτὸν, ὑποθησόμεθα διαιρετέον μὲν τὸν ἑπόμενον, διαιρέτην δὲ τὸν ἡγȣ́μενον.

225. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἔςω λόγος ὁ 2 : 6· ἐξέςαι ᾖν τόνδε παραςήσαϑαι ὕτω $\frac{6}{2}$· ϗ γὰρ ὁ 2 : 6 λόγος ὐδὲν ἀλλ᾽ ἢ τὸ πηλίκον ἐςὶ τῦ ἑπομένυ 6 διαιρεθέντος διὰ τῦ ἡγυμένυ 2· ὅπερ ἀεὶ ἔξεσιν ἐμφῆναι διὰ $\frac{6}{2}$.

226. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐντεῦθεν δῆλον ὅτι ἅπας πλασματικὸς τύπος, οἷος ὁ $\frac{6}{2}$ δύναται ἐπίσης ἐκληφθῆναι, ἤτοι ὡς σεσημειωμένον πηλίκον, ἢ ὡς κλάσμα ἢ ὡς λόγος· Πᾶν ἄρα, ὃ ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἤδη δέδεικται, ϗ ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν ἐκληπτέον λόγων· ϗ ἀντιςρόφως, πᾶν τὸ δειχθησόμενον ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν λόγων, καινήτις ἔσεται βάσανος τῶν ἐν τοῖς κλάσμασι προαποδεδειγμένων.

227. Θεώρημα ςοιχειῶδες· Παντὸς λόγυ ὁ ἑπόμενος ἰσῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ἡγυμένυ καὶ τοῦ πηλίκυ

ΔΕΙΞΙΣ. Ἅπας γὰρ διαιρετέος ἰσῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ διαιρέτυ ϗ τῦ πηλίκυ· ἀλλαμὴν παντὸς λόγυ ὁ μὲν ἑπόμενος ἔςι διαιρετέος, ὁ δ᾽ ἡγύμενος διαιρέτης (224). ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Τῦ 2 : 6 λόγυ ὁ ἑπόμενος 6 ἰσῦται τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῦ ἡγυμένυ 2, ϗ τῦ πηλίκυ 3.

Ἐπὶ δὲ τῦ 6 : 2, θεωρυμένυ ἀεὶ τῦ ἑπομένυ ὡς διαιρετέυ, ὁ 2 ἑπόμενος ἰσῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ἡγυμένυ ϗ τῦ πηλίκυ $\frac{2}{6}$· ἐπεὶ $6 \times \frac{2}{6} = \frac{12}{6} = 2$.

228. Ἅπας λόγος ἐκτίθεσθαι δύναται διὰ τῦ τύπυ α : απ· ὁ μὲν γὰρ ἡγύμενος ἀεὶ παρίςαϑαι δύναται διὰ α, τὸ δὲ πηλίκον διὰ π, ἐπεὶ δὲ ὁ ἑπόμενος ἰσῦται ἀεὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ἡγυμένυ ϗ τῦ πηλίκυ (227)· ἐκδηλωθήσεται ἄρα διὰ α × π, ἢ απ.

Ἐπὶ 2 : 6, ἐὰν ἐκτεθῇ διὰ α, τὸ δὲ 3 πηλίκον διὰ

π, 6 ἔσεται $= 2 \times 3$, $\alpha \times \pi$ ἢ απ· ἄρα $2 : 6$ γενήσεται $\alpha : \alpha\pi$.

Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὸ δοκοῦν ἔξεσι παραστήσασθαι τὸν ἡγούμενον καὶ διὰ δ, ἢ ζ κτ, πᾶς ἄρα λόγος ἀδιαφόρως δύναται ἐκτεθῆναι καὶ διὰ $\delta : \delta\kappa$, $\zeta : \zeta\kappa$ κτ.

229. ΠΟΡΙΣΜΑ Ἐὰν δύω ὁμοῦ παραβληθῶσιν ὅροι, εἴτε εἰσὶν ἴσοι, καὶ τὰ πηλίκα αὐτῶν ὡσαύτως ἴσα, ὅτε ἄμφω διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐκδηλοῦνται γράμματος, τοῦ κ φέρε, εἴτε εἰσὶν ἄνισοι, καὶ δὴ ἄνισα καὶ τὰ αὐτῶν πηλίκα, ὅτε δεῖ διὰ δυοῖν διαφόρων γραμμάτων ταῦτα ἐκθέσθαι, τὸ μὲν φέρε διὰ κ, θάτερον δὲ διὰ π.

Βουλομένοις οὖν ἴσους δύω ἐκθέσθαι λόγους $2 : 6$, $4 : 12$ (183) παραστασθήσεται ὁ μὲν $2 : 6$ διὰ $\alpha : \alpha\kappa$, ὁ δὲ $4 : 12$, διὰ τὴν τοῦ πηλίκου ἰσότητα, διὰ $\delta : \delta\kappa$· ἀλλὰ γὰρ εἰς ἔκθεσιν τῶν ἀνίσων λόγων $5 : 10$, $3 : 9$, ἐπείπερ τὰ κατ' αὐτοὺς πηλίκα εἰσὶν ἄνισα ὁ μὲν ἐκτεθήσεται διὰ $\alpha : \alpha\kappa$, ὁ δὲ διὰ $\delta : \delta\pi$·

230. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Τὸ ὑπὸ δύω λόγων γινόμενον ἀπολαμβάνεται, πολλαπλασιαζομένων ἐπ' ἀλλήλους τῶν δύω ἑπομένων, ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν δύω ἡγουμένων, καὶ σημαινομένης τῆς τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου γινομένου διαιρέσεως.

ΔΕΙΞΙΣ. Κειμένων δύω λόγων τῶν $\alpha : \alpha\kappa$, $\delta : \delta\pi$, ἢ $\frac{\alpha\kappa}{\alpha}$, $\frac{\delta\pi}{\delta}$ (225) πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπ' ἀλλήλους οἱ ἑπόμενοι ακ, δπ· ὅθεν ἔσαι ακδπ· ἑξῆς δὲ οἱ δύω ἡγούμενοι α, δ· ὅθεν ἔσαι αδ, καὶ σημανθήτω ἡ τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου διαίρεσις οὕτως $\frac{\alpha\kappa\delta\pi}{\alpha\delta}$, ὃ δὴ ἀναγω-

γῆς ἐςὶ κπ· φημὶ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν δύω $\frac{ακ}{α}$, $\frac{δπ}{δ}$ λόγων γινόμενον εἶναι ἀληθῶς κπ· ὁ γὰρ $\frac{ακ}{α}$ λόγος τὸ πηλίκον ὑπάρχει κ, ὁ δὲ $\frac{δπ}{δ}$ τὸ πηλίκον π· πολλαπλασιάζειν ἄρα $\frac{ακ}{α}$ ἐπὶ $\frac{δπ}{δ}$ ταυτόν ἐςι· πολλαπλάσιαζειν κ ἐπὶ π· ὅθεν γίνεται κπ· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Πολλαπλασιάζοντες, 2 : 6 διὰ 4 : 8, ἢ $\frac{6}{2}$ διὰ $\frac{8}{4}$ ἐπάγομεν τὸν 6 ἐπὶ 8, εἶτα τὸν 2 ἐπὶ 4, γράφοντες $\frac{48}{8}$ = 6 γινόμενον ὑπὸ 2 : 6, 4 : 8.

231. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οἱ δύω τύποι $\frac{ακ}{α}$ καὶ $\frac{δπ}{δ}$ παριςᾶσιν ἐχ' ἧττον δύω λόγες, ἢ δύω σεσημειωμένα πηλίκα, ἢ δύω κλάσματα (226)· ὅταν ἄρα προκέηται πολλαπλασιάζειν δύω σεσημειωμένα πηλίκα θάτερον ἐπὶ θάτερον, ἢ δύω κλάσματα, ἀριθμητικὰ ἢ συμβολικὰ, πολλαπλασιαθήτω τὸ ὑπὲρ τῆς ἑτέρας γραμμῆς διὰ τε ὑπὲρ τῆς ἑτέρας, εἶτα τὸ ὑπὸ τὴν ἑτέραν γραμμὴν διὰ τε ὑπὸ τὴν ἑτέραν.

232. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ. Ἐὰν παντὸς λόγε ἑκάτερος τῶν ὅρων ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν πολλαπλασιαθῇ, ἡ τε λόγε δύναμις ἀμεταποίητος ἔςαι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν τε α : ακ λόγε, ἢ $\frac{ακ}{α}$ πολλαπλασιαθῇ ὅ, τε α κ̓αὶ ακ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν π, φημὶ ὅτι τὸ ἀποτελέμενον $\frac{ακπ}{απ}$ ἔςι τὸ αὐτὸ τῷ $\frac{ακ}{α}$ λόγῳ· ἔςι γὰρ ὁ $\frac{ακ}{α}$

λόγος κ (55, 183), ἀλλὰ κ ἐςιν ὡσαύτως καὶ ὁ $\frac{\alpha\kappa\pi}{\kappa\pi}$ λόγος. Ο. Ε. Δ.

Πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ 4 ἑκατέρȣ τῶν ὅρων τȣ̃ λόγȣ $2:6$, ἢ $\frac{6}{2}$, ὁ λόγος $\frac{24}{8}$ ἐςιν ὁ αὐτὸς τῷ $\frac{6}{2}$· ἐπεὶ $\frac{6}{2}=3$, ϗ $\frac{24}{8}=3$.

233. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἐὰν διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ποσȣ̃ π ἑκάτερος τῶν ὅρων τȣ̃ $\alpha:\alpha\kappa$ λόγȣ διαιρεθῇ, τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\pi}:\frac{\alpha\kappa}{\pi}$ τον αυτὸν ἐμφανεῖ λόγον.

ΔΕΙΞΙΣ· Πολλαπλασιασθέντων τῶν $\frac{\alpha}{\pi}$, $\frac{\alpha\kappa}{\pi}$ διὰ π, ἔςαι $\frac{\alpha\pi}{\pi}$, ϗ $\frac{\alpha\kappa\pi}{\pi}$, ἅπερ ἀναγωγῇ γίνεται α, ακ· ἀλλαμὴν τῷδε τῷ διὰ π πολλαπλασιασμῷ ȣ̓δόλως μεταπεποίηται ὁ $\frac{\alpha}{\pi}:\frac{\alpha\kappa}{\pi}$ λόγος (232)· ἄρα πρὶν ἢ πολλαπλασιασθῇ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\pi}:\frac{\alpha\kappa}{\pi}$ ὁ αὐτὸς ἦν τῷ $\alpha:\alpha\kappa$· ἄρα τȣ́τε α ϗ ακ διὰ π διαιρεθέντων ὁ λόγος ἥκιςα μετατέτραπται. Ο. Ε. Δ.

234. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὰ ἄρα ὅμοια μέρη δυοῖν ὅλων, τὰ αὐτῶν φέρ' εἰπεῖν τέταρτα $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha\kappa}{4}$ εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἐν ᾧ ϗ τὰ ὅλα· ϗ γὰρ ὁ $\frac{\alpha}{4}:\frac{\alpha\kappa}{4}$ λόγος ὁ μεταξὺ τῶν τεταρτημορίων ἐςιν ὁ αὐτὸς λόγος $\alpha:\alpha\kappa$, ὅς ἐςι μεταξὺ τῶν ὅλων, ȣ̃ οἱ ὅροι α ϗ ακ διὰ τῆς αὐτῆς 4 ποσότητος διῄρηνται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ ἀναλογίας γεωμετρικῆς.

235. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Πᾶσα γεωμετρικὴ ἀναλογία ἐκτεθῆναι δύναται διὰ τȣ͂ τύπȣ α: ακ :: δ:δκ.

ΔΕΙΞΙΣ. Τῶν ἅπασαν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν παρισώντων δύω λόγων ὁ μὲν πρῶτος ἀεὶ ἐκτεθῆναι ἔχει διὰ α: ακ, ὁ δὲ, ὡς τῷ πρώτῳ ἴσος (ἄλλως γὰρ ȣ̓κ ἂν συςαίη ἀναλογία (185)) διὰ δ: δκ (229)· ὅλος ἄρα ὁ τύπος ἔςαι α: ακ :: δ: δκ. Ο. Ε. Δ.

236. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵνα παραβληθῶσιν ἀλλήλαις δύω διαφέρȣσαι ἀναλογίαι, ἐκτεθήσεται ἡ μὲν πρώτη διὰ α: ακ :: δ: δκ· κληθέντος δ᾽ εἶτα π φέρε τȣ͂ ἴσȣ πηλίκȣ, τȣ͂ ἐπικρατȣ͂ντος ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ, ε τȣ͂ ἡγȣμένȣ ὅρȣ τȣ͂ πρώτȣ λόγȣ τῆς δευτέρας τῆς δε ἀναλογίας, ϗ η τȣ͂ κατὰ τὸν δεύτερον ταύτης λόγον ἡγȣμένȣ, προκύψει ὁ καινὸς τύπος ε: επ :: η: ηπ, ἐμφαίνων τὴν δευτέραν ἀναλογίαν (227, 229)

Τῶν δύω ἀναλογιῶν 2: 6 :: 4: 12 ϗ 1: 5 :: 4: 20, ἡ μὲν πρώτη δύναται ἐκτεθῆναι διὰ α: ακ :: δ: δκ, ἡ δὲ δευτέρα διὰ ε: επ :: η: ηπ.

237. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Πᾶσα γεωμετρικὴ συνεχὴς ἀναλογία αὐξȣσάτε ϗ μειȣμένη (193) δύναται παραςαθῆναι διὰ τȣ͂ τύπȣ ∻ α: ακ: ακ².

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ γεωμετρικὴ συνεχὴς ἀναλογία περιέχει ὅρȣς τρεῖς, ὧν ὁ δεύτερος διαιρεθεὶς διὰ τȣ͂ πρώτȣ τὸ αὐτὸ πηλίκον δίδωσιν, ὃ ϗ ὁ τρίτος διαιρεθεὶς διὰ τȣ͂ δευτέρȣ (187, 191)· κληθέντος ἄρα α μὲν τȣ͂

πρώτȣ ὅρȣ, κ δὲ τȣ͂ πηλίκȣ, ὁ δεύτερος ὡς διαιρετέος ἰσωθήσεται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ͂ πρώτȣ α ὡς διαιρέτȣ, ϗ τȣ͂ κ πηλίκȣ, εἴτ' ȣ͂ν τῷ ακ· ὁ δὲ τρίτος ὡς διαιρετέος ἰσωθήσεται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ͂ δευτέρȣ ὡς διαιρέτȣ ϗ τȣ͂ κ πηλίκȣ, εἴτ' ȣ͂ν τῷ $ακ^2$. Ο. Ε. Δ.

Ἐπὶ τῆς συνεχȣ͂ς ἀναλογίας ∺ 2 : 8 : 32 ἐκτεθέντος τȣ͂ 2 διὰ α, τȣ͂δ' ἐπικρατȣ͂ντος πηλίκȣ 4 διὰ κ, ὁ μὲν 8 ἐκτεθήσεται διὰ 2 × 4, ἢ α × κ, ἢ ακ, ὁ δὲ 32 διὰ 8 × 4, ἢ ακ × κ, $ακ^2$

238. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐφ' ἁπάσης γεωμετρικῆς ἀναλογίας τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν μέσων.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ γεωμετρικὴ ἀναλογία παραςαθῆναι δύναται διὰ τȣ͂ τύπȣ α : ακ :: δ : δκ (235)· ἔνθα τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων α ϗ δκ γινόμενον αδκ, προφανῶς ἰσȣ͂ται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ακ ϗ δ γινομένῳ ακδ Ο.Ε.Δ.

Ἐπὶ τῆς ἐν ἀριθμοῖς γεωμετρικῆς ἀναλογίας 2 : 8 :: 5 : 20 τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων 2 ϗ 20 γινόμενον ἐςὶν 2×20 = 40, τόδ' ὑπὸ τῶν μέσων 8 × 5 = 40

239. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Τȣ͂ναντίον δὲ τέσσαρες ὅροι ἀναλογίαν συνιςῶσιν, ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἰσῶται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Φημὶ δὴ ὡς, ἐὰν ἐπὶ α, β, γ, δ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον αδ ἰσῶται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων βγ, οἱ τέσσαρες ὅροι ἀναλογίαν συνιςῶσιν, ἔςαι δηλονότι α : β :: γ : δ (187).

ά. Πολλαπλασιάζω α ϗ β διὰ γ· ὅθεν αγ : βγ :: α : β (232).

β΄. Πολλαπλασιάζω γ ϗ δ διὰ α· ὅθεν αγ : αδ :: γ : δ (232).

γ΄. Ἐπείπερ, ἐξ ὑποθέσεως, αδ = βγ, δύναμαι ἐπὶ τῆς δευτέρας τῶν προεκτεθεισῶν ἀναλογιῶν ἀντὶ αδ ἀντικαταςῆσαι βγ· ἡ δ' ἀναλογία γενήσεται αγ : βγ :: γ : δ.

δ΄. Ἐνταύτῃ τῇ ἀναλογίᾳ διαιρῶ αγ καὶ βγ διὰ γ (233), ἀποκαταςαθήσεται ἓν ἡ ἀναλογία α : β :: γ : δ Ο. Ε. Δ.

240. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Εἰς ἄρα πληροφορίαν, ὅτι τέσσαρά τινα ποσὰ ἀνάλογά εἰσι, ἀποχρήσει ἰδεῖν, εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἐξισῶται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ.

241. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐκδυοῖν ἰσαλλήλων παραγομένων ἀεὶ ἀναλογίαν συςῆσαι δυνάμεθα, θατέρου μὲν τοὺς δύω ποιητὰς ἄκρους ποιούμενοι, θατέρου δὲ, μέσους· οὕτως, εἴπερ εἴη αδ = βγ, ἕξομεν τὴν ἀναλογίαν α : β :: γ : δ. Ἐὰν δ' ἐν ἀριθμοῖς ἡ 2 × 10 = 4 × 5, ἐκ τούτων ἀπολαβεῖν ἕξομεν 2 : 4 :: 5 : 10· ἐντεῦθεν γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων 2 × 10 πορισθήσεται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων 4 × 5.

242. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τέσσαρες ὅροι ἀναλογίαν συνιςάντες, ὀκταχῶς μετατεθέντες, δύνανται καὶ οὕτω τὴν ἀναλογίαν μὴ λυμήνασθαι· ἁπάσης γὰρ ἀναλογίας διὰ α : απ :: δ : δπ παριςαμένης, ἐξέσαι διαθεῖναι

τοὺς ὅρους α΄. ὡς ἔχουσιν	α : απ :: δ : δπ
β΄. μεταλλαγῇ τῶν μέσων θατέρου ἀντὶ θατέρου	α : δ : απ : δπ, ἥτις
ἐναλλὰξ ἀναλογία καλεῖται	
γ΄. μεταλλαγῇ τῶν ἡγουμένων,	απ : α :: δπ : δ
δ΄. τῶν ἑπομένων συνιςάντων τὸν πρῶτον λόγον, τῶν δὲ ἡγουμένων τὸν δεύτερον	απ : δπ :: α : δ

έ. τιθεμένȣ πρώτȣ τȣ͂ δπ. δπ : δ : : απ : α
ς'. τȣ͂ αὐτȣ͂ τιθεμένȣ πρώτȣ: δπ : απ : : δ : α
ζ'. τιθεμένȣ τȣ͂ δ πρώτȣ δ : δπ : : α : απ
ή. τιθεμένȣ τȣ͂ αὐτȣ͂ δ : α : : δπ : απ

Ἐπὶ πασῶν γὰρ τῶνδε τῶν διαθέσεων ἰσȣ͂ται τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ (240).

Ἐπὶ τῆς ἀναλογίας 2 : 4 : : 3 : 6 μετατιθέντες ἕκαςον ἀλληλοδιαδόχως τῶν τεσσάρων τῆς ἀναλογίας ὅρων 2, 4, 3, 6, ἕξομεν ά. 2 : 4 : : 3 : 6, β'. 2 : 3 : : 4 : 6, γ'. 4 : 2 : : 6 : 3, δ'. 4 : 6 : : 2 : 3, έ. 3 : 6 : : 2 : 4, ς'. 3 : 2 : : 6 : 4, ζ'. 6 : 3 : : 4 : 2, ή. 6 : 4 : : 3 : 2· ἐφ' ἑκάςης γὰρ διαφερȣ́σης διαθέσεως ἐξισȣ͂ται τὸ ὑπὸ τῶν μέσων τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένῳ.

243. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Δυνησόμεθα ἔτι ἐπὶ τῆς ἀναλογίας α : απ : : δ : δπ ποιῆσαι τὰς ἐφεξῆς μεταβολὰς, μηδὲν ὑφισαμένων τῶν ὅρων, ὥςε τȣ͂ ἀνάλογον εἶναι ἐξίςασθαι.

244. ά. Δυνάμεθα γὰρ τȣ̀ς ἑπομένȣς τοῖς ἡγȣμένοις συνάψαι, ἢ καὶ τἀνάπαλιν· α + απ : απ : : δ + δπ : δπ
ἢ α : απ + α : : δ : δπ + δ
ἢ απ + α : α : : δπ + δ : δ κτ,
αὕτη δὲ ἡ μεταλλαγὴ Σύνθεσις λόγȣ ὀνομάζεται· ἐπεὶ δὲ ἐπὶ πασῶν τῶν διαφόρων τῶνδε διαθέσεων τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἰσȣ͂ται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων παραγομένῳ, ἄρα τῆς ἀναλογίας οἱ ὅροι ȣ̓κ ἐκπίπτȣσι.

245. β'. Δυνάμεθα τἀνάπαλιν ἀφελεῖν τȣ̀ς ἑπομένȣς τῶν ἡγȣμένων, ἢ καὶ ἀντιςρόφως.

α — απ : απ : : δ — δπ : δπ
α : απ — α : : δ : δπ — δ
απ — α : α : : δπ — δ : δ

καλεῖται δὲ τȣ̃το λόγȣ Διαίρεσις· τὸ δ᾽ ὑπὸ τῶν ἄκρων κἀνταῦθα τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ ἴσον εὑρίσκεται.

246. γ΄. Διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ποσȣ̃ κ πολλαπλασιάσαι δυνάμεθα, ἤτοι μόνȣς τȣ̀ς ἡγȣμένȣς, ἢ τȣ́ς τε ἡγȣμένȣς ϗ ἑπομένȣς δύω λόγων, ἢ μόνȣς τȣ̀ς ἑνὸς λόγȣ ὅρȣς ȣ̂τως·

ακ : απ : : δκ : δπ
ἢ α : απκ : : δ : δπκ
ἢ ακ : απκ : : δκ : δπκ
ἢ ακ : απκ : : δ : δϖ
ἢ α : απ : : δκ : δπκ

ἀεὶ γὰρ ἐξισωθήσεται τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῷ ὑπὸ τῶν μέσων προκύπτοντι.

247. δ΄. Καὶ διαιρεῖν δὲ ξυνησόμεθα ὡσαύτως ἑκάστην τῶν προεκτεθεισῶν τάξεων (233).

248. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Ἐν ἁπάσῃ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τȣ̃ μέσȣ τετραγώνῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ συνεχὴς ἀναλογία παρίςασθαι δύναται διὰ τȣ̃ τύπȣ $\div$ α : απ : απ² (237)· ἀλλ᾽ ἐπὶ τοῦδε τοῦ τύπου τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων προκύπτον α² π² (39, 40) ἴσον ἐςὶ τῷ τετραγώνῳ απ × απ, ἢ α² π² (78) τῷ ἀπὸ τȣ̃ μέσȣ ἀναλόγȣ απ· Ο. Ε. Δ.

Ἐπὶ τῆς συνεχȣ̃ς ἀναλογίας $\div$ 2 : 6 : 18 τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον 2 × 18 ἴσον ἐςὶ τῷ 6 × 6, ἢ τῷ ἀπὸ τȣ̃ μέσȣ ἀναλόγȣ τετραγώνῳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὰ θεωρήματα Γ΄. Δ΄. Ε΄. ϗ τὰ ἐντεῦθεν προπιδύοντα πορίσματα μεγίςην ἔχȣσι χρῆσιν· εἰσὶ γὰρ τὰ ςοιχεῖα τῶν πλειόνων γεωμετρικῶν δείξεων, ναὶ μὴν ϗ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, τά τε μάλιςα ξυν-

τελȣ̃ντα τῷ κοινωνικῷ βίῳ· τȣ̃τε γὰρ Γεωμέτρȣ ϗ τȣ̃ Α'ριθμητικȣ̃ ἡ πᾶσα τέχνη ἐν τȣ́τῳ μάλιϛα κεῖται, ἐπίϛαϑαι ἀμέλει χρῆϑαι ταῖς διαφόροις ταῖςδε ἰδιότησιν πρὸς ἀπάρτισιν τῶν δείξεων, ἢ γȣ̃ν πρὸς τὸ ἀπευθύνεϑαι εἰς τὰς τȣ̃ λογισμȣ̃ ἐργασίας· σαφέϛερον δὲ τὸ πρᾶγμα καταϛαθήσεται διὰ τῶνδε.

249. Αὐτίκα γὰρ ϑῶμεν, ὅτι ποσότητες τέσσαρες, ἀριθμοὶ, φέρ' εἰπεῖν, ἢ γραμμαὶ, ἃ ἀεὶ καλεῖν δυνάμεθα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ἀνάλογόν εἰσι, συνιϛῶντα τὴν ἀναλογίαν $\alpha:\beta::\gamma:\delta$. Μ.

250. ά. Συναγαγεῖν δυνάμεθα, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐϛὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων (238).

β'. Ὅτι $\alpha = \frac{\beta\gamma}{\delta}$, ϗ $\delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ καὶ $\beta = \frac{\alpha\delta}{\gamma}$ $\gamma = \frac{\alpha\delta}{\beta}$ (Α'ριθ. 108).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ε'πὶ τῆς Μ ἀναλογίας, ἔϛω $\alpha = 2$, ϗ $\beta = 6$, ϗ $\gamma = 3$, ϗ $\delta = 9$· ȣ̓κȣ̃ν ἡ Μ ἀναλογία γενήσεται $2:6::3:9$· ἐντεῦθεν συνάγεται ά. ὅτι $2\times9 = 6\times3$· β'. ὅτι $2 = \frac{6\times3}{9}$· γ'. $9 = \frac{6\times3}{2}$· δ'. $6 = \frac{2\times9}{3}$· έ. $3 = \frac{2\times9}{6}$.

251. Ε'κ τῶν τεσσάρων ἄρα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἀναλόγων ὅρων, ἐὰν οἱ τρεῖς ἐγνωσμένοι ὦσι, ῥᾷϛα ϗ ἡ τȣ̃ τετάρτȣ δύναμις γνωσϑήσεται.

252. γ'. Ε'πὶ ταύτῃ δὲ τῇ ἀρχῇ ϗ ἡ τῶν τριῶν γεωμετρικὴ μέθοδος ἐρείδεται, ἡ τοσαύτην ἔχȣσα ἐν τῷ κοινωνικῷ βίῳ τὴν χρῆσιν. Τεσσάρων γὰρ ἀριθμῶν, ȣ̃ς ἤδη ἐμφαίνω διὰ τῶν γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ἀ-

νάλογον ὄντων πρὸς ἀλλήλους $\alpha:\beta::\gamma:\delta$, τοὺς τρεῖς μὲν γινώσκω, ἀγνοῶ δὲ τὸν τέταρτον· εἰ μὲν οὖν οὗτος εἴη ὁ δ, πολλαπλασιάζω ἐπὶ γ τὸ β, τὸ δὲ γινόμενον διαιρῶ διὰ α· οὗκοῦν τὸ πηλίκον ἔσαι ὁ ζητούμενος τέταρτος· εἰ δ' ὁ α, πολλαπλασιάζω β ἐπὶ γ, διαιρῶν διὰ δ τὸ γινόμενον· εἰ δ' ὁ β, τὸ ὑπὸ α καὶ δ προκύπτον διαιρῶ διὰ γ· εἰ δὲ τέλος ἀγνοοῖτο ὁ γ, διαιρῶ διὰ β τὸ ὑπὸ α καὶ δ παραγόμενον.

253. δ'. Γινώσκεται, ὅτι καὶ τρεῖς ποσότητες α, β, γ συγκροτοῦσι τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν $\div\, \alpha:\beta:\gamma$ (Ρ)· ά. ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι (248) $\alpha\gamma = \beta^2$, ὅθεν

$$\alpha = \frac{\beta^2}{\gamma},\ \text{καὶ}\ \gamma = \frac{\beta^2}{\alpha},\ \text{καὶ}\ \beta = \sqrt{\alpha\gamma}.$$

254. Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας Ρ γινώσκηται τὰ α καὶ β, βουλώμεθα δὲ εὑρεῖν τὸ γ, τετραγωνισέον μὲν τὸ β, τὸ δὲ β^2 τετράγωνον διαιρετέον διὰ α· τὸ δὲ πηλίκον δώσει τὸ γ· ἐὰν δὲ γινώσκωμεν τὸ β καὶ γ, τὸ β^2 τετράγωνον διελόντες διὰ γ, ἕξομεν τὸ α· ἐὰν τέλος γινώσκωμεν α καὶ γ, τοῦ ὑπ' αὐτῶν γινομένου $\alpha\gamma$ ἐξαγαγόντες τὴν ῥίζαν τὴν τετραγώνειον ἀποληψόμεθα τὸ β.

Ἐν ἀριθμοῖς. Ἐὰν ᾖ $\div\, 2:6:\chi$· τοῦ ἀπὸ 6 τετραγώνου 36 διὰ 2 διαιρεθέντος, προκύψει $18 = \chi$· ἐὰν δ' ᾖ $\div\, \chi:6:18$, τὸν αὐτὸν 36 τετράγωνον διὰ 18 διελόντες ἕξομεν $2 = \chi$· τέλος δὲ ἐὰν ᾖ $\div\, 2:\chi:18$, τοῦ ὑπὸ 2 καὶ 18 γινομένου 36 ἐξαγαγόντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀποληψόμεθα 6 μέσον ἀνάλογον.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ταυτὶ τὰ δισσὰ εἴδη τῆς τῶν τριῶν μεθόδου τὰ ἄρτι δεδειγμένα (252, 254) ἐκτελοῦνται

ὀχ ὅπως ἐν ἀριθμοῖς καὶ ςοιχείοις, ἀλλὰ δὴ καὶ ἐν γραμμαῖς κτ.

255. έ. Ἐὰν τέτταρα ἐκτεθειμένα ποσὰ, τέσσαρες, φέρ' εἰπεῖν, γραμμαὶ, συνιςῶσιν ἀναλογίαν $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$· ἐκ δὲ ταύτης τῆς τῶν ὅρων διαθέσεως μὴ ἕπηται εὐθέως ἡ ζητȣμένη δεῖξις, ληπτέον μίαν τινὰ τῶν ἑτέρων ἑπτὰ δυνατῶν διαθέσεων, ἣ ἂν ἄγοι ἐπὶ τὸ σκοπȣ́μενον (242) φέρ' εἰπεῖν τὴν $\alpha : \gamma :: \beta : \delta$.

256. ς'. Ἐὰν μὴ ἐξῇ διὰ τῶν τεσσάρων τῆς ἀναλογίας ὅρων $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$ συμπληρῶσαι τὴν προκειμένην δεῖξιν, ποιȣ̃μεν ἐπὶ τῶνδε τῶν τεσσάρων ὅρων ἐκ τῶν διαφόρων ἐναλλαγῶν, μηδόλως τῆς ἀναλογίας ἐξιςαμένων (244 κτ.) τῶν ὅρων, τὴν δυνατῶς ἔχȣσαν ἀγαγεῖν ἡμᾶς ἐπὶ τὸ σκοπȣ́μενον τέλος.

257. ΘΕΩΡΗΜΑ ς'. Πολλαπλασιαζομένȣ λόγȣ τινὸς, ἢ πηλίκȣ σεσημειωμένȣ, ἢ κλάσματος, οἷον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐπὶ ὁλοσχερὲς ποσὸν τὸ π, πολλαπλασιασθήσεται τὸ ὑπὲρ τῆς γραμμῆς ποσὸν α ἐπὶ τὸ ὁλοσχερὲς π, τὸ δὲ ζητȣ́μενον προκύπτον ἔςαι $\frac{\alpha\varpi}{\beta}$

ΔΕΙΞΙΣ. Ἅπας πολλαπλασιασμὸς ἐςιν ἀσφαλὴς, ἐὰν τὸ παραγόμενον ᾖ πρὸς τὸν πολλαπλασιαςέον, ὡς ὁ πολλαπλασιαςὴς πρὸς τὴν μονάδα· ἀλλὰ μὴν τὸ παραγόμενον $\frac{\alpha\pi}{\beta}$ ἐςὶ πρὸς τὸν πολλαπλασιαςέον $\frac{\alpha}{\beta}$ ὡς ὁ π πολλαπλασιαςὴς πρὸς τὴν 1, εἴγε $\frac{\alpha\pi}{\beta} : \frac{\alpha}{\beta} :: \pi : 1$ ȣ̉δέν ἐςιν ἀλλ' ἢ $\alpha\pi : \alpha :: \pi : 1$ (240), ἔνθα διῄρηνται οἱ δύω

ὅροι $\alpha\pi : \alpha$ διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος β, μηδεμιᾶς γινομένης ἀλλοιώσεως (233)· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἐν ἀριθμοῖς. Κείσθω πολλαπλασιάσαι τὸ $\frac{3}{4}$, ὅπερ ἐπίσης ἐςὶ καὶ λόγος, καὶ πηλίκον σεσημειωμένον, καὶ κλάσμα, ἐπὶ τὸν ὁλοχερῆ 5· ἐὰν ἓν πολλαπλασιασθῇ τὸ ὑπὲρ τῆς γραμμῆς 3 ἐπὶ τὸ ὁλοχερὲς 5, καὶ γραφῇ $\frac{3\times5}{4}$, ἢ $\frac{15}{4}$, πορισθήσεται προκύπτον ἀκριβές· ἔςι γὰρ ἐν τούτοις ἡ ἑξῆς ἀναλογία: τὸ προκύπτον $\frac{15}{4}$ ἔςι πρὸς τὸν πολλαπλασιαςέον $\frac{3}{4}$ ὡς ὁ πολλαπλασιαςὴς 5 πρὸς τὴν 1, εἴγε $\frac{15}{4} : \frac{3}{4} :: 5 : 1$ οὐδέν ἐςιν ὅτι μὴ ἡ ἀναλογία $15 ; 3 :: 5 : 1$ διῃρημένη τὸν πρῶτον λόγον διὰ 4, ὅπερ ἥκιςα λυμαίνεται τὴν ἀναλογίαν (240).

258. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄. Δύω σεσημειωμένα πηλίκα τὰ $\frac{\alpha\varpi}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}$, ὧν διαιρέτης μὲν κοινὸς ὁ β, διαιρετέοι δὲ διάφοροι οἱ $\alpha\pi$, α, πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ αὐτῶν διαιρετέοι $\alpha\varpi$, α

ΔΕΙΞΙΣ. Πορισθήσεται γὰρ ἐπιεικῶς ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha\varpi}{\beta} : \frac{\alpha}{\beta} :: \alpha\varpi : \alpha$ (240, 257) Ο. Ε. Δ.

Ἐπὶ τῶν $\frac{20}{4}$, $\frac{5}{4}$, ἔςι $\frac{20}{4} : \frac{5}{4} :: 20 : 5$ (αὐτόθ.).

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα διαιρέσεις δύω, ἔχουσαι τὸν αὐτὸν διαιρέτην, κοινοῦ πλουτῶσι καὶ τοῦ διαιρετέου, τὰ πηλίκα ἰσάλληλα ἔσονται.

259. ΘΕΩΡΗΜΑ Η΄. Τοὐναντίον δὲ ἐὰν δύω πηλίκα, τὸν αὐτὸν ἔχοντα διαιρετέον, μὴ ἔχωσι καὶ διαιρέτην τὸν αὐτὸν, οἷα τα $\frac{\beta}{\alpha\varpi}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, ἐν λόγῳ ἀντιθέ-

τῳ ἔσονται τῶν διαιρετῶν· προκύψει γὰρ ἐντεῦθεν ἡ ἀναλογία $\frac{\beta}{\alpha\pi} : \frac{\beta}{\alpha} :: \alpha : \alpha\pi$ (240,) ἐν ᾗ ὁ διαιρέτης τȣ͂ πρώτȣ ὅρȣ απ τέταρτος ἐγένετο ὅρος, ὁ δὲ τȣ͂ δευτέρȣ ὅρȣ διαιρέτης α ἐγένετο τρίτος, ὅπερ δίδωσι τάξιν ἀντίθετον. Ο. Ε. Δ.

Ἐπὶ $\frac{5}{20}$, $\frac{5}{4}$ ἔσαι ἡ ἀναλογία $\frac{5}{20} : \frac{5}{4} :: 4 : 20$ (240).

260. ΘΕΩΡΗΜΑ Θʹ. Συμβὰν δὲ ἐπὶ δύω διαιρέσεων τȣ̀ς διαιρετέȣς εἶναι ἀντιπεπονθότως, ὥσπερ οἱ διαιρέται, τὰ πηλίκα εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετέων τετράγωνα, ἢ ἀντιςρόφως ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπὶ τῶν $\frac{\alpha}{\beta\pi}$, $\frac{\beta}{\alpha\pi}$, ἔνθα οἱ διαιρετέοι α, β ἀντιςρόφως εἰσὶν, ἢ ὡς οἱ διαιρέται βϖ, αϖ, εἴγε ἐςὶν ἀληθῶς $\alpha : \beta :: \alpha\varpi : \beta\varpi$, τὰ δύω πηλίκα $\frac{\alpha}{\varpi\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha\varpi}$ παρέχȣσι τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta\varpi} : \frac{\beta}{\alpha\varpi} :: \alpha^2 : \beta^2$, εἴγε τὸ ὑπὸ τῶν μέσων γινόμενον $\frac{\alpha^2\beta}{\varpi\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\varpi}$ ἰσȣ͂ται τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων $\frac{\alpha\beta^2}{\beta\varpi} = \frac{\alpha\beta}{\varpi}$· οἱ αὐτοὶ δὲ διδόασι καὶ τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta\pi} : \frac{\beta}{\alpha\varpi} :: \alpha^2\varpi^2 : \beta^2\varpi^2$ (240)· ἀλλὰ μὴν ἡ μὲν πρώτη δείκνυσιν, ὅτι τὰ πηλίκα $\frac{\alpha}{\beta\varpi}$, $\frac{\beta}{\alpha\varpi}$ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετέων τετράγωνα α^2, β^2, ἡ δὲ,

ὡς εἰσὶν ἀντιςρόφως ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετῶν τετράγωνα $\beta^2 \varpi^2$, $\alpha^2 \varpi^2$ · (189)· ἐν γένει ἄρα κτ. Ο.Ε.Δ.

Ἐν ἀριθμοῖς. Ἐπὶ τῶν δύω πηλίκων $\frac{2}{12}$, $\frac{6}{4}$, ἐν οἷς οἱ διαιρετέοι εἰσὶν ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ τῶν διαιρετῶν εἴτ' ἂν 2 : 6 : : 4 : 12 (240) ἔςιν ἡ ἀναλογία $\frac{2}{12}$: $\frac{6}{4}$: : 4 : 36, ἐφ' ἧς τὸ πρῶτον πηλίκον λόγον ἔχει πρὸς τὸ δεύτερον, ὃν τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου διαιρετέου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου (240).

Ἐπὶ τῶν αὐτῶν δὲ $\frac{2}{12}$: $\frac{6}{4}$: : 16 : 144 (240), ἐφ' ἧς ἀναγινώσκομεν, τὸ πρῶτον πηλίκον πρὸς τὸ δεύτερον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τοῦ διαιρέτου τοῦ δευτέρου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου.

261. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ δύω κλάσματα δύω πηλίκα ὑπάρχει σεσημειωμένα, ὧν διαιρετέοι μέν εἰσιν οἱ ἀριθμηταὶ, διαιρέται δὲ οἱ παρονομαςαί· δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν προεκτεθέντων τριῶν θεωρημάτων τὰ ἑξῆς ἐπαγαγεῖν.

α΄. Δύω κλάσματα, τὸν αὐτὸν ἔχοντα παρονομαςὴν, ἔσονται πρὸς ἄλληλα, ὥσπερ οἱ αὐτῶν ἀριθμηταί. β΄. τὸν αὐτὸν δὲ ἔχοντα ἀριθμητὴν, ἔσονται ἀντιςρόφως ὡς οἱ παρονομαςαί· γ΄. ἐὰν δὲ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν δύω κλασμάτων ἀντιπεπονθότως ὦσιν, ὡς οἱ παρονομαςαὶ, τὰ κλάσματα ταῦτα ἔσονται, ἤτοι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀριθμητῶν τετράγωνα, ἢ ἀντιςρόφως ὥσπερ τὰ ἀπὸ τῶν παρονομαςῶν.

262. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι΄. Ἐὰν πλειόνων ἀναλογιῶν πολλαπλασιαθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσιν, ὁ πρῶτος ὅρος διὰ τοῦ πρώτου, ὁ δὲ δεύτερος διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ ἑξῆς οὕτω, τὰ προκύπτοντα, ἢ τὰ πηλίκα, καὶ ταῦτα ἀνάλογον ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Δυεῖν ὁποιωνοῦν ἀναλογιῶν ἡ μὲν ἂν πα-

ρασαίη διὰ $\alpha : \alpha\pi :: \delta : \delta\pi$, ἡ δὲ διὰ $\varepsilon : \varepsilon\kappa :: \eta : \eta\kappa$ (236)· ά. ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν α ἐπὶ ε, απ ἐπὶ εκ κτ., τὰ παραγόμενα αε, απεκ, κτ. ἀνάλογον ϗ αὐτὰ ἔσονται· ἐπείπερ ἐν $\alpha\varepsilon : \alpha\pi\varepsilon\kappa :: \delta\eta : \delta\pi\eta\kappa$ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενοον ἰσȣται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ· β΄. ἐὰν διαιρεθῶσιν α διὰ ε ϗ απ διὰ εκ κτ., τὰ πηλίκα $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\alpha\pi}{\varepsilon\kappa}$ κτ. ἔσονται ϗ ταῦτα ἀνάλογον· ἐπὶ γὰρ $\frac{\alpha}{\varepsilon} : \frac{\alpha\pi}{\varepsilon\kappa} :: \frac{\delta}{\eta} : \frac{\delta\pi}{\eta\kappa}$ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων.

Ἐν ἀριθμοῖς· Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι, καθ' ἣν σεσημείωνται τάξιν, αἱ δύω ἀναλογίαι $4 : 20 :: 2 : 10$, ϗ $2 : 10 :: 1 : 5$, τὰ παραγόμενα 8, 200, 2, 50 παρέξȣσι τὴν ἀναλογίαν $8 : 200 :: 2 : 50$ (240)· ἐὰν δὲ διαιρεθῶσι, τὰ πηλίκα 2, 2, 2, 2 σησήσȣσι τὴν ἀναλογίαν $2 : 2 :: 2 : 2$ (αὐτόθι).

263. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΑ. Ἐὰν τέσσαρα ποσὰ ἀνάλογον ὦσι, ϗ οἱ ἀπ' αὐτῶν ὅμοιοι βαθμοὶ, ἢ αἱ αὐτῶν ῥίζαι ἀνάλογον ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω ἀνάλογον τέσσαρά τινα ποσὰ τὰ $\alpha : \alpha\pi :: \delta : \delta\varpi$, φημὶ δὴ ά. ὡς ϗ οἱ ἀπ' αὐτῶν ὅμοιοι βαθμοὶ, οἱ κύβοι, φέρε, ἀνάλογον ἔσονται· ἔςι ϗ γὰρ $\alpha^3 : \alpha^3\pi^3 :: \delta^3 : \delta^3\pi^3$ (240, 82)· β΄. καὶ αἱ ὁποιαιδηποτȣν αὐτῶν ὅμοιαι ῥίζαι, αἱ τέταρται φέρ' εἰπεῖν, ἀνάλογον ἔσονται· εἴγε $\alpha^{\frac{1}{4}} : \alpha^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{4}} :: \delta^{\frac{1}{4}} : \delta^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{4}}$ (124, 240) Ο. Ε. Δ.

Ἐν ἀριθμοῖς. Ἐὰν τῆς $1 : 2 :: 4 : 8$ ἀναλογίας ἕκαςος ὅρος κυβιωθῇ, ϗ οἱ κύβοι ἔσονται ἀνάλογον, $1 : 8 :: 64 : 512$ (240)· ἐὰν δὲ ἑκάςȣ ὅρȣ τῆς ἀναλογίας 4 :

36 : : 9 : 81 ἡ τετραγωνικὴ ἐξαχθῇ ῥίζα, ἔςαι ἡ ἀναλογία 2 : 6 : : 3 : 9.

264. ΣΧΟΛΙΟΝ. Αἱ ῥίζαι ȣ̓κ εἰσὶν ἀνάλογον τοῖς ἀπ᾽ αὐτῶν βαθμοῖς, ὡς μᾶλλον ἐν τοῖς ἐφεξῆς φανήσεται· ȣ̓ γὰρ δυνατὸν εἰπεῖν ὡς α πρὸς β λόγον ἔχει ὃν α^2 πρὸς β^2· ἐπὶ γὰρ τῶν α, ϐ, α^2, β^2 τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον $\alpha\beta^2$ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων $\beta\alpha^2$ προφανῶς ἔςιν ἄνισον· ȣ̓δὲ μὴν, φέρε, 1 πρὸς 2 λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ 1 τετράγωνον, ὃ ϗ αὐτό ἐςιν 1, πρὸς τὸ ἀπὸ 2 τετράγωνον 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ προόδȣ γεωμετρικῆς.

265. Πᾶσα ἀριθμητικὴ πρόοδος, οἷα ἡ ÷ 2.4.6.8 δύναται προδήλως κἀκτȣ̃ ο ἄρξασθαι, ȣ̃τως ÷ ο. 2.4.6.8. αὐτίκα γὰρ δῆλον, ὅτι 2 ὑπερέχει τȣ̃ ο, ὅσῳ ὁ 4 τȣ̃ 2· ἡγέμην γεωμετρικὴ ȣ̓ δύναται ἔχειν ο κυρίως εἰλημμένον ὡς ἕνα τῶν ἑαυτῆς ὅρων· αὕτη γὰρ ςίχος ἐςὶν ὅρων, ὧν ἅτερος τὸν ἕτερον ὁλοσχερῶς, ἢ ἐν μέρει, περιέχει· ἀλλαμὴν ο κυρίως εἰλημμένον ȣ̓δέν ἀλλ᾽ ἔλλειψις τȣ̃ ὄντος ὑπάρχον, ȣ̓ δύναται περιέχειν ὂν, ἄρα ȣ̓δὲ ὅρος προόδȣ γεωμετρικῆς ὑπάρχειν δύναται.

266. Πᾶσα γεωμετρικὴ πρόοδος ἤτοι αὔξει ἐπ᾽ ἄπειρον, οἷα ἡ ∺ 1 : 5 : 25 : 125 κτ. ἢ γȣ̃ν ἐπ᾽ ἄπειρον μειȣ̃ται, οἷα ἡ ∺ 8 : 2 : $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{32}$ κτ.

267. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἁπάσης γεωμετρικῆς προόδȣ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν ὅρων, οἳ τῶν ἄκρων ἴσον ἀπέχȣσιν, ἢ γȣ̃ν τῷ ἀ-

πὸ τȣ̃ μέσȣ ὅρȣ τετραγώνῳ, ἐὰν ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ᾖ περιττός· ἐπὶ γὰρ τῆς προεκτεθείσης προόδȣ $\div$ $\alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2 : \alpha\pi^3 : \alpha\pi^4 : \alpha\pi^5 : \alpha\pi^6$ κτ. φανερὸν ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων $\alpha \times \alpha\pi^6 = \alpha^2 \pi^6$, ϗ τὸ ὑπὸ τȣ̃ δευτέρȣ ϗ τȣ̃ παραλήγοντος $\alpha\pi \times \alpha\pi^5 = \alpha^2\pi^6$, ϗ τὸ ὑπὸ τȣ̃ τρίτȣ ϗ τȣ̃ προπαραλήγοντος $\alpha\pi^2 \times \alpha\pi^4 = \alpha^2\pi^6$, ϗ τὸ ἀπὸ τȣ̃ μέσȣ $\alpha\pi^3$ τετράγωνον $\alpha^2\pi^6$ πάντα ἰσάλληλά εἰσιν Ο. Ε. Δ.

268. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Πᾶσα γεωμετρικὴ πρόοδος, ϗ αὔξȣσα ϗ μειȣμένη, παραςαθῆναι ἂν ἔχοι διὰ τȣ̃ τύπȣ $\div$ $\alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2 : \alpha\pi^3$ $\alpha\pi^4$ κτ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ γεωμετρικὴ πρόοδος ȣ̓δέν ἐςιν ἀλλ' ἢ ἀναλογία συνεχὴς ἐκ πλειόνων, ἢ τριῶν, συγκεκροτημένη ὅρων (192)· πᾶσα δὲ γεωμετρικὴ ἀναλογία συνεχὴς παρίςαται διὰ τȣ̃ τύπȣ $\div$ $\alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2$ (237)· δῆλον ἄρα τὸ ζητȣ́μενον.

269· ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἁπάσης γεωμετρικῆς προόδȣ ἕκαςος ὅρος ἰσȣ̃ται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ ϗ τȣ̃ πηλίκȣ, ὑψωθέντος εἰς βαθμὸν ἐκδηλȣ́μενον διὰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τῶν ἡγȣμένων ὅρων· ἐπὶ γὰρ τοῦ γενικȣ̃ τύπου $\div$ $\alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2 : \alpha\pi^3 : \alpha\pi^4$ κτ. ὁ πέμπτος ὅρος $\alpha\pi^4$, φέρε, ἐξισȣ̃ται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ α ϗ τȣ̃ π^4, εἴτ ȣ̓̃ν τȣ̃ πηλίκȣ, ὑψωθέντος εἰς βαθμὸν τέταρτον, εἴγε τέσσαρες ὅροι τȣ̃ πέμπτȣ ἡγȣ̃νται· ὁ δὲ γενικὸς τȣτȣὶ τύπος δηλωθείη ἂν ȣ̔́τω $\mu = \alpha\pi^{\nu-1}$, ἐν ᾧ τὸ μὲν μ τὸν ζητȣ́μενον ἐμφαίνει ὅρον· τὸ δὲ ν τὸν χῶρον, ἐν ᾧ κεῖται.

Ἐπὶ $\div$ $2 : 4 : 8 : 16 : 32$ ὁ πέμπτος ὅρος 32 ἰσȣ̃ται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ πρώτȣ 2 ϗ τȣ̃ πηλίκȣ 2, τοῦ ἐνταύτῃ τῇ προόδῳ κρατȣ̃ντος, ὑψωθέντος εἰς βαθμὸν τέταρτον, εἴτ ȣ̓̃ν τȣ̃ 16. ϗ γὰρ $16 \times 2 = 32$.

270. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐν ἁπάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ· ὁ δ᾽ αὐτὸς πρῶτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὃν ὁ ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ· ϗ γὰρ ἐπὶ τȣ̃ τύπȣ ∺ $\alpha : \alpha\pi :$ $\alpha\varpi^2 : \alpha\varpi^3 : \alpha\varpi^4$, ὁ πρῶτος ὅρος α πρὸς τὸν τρίτον $\alpha\varpi^2$ ὡς τὸ ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ τετράγωνον α^2 πρὸς τὸ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ $\alpha^2\varpi^2$, εἴγε ἐςὶν $\alpha : \alpha\varpi^2 :: \alpha^2 : \alpha^2\varpi^2$ (240)· ὁ δ᾽ αὐτὸς πρῶτος α πρὸς τὸν τέταρτον $\alpha\varpi^3$, ὡς ὁ τȣ̃ πρώτȣ κύβος α^3 πρὸς τὸν τȣ̃ δευτερȣ $\alpha^3\varpi^3$, ἐπεὶ $\alpha : \alpha\varpi^3 ::$ $\alpha^3 : \alpha^3\pi^3$ (αὐτόθ.): ϗ ἐν γένει „ἐν ἁπάσῃ γεωμετρικῇ „προόδῳ ὁ πρῶτος ὅρος λόγον ἔχει πρὸς ἕτερόν τινα ὅ„ρον εἰλημμένον κατὰ τὸ δοκȣ̃ν, ὃν ἔχει ὁ αὐτὸς πρῶτος „ὅρος ὑψωθεὶς εἰς βαθμὸν, ἐμφαινόμενον τῷ ἀριθμῷ τῶν ὅρων, „τῶν ἡγȣμένων τȣ̃ προκειμένȣ ὅρȣ, πρὸς τὸν δεύτερον ὅ„ρον, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἠρμένον βαθμόν“.

271. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ. Ἐν ἁπάσῃ γεωμετικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγȣμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων λόγον ἔχει, ὃν εἷς τῶν ἡγȣμένων πρὸς τῶν ἑαυτῷ ἑπόμενον· ϗ γὰρ ἐφ᾽ ἁπάσης προόδȣ πάντες οἱ ὅροι πλὴν τȣ̃ ἐσχάτȣ εἰσὶν ἡγȣ́μενοι, ϗ πάντες παρὰ τὸν πρῶτον εἰσὶν ἑπόμενοι· τȣ́τȣ τεθέντος φημὶ, ὡς ἐπὶ τȣ̃ τύπȣ ∺ $\alpha : \alpha\varpi : \alpha\varpi^2 : \alpha\varpi^3 : \alpha\varpi^4$, τὸ πάντων τῶν ἡγȣμένων ἄθροισμα $\alpha + \alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3$ πρὸς τὸ πάντων τῶν ἑπομένων ἄθροισμα $\alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3 + \alpha\varpi^4$ λόγον ἔχει, ὃν εἷς ἡγȣ́μενος, ὁ α φέρε, πρὸς τὸν ἑαυτῷ ἑπόμενον $\alpha\varpi$, εἴτ᾽ ȣ̃ν $\alpha + \alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3 : \alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3 + \alpha\varpi^4 ::$ $\alpha : \alpha\varpi$· ἐςὶ γὰρ, ὡς δῆλον, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων.

272. Ἐπὶ ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 τὸ τῶν ἡγȣμένων ἄθροι-

σμα $2+4+8+16$, εἴτ᾽ ἓν 30 πρὸς τὸ τῶν ἑπομένων $4+8+16+32$, εἴτ᾽ ἓν 60, ὡς εἷς τῶν ἡγȣμένων ὁ 2 πρὸς τὸν ἑαυτῷ ἑπόμενον 4· ϗ γὰρ $30 : 60 :: 2 : 4$ (240).

273. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἁπάσης γεωμετρικῆς προόδȣ ὁ δεύτερος ὅρος πλὴν τȣ̃ πρώτȣ λόγον ἔχει πρὸς τὸν πρῶτον, ὃν ἔχει ὁ ἔχατος πλὴν τȣ̃ πρώτȣ πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἡγȣμένων τȣ̃ ἐχάτȣ· ἐπὶ γὰρ τȣ̃ τύπȣ $\div\!\!\div\, \alpha : \alpha\varpi : \alpha\varpi^2 : \alpha\varpi^3 : \alpha\varpi^4$ φημὶ ὅτι $\alpha\varpi - \alpha$ πρὸς α λόγον ἔχει, ὃν ὁ $\alpha\varpi^4 - \alpha$ πρὸς τὸ πάντων τῶν τȣ̃ ἐχάτȣ ἡγȣμένων ὅρων ἄθροισμα $\alpha + \alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3$, τȣτέςιν $\alpha\varpi - \alpha : \alpha :: \alpha\varpi^4 - \alpha : \alpha + \alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3$ (Ρ), ϗ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον $\alpha^2\varpi + \alpha^2\varpi^2 + \alpha^2\varpi^3 + \alpha^2\varpi^4 - \alpha^2 - \alpha^2\varpi - \alpha^2\varpi^2 - \alpha^2\varpi^3 = - \alpha^2 + \alpha^2\varpi^4$ ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν μέσων α, $\alpha\varpi^4 - \alpha$.

274. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Προόδȣ γεωμετρικῆς ἁπάσης ϗ αἱ διαφοραὶ τῶν ἀλληλοδιαδόχων ὅρων πρόοδον συγκροτȣ̃σι γεωμετρικήν· ἐὰν γάρ ᾖ $\div\!\!\div\, \alpha : \alpha\varpi : \alpha\varpi^2 : \alpha\pi^3 : \alpha\varpi^4$ κτ. ἔςαι ϗ $\div\!\!\div\, \alpha\varpi - \alpha : \alpha\varpi^2 - \alpha\varpi : \alpha\varpi^3 - \alpha\varpi^2 : \alpha\varpi^4 - \alpha\varpi^3$· τὸ γὰρ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων ἰσȣ̃ται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν μέσων (269).

275. ΠΟΡΙΣΜΑ. ς΄. Ἐν ἁπάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ τὸ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων γινόμενον ἰσȣ̃ται τῷ γινομένῳ ὑπὸ δύω ὅρων, οἵτινες ἐπίσης τῶν ἄκρων ἀπέχȣσιν· ἐπὶ γὰρ τȣ̃ γενικȣ̃ τύπȣ $\div\!\!\div\, \alpha : \alpha\varpi : \alpha\varpi^2 : \alpha\varpi^3 : \alpha\varpi^4$ τὸ γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ δευτέρȣ ὅρȣ $\alpha\varpi$, ϗ τȣ̃ τετάρτȣ $\alpha\varpi^3$ ἰσȣ̃ται τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων α, $\alpha\varpi^4$ γινομένῳ $\alpha^2\varpi^4$· εἰδ᾽, ὡς ἐνταῦθα, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς εἴη περιττὸς, τὸ ἀπὸ τȣ̃ μέσȣ $\alpha\varpi^2$ τετράγωνον $\alpha^2\pi^4$ ἰσȣ̃ται τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένῳ.

Ἐπὶ ∺ 2:4:8:16:32 ἐςὶν $4 \times 16 = 2 \times 32$, ϗ $8 \times 8 = 2 \times 32$.

276. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Στίχος ἅπας ὅρων, διὰ τῦ αὐτῦ γράμματος ἐκτεθειμένων, ὧν οἱ δεῖκται συνιςᾶσι πρόοδον ἀριθμητικὴν, πρόοδον παριςᾷ γεωμετρικήν.

ΔΕΙΞΙΣ. Φημὶ δὴ, ὡς οἱ ὅροι τῦ σίχυ α^1, α^2, α^3, α^4 κτ. διὰ τῦ αὐτῦ α γράμματος ἐκτιθέμενοι, ϗ δείκτας ἔχοντες ἀριθμητικὴν σχηματίζοντας πρόοδον τὴν ÷ 1.2.3.4 (192) συνιςῶσι γεωμετρικὴν πρόοδον τὴν ∺ $\alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3 : \alpha^4$· ἕκαςος γὰρ ὅρος (192), διὰ τῦ πρὸ αὐτῦ διαιρεθεὶς, δίδωσιν ἀεὶ πηλίκον τὸ α.

277. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οἱ κατὰ συνέχειαν βαθμοὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ἣ ἀεὶ κληθείη ἂν α, εἴτ' ῦν α^1, α^2, α^3, α^4 κτ. γεωμετρικὴν παριςῶσι πρόοδον· πᾶσαι γὰρ αὗται (276) διὰ τῦ αὐτῦ γράμματος ἐκτιθέμεναι δείκτας ἔχυσιν ἀριθμητικὴν συγκροτῦντας πρόοδον.

Οὕτως οἱ κατὰ τὸ συνεχὲς βαθμοὶ τῦ 3 συνιςῶσι πρόοδον γεωμετρικὴν τὴν ∺ 3:9:27:81:243 κτ.

278. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐὰν σίχος ποσότητος τῆς α πολλαπλασιασθῇ τὸν μὲν πρῶτον ὅρον ἅπαξ διὰ ϖ, τὸν δὲ δεύτερον δὶς διὰ τῦ αὐτῦ ϖ, ϗ ἑξῆς ὕτω, τὰ παραγόμενα κατὰ διαδοχὴν $\alpha\varpi^1$, $\alpha\varpi^2$, $\alpha\varpi^3$, $\alpha\varpi^4$ κτ. συςήσουσι γεωμετρικὴν πρόοδον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἕκαςος γὰρ ὅρος, διὰ τῦ πρὸ αὐτῦ διαιρεθεὶς, παρέχεται ἀεὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα ϖ.

Προβλήματα τινὰ ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν προόδων.

Πρόβλημα Α.

279. Δοθέντων τȣ̃τε πρώτȣ ὅρȣ ϗ τȣ̃ πηλίκȣ τῆς προόδȣ ὁντιναȣ̃ν ὅρον εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ὁ τύπος ἐϛὶ $\mu = \alpha\pi^{\nu-1}$ (269)· ȣ̓κȣ̃ν ἐὰν ζητῆται ὁ ἑνδέκατος ὅρος προόδȣ, ἧς ὁ μὲν πρῶτος ὅρος ἐϛὶ 1, τὸ δὲ πηλίκον 4· ἔϛαι $\alpha = 1$, ϗ $\varpi = 4$, ϗ $\nu = 11$· καὶ δὴ φανερὸν ὅτι $\mu = 1 \times 4^{10} = 4^{10} = 1048576$.

Πρόβλημα Β.

280. Δοθέντων τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ α, ϗ τȣ̃ ἐϛχάτȣ ω, ϗ τȣ̃ πηλίκȣ ϖ, προόδȣ γεωμετρικῆς, εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον κ.

ΛΥΣΙΣ. Ἁπάσης προόδȣ γεωμετρικῆς πάντες μὲν οἱ ὅροι πλὴν τȣ̃ ἐϛχάτȣ εἰσὶν ἡγȣ́μενοι, πάντες δὲ παρὰ τὸν πρῶτον εἰσὶν ἑπόμενοι· ȣ̓κȣ̃ν τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ἡγȣμένων ἐϛὶν $= \kappa - \omega$· τὸ δὲ κεφάλαιον πάντων τῶν ἑπομένων ἐϛίν $= \kappa - \alpha$· ἔϛι δὲ $\kappa - \omega : \kappa - \alpha :: \alpha : \alpha\varpi$ (271)· ἄρα $\alpha\varpi\kappa - \alpha\pi\omega = \alpha\kappa - \alpha\alpha$ (240), ταυτὸν εἰπεῖν (διαιρέσει τῶν ἴσων διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ α (219)) $\varpi\kappa - \varpi\omega = \kappa - \alpha$· προσθέσει δὲ ἑκατέρωθι τȣ̃ αὐτȣ̃ ποσȣ̃ ϖω, $\varpi\kappa - \varpi\omega + \varpi\omega = \kappa - \alpha + \varpi\omega$, εἴτ' ȣ̃ν $\varpi\kappa = \kappa - \alpha + \varpi\omega$· ἀφαιρέσει δὲ ἑκατέρωθεν τȣ̃ αὐτȣ̃ ποσȣ̃ κ, $\varpi\kappa - \kappa = \kappa - \kappa + \varpi\omega - \alpha$, εἴτ' ȣ̃ν $\pi\kappa - \kappa = \varpi\omega - \alpha$. διαιρέσει δὲ ἑκατέρȣ μέρȣς διὰ $\varpi - 1$ (ἐπεὶ $\varpi\kappa - \kappa = \overline{\varpi - 1} \times \kappa$) ἔϛαι $\kappa = \frac{\varpi\omega - \alpha}{\varpi - 1}$, τύπος ὁ ζητȣ́μενος.

Πρόβλημα Γ.

281. Δοθέντων τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ α, ϗ τȣ̃ τῶν ὅρων ἀριθμȣ̃ ν, ϗ τȣ̃ πηλίκȣ π εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον $\varkappa$.

Λέγω δὴ ὅτι ἔσεται τύπος $\varkappa = \frac{\alpha\varpi^{\nu} - \alpha}{\varpi - 1}$, ἢ $\varkappa = \alpha \frac{\varpi^{\nu} - 1}{\varpi - 1}$. Δεῖξις· ὁ ἔσχατος τῆς προόδȣ ὅρος ἐςὶν $\alpha\varpi^{\nu-1}$ (269)· ἔςιν ȣ̃ν (280, 271) $\varkappa - \alpha\varpi^{\nu-1} : \varkappa - \alpha :: \alpha : \alpha\varpi$ ȣ̓κȣ̃ν $\varkappa\alpha\pi - \alpha\alpha\pi^{\nu} = \varkappa\alpha - \alpha\alpha$· διαιρέσει δὲ ἑκατέρȣ τῶν ἴσων διὰ α, $\varkappa\pi - \alpha\pi^{\nu} = \varkappa - \alpha$· προσθέσει ἑκατέρῳ τῶν ἴσων τοῦ αὐτȣ̃ ποσȣ̃ $\alpha\varpi^{\nu}$, $\varkappa\varpi - \alpha\varpi^{\nu} + \alpha\varpi^{\nu} = \varkappa - \alpha + \alpha\varpi^{\nu}$, εἴτ' ȣ̃ν $\varkappa\varpi = \varkappa - \alpha + \alpha\varpi^{\nu}$, ἀφαιρέσει δὲ ἑκατέρωθεν τȣ̃ αὐτȣ̃ ποσȣ̃ $\varkappa$, $\varkappa\pi - \varkappa = \alpha\varpi^{\nu} - \alpha$ διαιρέσει δέ δια $\varpi - 1$ (ὡς ϗ ἐπὶ τȣ̃ ἀνωτέρω προβλήματος) $\varkappa = \frac{\alpha\varpi^{\nu} - \alpha}{\varpi - 1}$ ὁ ζητȣ́μενος τύπος.

Ἔςω $\alpha = 2$, ϗ $\nu = 3$, ϗ $\pi = 4$, ἔςαι ȣ̃ν $\varkappa = \frac{2 \times 4^{3} - 2}{4 - 1} = \frac{126}{3} = 42$· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει ȣ̈τω ÷ 2 : 8 : 32· ἔνθα πάντως $2 + 8 + 32 = 42$.

Πρόβλημα Δ.

282. Δοθέντων τȣ̃ πηλίκȣ π, ϗ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τῶν ὅρων ϗ τȣ̃ κεφαλαίȣ $\varkappa$, ἕνα ἕκαςον ὅρον τῆς προόδȣ εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐν τῇ δείξει τȣ̃ ἀνωτέρω προβλήματος ἔςι $\varkappa\varpi - \alpha\varpi^{\nu} = \varkappa - \alpha$· προσθέσει ἑκατέρωσε τȣ̃ αὐτȣ̃ $\alpha\varpi^{\nu}$, $\varkappa\varpi = \varkappa - \alpha + \alpha\varpi^{\nu}$· ἀφαιρέσει δὲ τȣ̃ αὐτȣ̃ $\varkappa$, $\varkappa\varpi - \varkappa = \varkappa - \varkappa + \alpha\varpi^{\nu} - \alpha$, εἴτ' ȣ̃ν $\varkappa\pi - \varkappa = \alpha\varpi^{\nu} - \alpha$, τȣτ ἐςιν $\alpha\varpi^{\nu} - \alpha = \varkappa\varpi - \varkappa$· διαιρέσει δὲ τέως διὰ $\varpi^{\nu} - 1$

προκύψει ὁ τύπος $\alpha = \frac{\kappa\varpi - \kappa}{\varpi\nu - 1}$, τὸν πρῶτον ἐκδηλῶν τῆς προόδȣ ὅρον· τȣ́τȣ ȣ̃ν γνωσθέντος ἅπαξ, ἐπεὶ γνωςόν ἐςι ϗ τὸ τῆς προόδȣ πηλίκον, πάντες ἑξῆς οἱ ὅροι γνωσθήσονται (227).

Πρόβλημα Ε΄.

283. Τȣ̃ τῶν ὅρων ἀριθμȣ̃ ν, ϗ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ α, ϗ τȣ̃ ἐσχάτȣ ω, δοθέντων, εὑρεῖν τῆς προόδȣ τὸ πηλίκον π.

ΛΥΣΙΣ· $\omega = \alpha\varpi^{\nu-1}$ (269)· διαιρέσει δὲ ἑκατέρȣ τῶν ἴσων διὰ α, $\frac{\omega}{\alpha} = \varpi^{\nu-1}$· ἐξαγωγῇ τέως ἑκατέρωθεν τῆς $\nu-1$ ῥίζης, ἔςαι $\sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}} = \varpi$, ἢ $\varpi = \sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}}$· ἔςω $\nu = 3$, ϗ $\alpha = 2$, ϗ $\omega = 32$, ἔςαι $\varpi = \sqrt[3-1]{\frac{32}{2}}$ $= \sqrt[2]{16} = 4$.

284. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄. Δοθέντων προόδȣ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ α, ϗ τȣ̃ ἐσχάτȣ ω, ϗ τȣ̃ πηλίκȣ ϖ, εὑρεῖν τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν ν

ΛΥΣΙΣ. Ὁ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ προβλήματι τύπος $\frac{\omega}{\alpha} = \varpi^{\nu-1}$, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ϖ, γίνεται $\frac{\omega\varpi}{\alpha} = \varpi^{\nu}$· ἐξ ȣ̃ δῆλον, ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ τȣ̃ ἐσχάτȣ ὅρȣ ω ϗ τȣ̃ πηλίκȣ π, διαιρέμενον διὰ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ α, ἐξισȣ̃ται τῷ πηλίκῳ π ὑψωθέντι εἰς βαθμὸν, ȣ̃ δείκτης ἐςὶν ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ὁ ζητȣ́μενος· ἔςω ȣ̃ν $\alpha = 5$, ϗ $\varpi = 3$, ϗ $\omega =$

3645· ἐκ῀ν $\frac{\omega\varpi}{\alpha} = \frac{3645 \times 3}{5} = 2187$· ἐξαρθήτω δὴ τὸ τῆς προόδȣ πηλίκον 3 ἐφεξῆς εἰς τρίτον, τέταρτον, κτ. βαθμὸν, ἕςτ᾽ ἂν γένηται = 2187· εἰσὶ δὲ οἱ ἀπ᾽ αὐτȣ̃ κατὰ τὸ συνεχὲς βαθμὸι, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187· ϗ ἐπεὶ 2187 βαθμὸς ἕβδομός ἐςι τȣ̃ 3, ὁ ζητȣμενος τῶν ὅρων ἀριθμὸς ἔςαι 7· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει ἕτω ÷ 5 : 15 : 45 : 135 : 405 : 1215 : 3645.

Προβλημα Ζ΄.

285. Δύω μεταξὺ δοθέντων ὅρων ὅσȣς δήποτε μέσȣς ἀναλόγȣς εὑρεῖν κατὰ πρόοδον.

ΛΥΣΙΣ. ά. Μεταξὺ τȣ̃ α ϗ β κείσθω εὑρεῖν μέσον ἀνάλογον ἕνα· ἐκ῀ν ἔςαι ÷ α : ψ : β, ϗ $\alpha\beta = \psi\psi$ (248). ϗ δὴ $\psi = \sqrt{\alpha\beta}$. β΄. μεταξὺ τῶν α, β κείσθω εὑρεῖν δύω μέσȣς ἀναλόγȣς· ἐκ῀ν ἔςαι ÷ α : ψ : χ : β· ϗ ἐπεὶ α : β :: $\alpha^3 : \psi^3$ (270)· ἄρα $\alpha\psi^3 = \alpha^3\beta$· διαιρέσει ἑκατέρȣ τῶν ἴσων διὰ α, $\psi^3 = \alpha^2\beta$, ϗ ἑκατέρωθεν ἐξαγωγῇ τῆς κυβικῆς ῥίζης $\psi = \sqrt[3]{\alpha^2\beta}$· γνωςῶν ἐν ὄντων τȣ̃ πρώτȣ, ϗ τȣ̃ δευτέρȣ, ὁ τρίτος εὐχερῶς εὑρεθήσεται· ἐπεὶ γὰρ α : $\sqrt[3]{\alpha\alpha\beta}$:: χ : β· κυβισθέντων ἁπάντων τῶν ὅρων, ἔςαι $\alpha^3 : \alpha\alpha\beta :: \chi^3 : \beta^3$· ἐκ῀ν $\chi^3 = \frac{\alpha^3\beta^3}{\alpha\alpha\beta} = \alpha\beta^2$· ἐξαγωγῇ ἑκατέρωθεν τῆς κυβικῆς ῥίζης,

$\chi = \sqrt[3]{\alpha\beta\beta}$

γ΄. Ἐν γένει ἣν πρόκειται μεταξὺ τῶν α, β ὅσȣς δήποτε μέσȣς ἀναλόγȣς εὑρεῖν, ἀορίςως φέρε ν ὅρȣς, ἔςαι ὁ χῶρος, καθ᾽ ὃν τὸ β τȣ̃ α ἀπέχει ν + 1· ἐκ῀ν ἔςαι

(270) $\alpha:\beta::\alpha^{\nu+1}:\eta^{\nu+1}$ διὸ $\eta^{\nu+1}=\frac{\alpha^{\nu+1}\beta}{\alpha}$ (ἤτοι $\alpha^{\nu}\beta$)· ἐξαγωγῇ δὲ τῆς $\nu+1$ ῥίζης $\eta=\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu}\beta}$, πρῶτος ὅρος τῶν ζητȣμένων μέσων· ὁ δὲ δεύτερος εὑρεθήσεται ὡσαύτως· ἔςι γὰρ $\alpha:\beta::\eta^{\nu+1}:\chi^{\nu+1}$ (270)· εἰλήφθω ȣ̃ν ἀντὶ τȣ̃ τρίτȣ ὅρȣ $\eta^{\nu+1}$ ὁ εὑρεθεὶς τύπος $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu}\beta}$, ὑψωμένος εἰς τὸν $\nu+1$ βαθμὸν, εἶτ' ȣ̃ν $\alpha^{\nu}\beta$· ϗ δὴ ἔςαι $\alpha:\beta:\alpha^{\nu}\beta:\chi^{\nu+1}$· ἄρα $\chi^{\nu+1}\alpha=\alpha^{\nu}\beta^{2}$, ϗ $\chi^{\nu+1}=\frac{\alpha^{\nu}\beta^{2}}{\alpha}$· ἐπεὶ δὲ $\frac{\alpha^{\nu}\beta^{2}}{\alpha}=\alpha^{\nu-1}\beta^{2}$ (52) ἄρα $\chi^{\nu+1}=\alpha^{\nu-1}\beta^{2}$· ϗ ἐξαχθείσης τῆς $\nu+1$ ῥίζης ἑκατέρωθεν, ἔςαι $\chi=\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-1}\beta^{2}}$· ὁ δὲ τρίτος ὡσαύτως εὑρεθήσεται $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-2}\beta^{3}}$, ὁ δὲ τέταρτος $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-3}\beta^{4}}$ κτ. μέχρις ἂν ὁ τῆς β δείκτης γένηται $=\nu+1$, ὁπότε ϗ ὁ δείκτης τȣ̃ α γίνεται $=0$, ϗ ὁ ὅρος $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{0}\beta^{\nu+1}}=\beta$. Ἐὰν τοίνυν μεταξὺ τῶν α, β τρεῖς μέσοι ἀνάλογοι ζητῶνται κατὰ συνεχῆ ἀναλογίαν, ἔσονται $\div\!\!\div\ \alpha:\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu}\beta}:\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-1}\beta^{2}}:\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-2}\beta^{3}}:\beta$· εἶτ' ȣ̃ν οἱ μεταξὺ τρεῖς ὅροι τύποι ἔσονται τῶν ζητȣμένων τριῶν ὅρων· ῥηθήτωσαν γὰρ ȣ̃τοι λ, υ, χ· ἐπεὶ ȣ̃ν οἱ ὅροι α, λ, υ, χ, β ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ ὑποτίθενται, τȣτέςιν $\div\!\!\div\ \alpha:\lambda:\upsilon:\chi:\beta$, ἔςιν $\alpha:\beta::\alpha^{4}:\lambda^{4}$ (270)· ἄρα $\alpha\lambda^{4}=\alpha^{4}\beta$· διαιρȣμένȣ δὲ ἑκάςȣ ἴσȣ διὰ α, ἔςαι $\lambda^{4}=\frac{\alpha^{4}\beta}{\alpha}=\alpha^{3}\beta$· ἐξαχθεί-

σης δ' ἑκατέρωθεν τῆς τετάρτης ῥίζης, $\lambda = \sqrt[4]{\alpha^3\beta}$· ἔστι δὲ $\nu + 1 = 4$ ἐπὶ τῦ παρόντος, ϗ $\nu = 3$· ἄρα $\lambda = \sqrt[\nu+1]{\alpha^\nu\beta}$.

Ἐν ὖν τῇ ἐκτεθείσῃ προόδῳ ἀντὶ λ τεθείσης τῆς δυνάμεως αὐτῆς, ἔσαι $\div\!\!\div \alpha : \sqrt[4]{\alpha^3\beta} : \gamma$· ἄρα $\div\!\!\div \alpha^4 : \alpha^3\beta : \gamma^4$· ἄρα $\alpha^4 \gamma^4 = \alpha^6 \beta^2$· ἄρα $\gamma^4 = \frac{\alpha^6\beta^2}{4^4} = \alpha^2 \beta^2$· ἄρα $\gamma = \sqrt[4]{\alpha^2\beta^2}$· ἄρα $\gamma = \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-1}\beta^2}$, τὴν αὐτὴν ἀμέλει χωρῦσιν ἔφορον τῦ συλλογίζεσθαι, ἣν ϗ ἀνωτέρω.

Ἐὰν ἐν τῇ προτεθείσῃ προόδω $\div\!\!\div \alpha : \lambda : \gamma : \chi$, ἀντὶ λ, γ τεθῶσιν αἱ αὐτῶν εὑρεθεῖσαι δυνάμεις, ἔσαι $\div\!\!\div \alpha : \sqrt[4]{\alpha^3\beta} : \sqrt[4]{\alpha^2\beta^2} : \chi$· ἄρα $\div\!\!\div \alpha^4 : \alpha^3\beta : \alpha^2\beta^2 : \chi^4$ ἄρα $\alpha^4 \chi^4 = \alpha^5 \beta^3$· ἄρα $\chi^4 = \frac{\alpha^5\beta^3}{\alpha^4} = \alpha^1 \beta^3$· ἄρα $\chi = \sqrt[4]{\alpha\beta^3}$· ἄρα $\chi = \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-2}\beta^3}$ · ἄρα οἱ τρεῖς τύποι $\sqrt[\nu+1]{\alpha^\nu\beta}$, $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-1}\beta^2}$, $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-2}\beta^3}$ ἐν γένει ἐκδηλῦσι τὺς τρεῖς ζητυμένυς μέσυς ἀναλόγυς ὅρυς.

Ἔσω δὴ $\alpha = 2$, καὶ $\beta = 32$· ὐκῦν ἔσαι $\lambda = \sqrt[4]{8 . 32} = \sqrt[4]{256} = 4$, ϗ $\gamma = \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-1}\beta^2} = \sqrt[4]{4. 1024} = \sqrt[4]{4096} = 8$, ϗ $\chi = \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-2}\beta^3} = \sqrt[4]{2 . 32768} = \sqrt[4]{65536} = 16$· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει ὕτω $\div\!\!\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32$· αἱ δὲ τέταρται ῥίζαι ἐξαχθήσονται, λαμβανομένων πρῶτον τῶν κατὰ τὺς ὑποκειμένυς ἀριθμὺς τε-

τραγωνικῶν ῥιζῶν, καὶ τούτων ἐξαγομένων αὖθις τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν. καὶ γὰρ $\sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha^{\frac{4}{4}} = \alpha$· ἀλλὰ δὴ ἐὰν πρῶτον γένηται $\alpha^{\frac{4}{2}} = \alpha^2$, καὶ αὖθις $\alpha^{\frac{2}{2}} = \alpha^1$, τὸ αὐτὸ ὡς δῆλον γενήσεται (122).

Πρόβλημα Η'.

286. Μεταξὺ δύω ὡντινωνοῦν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ἐμπαραβύσαι μέσους ἀναλόγους, ὅσους ὁ μ ἀριθμὸς ἐμφαίνει.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω γεωμετρικὴ πρόοδος ἡ $\because \alpha\pi^0 : \alpha\pi^1 : \alpha\pi^2 : \alpha\pi^3$ κ.

ά. Οὖν ζητηθήτωσαν μ ὅροι, ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι, μεταξὺ δύω τινῶν δεικτῶν τῆς προόδου· οἵτινες ἔσονται δεῖκται τῶν μέσων γεωμετρικῶς ἀναλόγων ὅρων, οἳ μεταξὺ ἐμπαραβυσθήσονται τῶν εἰρημένων ὅρων (276)· ἔστω οὖν ἐμπαραβύσαι τρεῖς ὅρους μεταξὺ $\alpha\pi^0$, $\alpha\pi^1$· καὶ δὴ εὑρεθήτωσαν μεταξὺ 0, καὶ 1 τρεῖς ὅροι ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι· ἐπεὶ οὖν ἡ μεταξὺ 0 καὶ 1 διαφορά ἐστιν $= 1$· αὕτη διαιρεθεῖσα διὰ $\mu + 1 = 3 + 1 = 4$ (214) παρέξει τὸν πρῶτον τῶν ζητουμένων ὅρων· οὐκοῦν $\frac{1}{4}$ ὁ πρῶτος, καὶ δὴ $\frac{2}{4}$ ὁ δεύτερος, $\frac{3}{4}$ ὁ τρίτος· ἔστω δὲ ἐμπαραβύσαι τρεῖς ἄλλους μεταξὺ $\alpha\pi^1$ καὶ $\alpha\pi^2$· οὐκοῦν δείκτης τοῦ πρώτου τῶν ζητουμένων ἔσται $1\frac{1}{4}$, τοῦ δὲ δευτέρου $1\frac{2}{4}$, τοῦ δὲ τρίτου $1\frac{3}{4}$· οὐκοῦν ἡ πρόοδος $\div\!\!\cdot\; \alpha\pi^0 : \alpha\pi^1 : \alpha\pi^2$ ἐμπαραβυσθεῖσα τοῦτον τὸν τρόπον, γενήσεται $\div\!\!\cdot\; \alpha\pi^0 : \alpha\pi^{\frac{1}{4}} : \alpha\pi^{\frac{1}{2}} : \alpha\pi^{\frac{3}{4}}$ $\alpha\pi^1 : \alpha\pi^{1\frac{1}{4}} : \alpha\pi^{1\frac{1}{2}} : \alpha\pi^{1\frac{3}{4}} : \alpha\pi^2$ κτ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ λόγων συνθέτων.

287. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς εὐχερῆ κατάληψιν τῶν ῥηθησομένων, ἀναπολητέον ἀεὶ κατὰ νȣ̃ν, ὅτι λόγος ȣ̓δέν ἐϛιν ἀλλ' ἢ πηλίκοντι.

Λόγȣ ἐπὶ λόγον πολλαπλασιαζομένȣ, τὸ προκύπτον, ὅπερ ἀληθῶς ȣ̓δὲν ἕτερόν ἐϛιν, ἢ καινὸν πηλίκον σεσημειωμένον, καλεῖται λόγος σύνθετος.

288. Προκειμένων ȣ̃ τȣ̃ λόγȣ, ἢ τȣ̃ σεσημειωμένȣ πηλίκȣ τȣ̃ $\frac{\alpha\varpi}{\alpha}$, καὶ θατέρȣ λόγȣ, ἢ ἑτέρȣ σεσημειωμένȣ πηλίκȣ τȣ̃ $\frac{\delta\varpi}{\delta}$, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἕτερον ἐπὶ τὸν ἕτερον (231), τὸ προκύπτον ἢ ὁ καινὸς λόγος, εἴτ' ȣ̃ν τὸ ἐντεῦθεν προϊὸν καινὸν σεσημειωμένον πηλίκον $\frac{\alpha\pi\delta\varpi}{\alpha\delta}$ (287) καλεῖται λόγος σύνθετος· οἱ δὲ, ἀφ' ὧν παράγεται, λόγοι $\frac{\alpha\pi}{\alpha}$, $\frac{\delta\pi}{\delta}$ καλȣ̃νται λόγοι ἁπλοῖ ἢ συνθετικοί.

289. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶς λόγος σύνθετος καινόν ἐϛι σεσημειωμένον πηλίκον, ὃ πρόεισιν ἐκ δύω ἑτέρων σεσημειωμένων πηλίκων, πολλαπλασιαζομένων θατέρȣ ἐπὶ θάτερον.

290. Ὅταν δύω λόγοι ἴσοι, ἢ δύω πηλίκα ἴσα, πολλαπλασιάζωνται, τὸ παραγόμενον, ἢ ὁ λόγος, εἴτ'

ȣ̃ν τὸ νέον σεσημειωμένον πηλίκον, καλεῖται λόγος διπλασίων.

$\frac{\alpha\pi}{\alpha}$ ϗ $\frac{\delta\pi}{\delta}$ εἰσὶ δύω ἴσοι λόγοι, δύω ἴσα πηλίκα· εἴγε $\frac{\alpha\pi}{\alpha}$ ϗ $\frac{\delta\pi}{\delta}$ τὸ αὐτό εἰσι πηλίκον π· τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, ἢ τὸ καινὸν πηλίκον, τὸ ἐκ τῶνδε τῶν ἴσων λόγων προερχόμενον, $\frac{\alpha\delta\pi^2}{\alpha\delta}$, ἐςὶ λόγος σύνθετος, ὅςτις νυνὶ καλεῖται διπλασίων.

$\frac{6}{2}$ ϗ $\frac{12}{4}$ δύω ἰσαλλήλων ὄντων λόγων· ἑκάτερος γὰρ ἴσος τῷ 3· τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον καλεῖται λόγος διπλασιων.

Οἱ τρεῖς ȣ̃τοι λόγοι $\frac{\alpha\pi}{\alpha}$, $\frac{\delta\pi}{\delta}$, $\frac{\zeta\pi}{\zeta}$ εἰσὶν ἴσοι· ἕκαςος γὰρ τȣ́των ἴσος ἐςὶ τῷ π· ἐντεῦθεν ὁ ἐξ αὐτῶν σύνθετος λόγος, τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, τὸ καινὸν σεσημειωμένον πηλίκον, $\frac{\alpha\delta\zeta\pi^3}{\alpha\delta\zeta}$, καλεῖται λόγος τριπλασίων.

Τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τεσσάρων λόγων ἰσαλλήλων ὀνομάζεται λόγος τετραπλασίων, ϗ ἑξῆς ȣ̃τως.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Διπλȣ̃ ἄρα ϗ τετραπλȣ̃ κτ. πρὸς διπλασίονα, τριπλασίονα κτ. λόγον πολύτι ϗ πραγματικόν ἐςι τὸ διάφορον· ὁ μὲν γὰρ διπλȣ̃ς, ϗ τριπλȣ̃ς κτ. ȣ̓ παράγεται ὑφ' ἑτέρων, ἀλλ' ἔςιν εἷς ἁπλȣ̃ς λόγος, ȣ̃ ὁ ἡγέμενος διπλȣ̃ς, τριπλȣ̃ς κτ. ὑπάρχει τȣ̃ ἑπομένȣ· ὁ γεμὴν διπλασίων, τριπλασίων κτ. παραγόμενόν ἐςιν ὑπὸ δύω, τριῶν κτ. ἰσαλλήλων λόγων.

291. Θεώρημα ϛοιχειῶδες· Τὰ παραγόμενα εἰσὶν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν παραγόντων.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τοδὶ τὸ θεώρημα, ἀναμφηρίϛως τὸ ξυντελέϛατον ϗ χρησιμώτατον ὑπάρχον ἅπασι τοῖς ἐφεξῆς μέρεσι τῆς τε μαθηματικῆς ϗ φυσικῆς, ȣ̓δεμίαν καθαράν τε ϗ εὔληπτον τὸ κατ' ἀρχὰς παρίϛησιν ἰδέαν τοῖς πρωτοπέροις· πειρασόμεθα ἀλλ' ȣ̓ν τήν τε ἔννοιαν αὐτȣ̃ ἀναπτύξασθαι, ϗ δὴ ϗ τὰ ἐκ τȣ́τȣ ὑποσυνάψασθαι πορίσματα, ἅπερ θαυμασίως συμϐαλεῖ τοῖς μετιȣ̃σι τὸ ἐν χερσὶ συγγραμμα.

ΔΕΙΞΙΣ ϗ ἀνάπτυξις τȣ̃ θεωρήματος

ά. ἅπαν παραγόμενον δύω ἔχει παράγοντας, τὸν πολλαπλασιαϛέον ϗ τὸν πολλαπλασιαϛὴν

292. β'. ζητεῖται δὴ, πρὸς ἄλληλλα παραϐάλλοντας δύω παραγόμενα, ὁρίσασθαι τὴν σχέσιν, ἢ τὸν μεταξὺ αὐτῶν λόγον, ϗ ἰδεῖν ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ, ὅ, τι ἂν εἴη τὸ πηλίκον, εἰ ταῦτα τὰ παραγόμενα διαιρεθείη διὰ θατέρȣ θάτερον, ϗ ὅ, τι σύμμερον μέρος ἂν εἴη θάτερον παραγόμενον θατέρȣ· ζητεῖται ἄρα παραϐαλεῖν ȣ̆τω δύω παραγόμενα ὁμογενῆ, ἢ τῆς αὐτῆς φύσεως· κυρίως γὰρ εἰπεῖν δύω μόνον τῆς αὐτῆς φύσεως ποσότητες δύνανται πρὸς ἀλλήλας παραϐαλλόμεναι ἡ ἑτέρα τȣ́των τῆς ἑτέρας μέρος ὀνομασθῆναι πηλίκον· εἴπωμεν τοίνυν περὶ δύω ὁμοειδῶν παραγομένων, χρόνȣ, φέρ' εἰπεῖν, διαϛήματος, κινήσεως κτ., ϗ πρὶν ἢ κοθολικεῦσαι τὸ ζήτημα, λάϐωμεν δύω μερικώτερα παραγόμενα ὑπὸ δύω μόνων παραγόντων.

Γινώσκομεν, φέρε, ὅτι ἡ παντὸς χωρίȣ ἐπιφάνεια ἐξισȣ̃ται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ μήκȣς, ϗ τȣ̃ πλάτȣς· ȣ̓κȣ̃ν λάϐωμεν δύω διάφορα χωρία, καλέσαντες αὐτὰ Α καὶ Β'.

Τοιγαρȣ̃ν ἡ μὲν τȣ̃ A ἀπιφάνεια, ἢ τὸ ἐμβαδὸν, ἔϛιν ἴσον τῷ γινομένῳ ὑπο τȣ̃ κατ' αὐτὸ μήκȣς ϗ πλάτȣς· τὸ δὲ τȣ̃ B ὡσαύτως ἴσον τῷ ὑπὸ τȣ̃ οἰκείȣ μήκȣς ϗ πλάτȣς παραγομένῳ· τίς ἄρα ἔϛαι ὁ μεταξὺ τȣ́των τῶν γινομένων, εἴτ' ȣ̃ν τῶν χωρίων λόγος; ἢ ἔϛαι τὸ πηλίκον τȣ̃ μείζονος, διαιρεθέτος διὰ τȣ̃ ἐλάσσονος!

Θῶμεν ȣ̃ν ὅτι τὸ A ἐϛὶ μεῖζον τȣ̃ B· τοιγαρȣ̃ν ὑποτιθεμένȣ ἴσȣ ἀμφοῖν τȣ̃ πλάτȣς, δῆλον, ὅτι τὸ τȣ̃ A μῆκος περιέχει πλέον ἢ ἅπαξ τὸ τȣ̃ B, ϗ δὴ τὸ παραγόμενον, τὸ σημαῖνον τὴν τȣ̃ A ἐπιφάνειαν, ἔϛι πλέον ἢ ἅπαξ περιεκτικὸν τȣ̃ παραγομένȣ τȣ̃ σημαίνοντος τὴν τȣ̃ B ἐπιφάνειαν· ταυτὸν δὲ κρατεῖν ἀνάγκη ϗ ἐπὶ τȣ̃ πλάτȣς, ὑποτιθεμένȣ ἀμφοῖν ἴσȣ τȣ̃ μήκȣς· ὅθεν εὐχερῶς κατανοεῖται, ὅτι ἡ τȣ̃ μήκȣς τȣ̃ χωρίȣ A πρὸς τὸ τȣ̃ B σχέσις, ϗ ἡ τȣ̃ κατὰ τὸ A πλάτȣς πρὸς τὸ κατὰ τὸ B, ἀμφότεραι συντελȣ̃σι πρὸς αὔξησιν τȣ̃ ἀριθμȣ̃, τȣ̃ ἐμφαίνοντος ποσάκις τὸ A περιεκτικόν ἐϛι τȣ̃ B, ἢ τὸ πηλίκον τȣ̃ A διαιρεθέντος διὰ B.

Ἐφ' ᾧ ȣ̃ν ὁρισόμεθα τὸ πηλίκον τȣτὶ, ἢ τὴν μεταξὺ τῶν δύω γινομένων σχέσιν, εἴτ' ȣ̃ν τὴν μεταξὺ τῶν δύω χωρίων, λαμβάνομεν ὡρισμένοντι ποσὸν ἐκ τῶν δύω μηκῶν τε ϗ πλατῶν αὐτῶν· θῶμεν ȣ̃ν ὡς τὸ τȣ̃ A μῆκος ἔϛιν = 20 ὀργυιαῖς, τὸ δὲ τȣ̃ B = 4· ϗ τȣ̃ μὲν τὸ πλάτος = 16, τȣ̃ δὲ B = 2 ὀργυιαῖς·

Τοιγαρȣ̃ν τὸ A χωρίον ἔσεται τῷ μὲν μήκει πενταπλάσιον, τῷ δὲ πλάτει ὀκταπλάσιον τȣ̃ B χωρίȣ· τίς ἆρα ἔϛαι ἡ τȣ̃ παραγομένȣ τȣ̃ ἐμφαίνοντος τὸ A πρὸς τὸ ἐκδηλȣ̃ν τὸ B σχέσις; ἢ ποϛημόριον τȣ̃ A ἔϛαι τὸ χωρίον B;

293. Ἔοικεν ȣ̃ν κατ' ἀρχὰς, ὅτι δυνατὸν τὴν σχέσιν

τήν δεορίσασθαι, τὴν μεταξὺ δύω χωρίων, συνάψαντες τὴν τῶν μηκῶν τῆ τῶν πλατῶν σχέσει· ἐπεὶ γὰρ τὸ Α πενταπλάσιον μέν ἐςι κατὰ μῆκος, ὀκταπλάσιον δὲ κατὰ πλάτος τȣ̃ χωρίȣ, εἰκὸς ἄρα τρὶς δεκαπλάσιον εἶναι ὅλον τὸ Α ὅλȣ τȣ̃ Β.

294. Α'λλὰ γὰρ τὸ ἐκτεθὲν θεώρημα βȣ́λεται τὸ Α τεσσαρακονταπλάσιον τȣ̃ Β. ἄρα λέγοντες, ὅτι τὰ παραγόμενα πρὸς ἄλληλα εἰσίν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν παραγόντων, ἐννοȣ̃μεν τάδε: δύω παραγομένων, δύω ἐχόντων ἑκάςȣ παράγοντας, τὸν μὲν πολλαπλασιαςέον, τὸν δὲ πολλαπλασιαςὴν, ἐὰν λάβωμεν τὸν λόγον, ἢ τὸ πηλίκον τῶν δύω πολλαπλασιαςέων, εἶτα τὸν λόγον, ἢ τὸ πηλίκον, τῶν πολλαπλασιαςῶν, ϗ πολλαπλασιάσωμεν ταῦτα θάτερον ἐπὶ θάτερον, τὸ παραγόμενον ὑπ' αὐτῶν ἔςαι τὸ πηλίκον, τὸ μεταξὺ τῶν δύω γινομένων ἐπικρατȣ̃ν.

Ε'ὰν ἄρα ἐπὶ τῶν δύω χωρίων Α, Β λάβωμεν τὸν λόγον, ἢ τὸ πηλίκον, τῶν δύω πολλαπλασιαςέων, εἴτ' ȣ̃ν τῶν μηκῶν, ὅπερ ἐςὶ $\frac{20}{4}$, εἶτα τὸν λόγον, εἴτ' ȣ̃ν τὸ πηλίκον τῶν δύω πολλαπλασιαςῶν, τȣτέςι τῶν πλατῶν, ὅ ἐςι $\frac{16}{2}$, ϗ ταῦτα θάτερον ἐπὶ θάτερον πολλαπλασιάσωμεν, ὁ σύνθετος λόγος, ἢ τὸ παραγόμενον, ἢ τὸ καινὸν, πηλίκον ἔςαι $\frac{320}{8} = 40$.

Οὐκȣ̃ν τὸ θεώρημα δείκνυσιν, ὅτι τὸ παραγόμενον, ὃ ἐξεικονίζει τὴν τȣ̃ Α χωρίȣ ἐπιφάνειαν, περιέχει τὸ γινόμενον, τὸ ἐξεικονίζον τὴν τȣ̃ Β ἐπιφάνειαν, ȣ̓κ ἔτι τρισκαιδεκάκις, ἀλλὰ τεσσαρακοντάκις· σκοπήσωμεν ȣ̃ν τὸ ἐντεῦθεν.

Οὐδείς ἐςιν, ὃς ἀμφιγνοεῖ, ἄλλως τε ϗ ἐν τῆ Γεωμετρίᾳ ἀκριβῶς δειχθήσεται, τὴν δυοῖν χωρίοιν ἐπιφά-

νειαν μὴ ἐχὶ παρεμφαίνεϑαι ὑπὸ τε γινομένε ἐκ τῶν κατ᾽ αὐτὰ μηκῶν τε ϗ πλατῶν (153).

Οὕτως ἐν ἡ τε Α χωρίε ἐπιφάνεια δηλωθήσεται τῷ εἰκοσάκις 16, εἴτ᾽ ἐν περιέξει ὀργυιὰς τετραγωνικὰς 320· ἡ δὲ τε Β σημανθήσεται τῷ τετράκις 2, ὅ ἐςι περιέξει ὀργυιὰς τετραγωνείες 8· ἀλλὰ ά. 320 περιέχει τεσσαρακοντάκις τὸν 8, ἄρα τὸ Α τεσσαρακονταπλάσιόν ἐςι τε Β. β΄. εὕρομεν τὸν σύνθετον λόγον, ἢ τὸ προκύπτον, εἴτ᾽ ἐν τὸ σεσημειωμένον πηλίκον, παρηγμένον ὑπὸ τῶν ἁπλῶν λόγων τε μὲν τῶν μηκῶν, τε δὲ τῶν πλατῶν, ὅτι ἦν $\frac{320}{8}$. νῦν δὲ πάλιν εὑρίσκομεν τὸ ἐπικρατεν πηλίκον μεταξὺ τῶν δύω παραγομένων, ἃ ἐμφαίνεσι τὰ δύω χωρία Α, Β, ὑπάρχον $\frac{320}{8}$· τὸ μὲν γὰρ πρῶτον γινόμενον ἔςι 320, τὸ δὲ δεύτερον 8· ὁ λόγος ἄρα ὁ μεταξὺ τῶνδε τῶν δύω γινομένων ἔςι σύνθετος ἐκ τε ἁπλε λόγε τῶν μηκῶν, πολλαπλασιαϑέντος ἐπὶ τὸν ἁπλεν λόγον τῶν πλατῶν· ὅπερ ἔδει ἀναπτύξαντας δεῖξαι ἐπὶ δύω παραγομένων ἑκατέρε ὑπὸ δυοῖν παραγόντων.

295. Δεικτέον δὲ τὸ προτεθὲν ςοιχειῶδες ϑεώρημα γενικώτερόν τε ϗ ἀκριβέςερον.

Δύω ὡντινωνδήποτε παραγομένων οἱ δύω πρῶτοι παράγοντες, εἴτ᾽ ἐν οἱ δύω πολλαπλασιαςέοι, δύνανται ἀεὶ καλεῖϑαι Μ, μ, οἱ δὲ δύω δεύτεροι, εἴτ᾽ ἐν οἱ πολλαπλασιαςαὶ, Ν, ν· ὁ ἐν ἁπλες λόγος ὁ ὑπὸ τῶν πολλαπλασιαςέων σχηματιζόμενος ἀεὶ παραςαίη ἂν διὰ $\frac{M}{\mu}$. ὁ δ᾽ ὑπὸ τῶν πολλαπλασιαςῶν, διὰ $\frac{N}{\nu}$. καὶ τὸ μὲν πρῶτον γινόμενον ἔςαι $M \times N = MN$, τὸ δὲ δεύτερον $\mu \times \nu = \mu\nu$· ὁ δὲ λόγος, ἢ τὸ σεσημειωμένον πηλί-

κον, τὸ μεταξὺ τῶνδε τῶν γινομένων, ἐκτεθήσεται ἀεὶ διὰ $\frac{MN}{\mu\nu}$. Τὸ ἄρα παραγόμενον ὑπὸ τῶν δύω προτέρων λόγων ἐσχηματισμένων τῦ μὲν ὑπὸ τῶν πολλαπλασιαστέων, θατέρυ δὲ ὑπὸ τῶν πολλαπλασιαςῶν, εἴτ᾽ ὖν ὑπὸ τῶν ἀντισοιχύντων ποιητῶν, $\frac{M}{\mu} \times \frac{N}{\nu}$ ἔςιν ὁ αὐτὸς λόγος, ὅς ἐςι μεταξὺ τῶν δύω παραγομένων· Ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

296. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπὶ μὲν τῶν προδεδειγμένων ὑπεθέμεθα δύω γινόμενα ἕκαςον ὑπὸ παραγόντων δύω. ῥᾷςα μέντοι τὰ αὐτὰ ϗ κατανοηθήσεται ϗ δειχθήσεται ϗ ἐπὶ παραγομένων ὑπὸ τριῶν, ἢ ϗ ὅσων ἄντις βέληται παραγόντων.

Δυοῖν φέρε κιβωτίων, ὧν τὸ μὲν καλῦμεν Γ, τὸ δὲ Δ, τὸ μὲν πρῶτον περιέχει 8 πόδας μήκυς, ϗ 6 πλάτυς, ϗ 4 ὕψυς, τὸ δὲ δεύτερον, 4 μήκυς, ϗ 2 πλάτυς ϗ 1 ὕψυς· Τὸ ἄρα Γ ἔςι τῷ μήκει μὲν διπλάσιον, τῷ πλάτει δὲ τριπλάσιον, τῷ δὲ βάθει τετραπλάσιον τῦ Δ.

Φημὶ δὴ ὅτι τὸ Γ κιβώτιον ὐκ ἔςιν ἐννεαπλάσιον τῦ Δ, ὥσπερ ἐν ἀρχῇ φαίνεται συνάψει τῶν χέσεων, ἀλλὰ $2 \times 3 \times 4$, εἴτ᾽ ὖν εἰκοσιτεσσαραπλάσιον, ὅ ἐςι περιέξει ὕλην εἰκοσιτεσσαραπλῆν, ἧς περιέχει τὸ Δ.

Ὁ μὲν γὰρ ἁπλῦς λόγος τῶν μηκῶν ἔςιν $\frac{8}{4}$, ὁ δὲ τῶν πλατῶν $\frac{6}{2}$, ὁ δὴ τῶν βαθέων $\frac{4}{1}$· ὁ δ᾽ ἐξ αὐτῶν σύνθετος ἔςι $\frac{8}{4} \times \frac{6}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{192}{8} = 24$· Τὸ ἄρα Γ κιβώτιον εἰκοσιτεσσαραπλάσιόν ἐςι τῦ Δ.

297. Ἀνιχνεύσωμεν δὲ τὴν ἀναγκαίαν τυτῦ δεῖξιν ὕτως· δειχθήσεται γὰρ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ὡς εἰς εὕρεσιν τῆς περιοχῆς, ἢ ςερεότητος τῶν δύω τυτωνὶ κιβωτίων,

πολλαπλασιάζειν χρὴ τὸ μὲν μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος τὸ δ' ὑπὸ τȣ́των γινόμενον ἐπὶ τὸ ὕψος· τὸ ἄρα Γ κιβώτιον περιέξει $4 \times 6 \times 4 = 192$ πόδας κυβικȣ̀ς (154)· τὸ δὲ Δ $4 \times 2 \times 1 = 8$· ἐκεῖν ά. 192 περιέχει τετράκις ϗ εἰκοσάκις τὸν 8· β΄. ὁ λόγος, ἢ τὸ πηλίκον $\frac{192}{8}$, ὅς ἐςι μεταξὺ 192 ϗ 8 ἔςιν ὁ αὐτὸς σύνθετος λόγος, ὃς ἀποτελεῖται ὑπὸ τῶν τριῶν πηλίκων, ἢ λόγων ἁπλῶν τῶν συνεςηκότων ὑπὸ τῶν μηκῶν, πλατῶν, ϗ βαθέων· τὰ ἄρα γινόμενα, ἃ ἀναπτύσσει τὴν περιοχὴν, ἢ τὴν δεκτικότητα τῶν δύω κιβωτίων Γ ϗ Δ, εἰσὶν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν μηκῶν, πλατῶν, ϗ βαθέων, ἢ τῶν τριῶν ἀντιςοιχȣ́ντων ποιητῶν· ἀληθεύει ἄρα τὸ θεώρημα ϗ ἐπὶ δύω ὑπὸ τριῶν ποιητῶν παραγομένων.

Δεῖξις γενικὴ ἐπὶ δύω παραγομένων ἐκ τριῶν ποιητῶν.

298. Ἔςω γὰρ δύω γινόμενα ΜΝΠ, μνϖ· πηλίκον ȣ̂ν ἢ λόγος μεταξὺ τȣ́των τῶν γινομένων ἔςι $\frac{\text{ΜΝΠ}}{\mu\nu\varpi}$. οἱ δὲ τρεῖς ἁπλοῖ λόγοι οἱ ὑπὸ τῶν τριῶν ἀντιςίχων ποιητῶν συνιςάμενοι, εἰσὶ $\frac{\text{Μ}}{\mu}$, $\frac{\text{Ν}}{\nu}$, $\frac{\text{Π}}{\varpi}$· ὁ δὲ σύνθετος λόγος, τὸ προκύπτον, ἢ τὸ καινὸν πηλίκον, τὸ ἐκ τȣ́των ἀποτελȣ́μενον, ἔςαι $\frac{\text{Μ}}{\mu} \times \frac{\text{Ν}}{\nu} \times \frac{\text{Π}}{\pi} = \frac{\text{ΜΝΠ}}{\mu\nu\pi}$, ὅπερ ἐςὶν ὁ αὐτὸς λόγος, ὃς ἐν ἀρχῇ εὕρηται μεταξὺ τῶν δύω γινομένων ΜΝΠ, μνπ· ἐκεῖν ὁ μεταξὺ τȣ́των τῶν γινομένων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν κατὰ τȣ̀ς αὐτῶν ποιητὰς λόγων· ἀλλ' ἐφ ὡντινωνȣ̂ν δύω γινομένων ὑπὸ τριῶν παραγόντων, δυνατὸν ἀεὶ τὴν μὲν τῶν πρώτων παραγόντων συζυγίαν

δηλῶσαι διὰ Μ, μ, τὴν δὲ διὰ Ν, ν, τὴν δὲ τρίτην διὰ Π, π· ἐν γένει ἄρα ὁ λόγος, ὁ μεταξὺ δύω ὡντινωνῦν γινομένων ὑπὸ τριῶν ποιητῶν, σύγκειται ἐκ τῶν λόγων τῶν κατ' αὐτὰ ποιητῶν, ἢ ὃ ταυτὸν, τὰ γινόμενα ταῦτα εἰσὶν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς ποιητῶν.

299. Παρὰ γεμὴν ταῦτα πρόδηλον, ὅτι ἡ δεῖξις, ἡ ἐπὶ δύω γινομένων ὑπὸ δύω, ἢ τριῶν ποιητῶν, ἐφαρμοσθῆναι δύναται καὶ ἐπὶ τῶν γινομένων ὑφ' ὅσων ἄντις βέληται παραγόντων· ἐν γένει ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

300. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἵνα τοίνυν ὁ μεταξὺ δύω γινομένων λόγος ὁρισθῇ, ἐ συναπτέον, ἀλλὰ πολλαπλασιαςέον τὲς μεταξὺ τῶν ἐν αὐτοῖς ποιητῶν λόγες.

301. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν ἐπὶ τε συνθέτε λόγε $\frac{MN}{\mu\nu}$, ὑποτεθῇ $M=\mu$, καὶ $N=\nu$, γενήσεται ὁ λόγος $\frac{MN}{MN}=1$, ὅπερ δηλοῖ, ὡς τὰ δύω γινόμενα ΜΝ, μν, ἐξισῦνται ἀλλήλοις· τὰ γινόμενα ἄρα, ὧν ἰσάλληλοι οἵτε πολλαπλαςέοι, καὶ οἱ πολλαπλασιαςαὶ, ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

302. Τὐναντίον δὲ, ἐὰν δύω γινομένων ἰσαλλήλων ἡ ἑτέρα τῶν ῥιζῶν ἰσῶται τῇ ἐν θατέρῳ, ἀνάγκη εἶναι ἴσην καὶ τὴν ἑτέραν τῇ ἐν τῷ ἑτέρῳ· ἐκ γὰρ $MN=\mu\nu$ πρόεισιν ἡ ἀναλογία $M:\mu::\nu:N$ (241)· ἀλλὰ $M=\mu$, ἄρα καὶ $\nu=N$.

303. Ἐὰν ἐπὶ τε συνθέτε λόγε $\frac{MN}{\mu\nu}$ ὑποτεθῇ Μ μεῖζον, φέρ' εἰπεῖν, τε μ· τὸ δὲ Ν ἀναλόγως ἔλασσον τε ν, ὡς εἶναι $M:\mu::\nu:N$, τὰ παραγόμενα ἔ-

σονται ἴσα, εἴγε (241) ΜΝ = μν· ὅ ἐςι, τὰ γινόμενα ἔσονται ἰσάλληλα, ὅταν οἱ πολλαπλασιαςέοι ὦσιν ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν πολλαπλασιαςῶν.

304. Ἐπίσης δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅταν δύω γινόμενα ὑπ' ἀνίσων παραγόντων ὦσιν ἰσάλληλα, ὅτι οἱ πολλαπλασιαςέοι εἰσὶν ἀντιπεπονθότως ὡς οἱ πολλαπλασιαςαί· ἐκ γὰρ ΜΝ = μν προέρχεται Μ : μ : : ν : Ν (241).

305. ΣΧΟΛΙΟΝ. Οὐδὲν ἧττον δυνάμεθα δύω τινῶν προκυπτόντων, ἰσϐμένων ἀλλήλοις, συναγαγεῖν ἐν γένει, ὅτι οἱ πολλαπλασιαςέοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλϐς ἀντιςρόφως ἢ ὡς οἱ πολλαπλασιαςαί· ἐςι γὰρ ΜΝ = μν· ὅθεν ἀεὶ ἕπεται ἡ ἀναλογία Μ : μ : : ν : Ν· ἀλλ' ἐπὶ γὰρ τῆς πρώτης περιπτώσεως, ἔνθα οἱ πολλαπλασιαςαὶ καὶ οἱ πολλαπλασιαςέοι εἰσὶν ἰσάλληλοι, εἴγε Μ = μ, καὶ Ν = ν, ἐξέςαι ἀδιαφόρως γράψαι ἢ Μ : μ : : ν : Ν ἢ Μ : μ : : Ν : ν, καὶ ἐκ τϐ ἀκολϐθϐ ἀναγνῶναι, ἤτοι ὡς οἱ πολλαπλασιαςέοι εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιςρόφῳ, ἢ ἐν λόγῳ ὀρθῷ τῶν πολλαπλασιαςῶν.

306. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐὰν ἐν τῷ συνθέτῳ λόγῳ $\frac{MN}{\mu\nu}$ ὑποτεθῇ Μ = μ, γενήσεται $\frac{MN}{M\nu}$· ὅθεν προκύψει ἡ ἀναλογία ΜΝ : Μν : : Ν : ν (240), ὅπερ ἐμφαίνει, ὡς δύω γινόμενα, οἷς κοινὸς ὁ πολλαπλασιαςέος Μ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ πολλαπλασιαςαὶ, Μ, ν· ὡσαύτως ἐὰν ὑποτεθῇ Ν = ν, ὁ μὲν λόγος γενήσεται $\frac{MN}{\mu N}$, ἡ δὲ ἀναλογία ΜΝ : μΝ : : Μ : μ (240), εἴτ' ἐν, δύω παραγόμενα ΜΝ, μΝ κοινὸν ἔχοντα τὸν πολλαπλασιαςὴν Ν, πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς οἱ αὐτῶν πολλαπλασιαςέοι.

307. Ἐξέσαι ἄρα ἐν γένει εἰπεῖν ά. ὡς ἡνίκα δύω γινόμενα ἕνα κοινὸν ἔχωσι ποιητὴν, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ δύω ἰδιάζοντες ποιητάι· β΄. ὅτε δύω γινόμενα κοινὸν ἕνα ἔχȣσι ποιητὴν, ϗ εἰσὶ δύω ὅροι ἀναλογίας τινὸς, δυνατὸν, μὴ αἰρομένης τῆς ἀναλογίας, διελόντας αὐτȣ̀ς διὰ τȣ͂ κοινȣ͂ ποιητȣ͂, κατὰ χώραν ἐᾶσαι τȣ̀ς ἑτέρȣς ποιητὰς (233)· ἐπὶ γὰρ MN : Mν : : N : ν διαιρȣμένων τῶν δύω προτέρων ὅρων διὰ M, ἔσαι N : ν : : N : ν (240).

308. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐὰν ἐπὶ τȣ͂ συνθέτȣ λόγȣ $\frac{MN}{\mu\nu}$ ὑποτεθῇ M = N, ϗ μ = ν, ὁ σύνθετος λόγος ἀποκατασαθήσεται $\frac{MM}{\mu\mu}$· τοιγαρȣ͂ν ά. ὁ λόγος $\frac{MM}{\mu\mu}$ προδήλως σύγκειται ἐκ τῶν δύω ἁπλῶν, ϗ ἰσαλλήλων λόγων $\frac{M}{\mu}$, $\frac{M}{\mu}$, εἴγε $\frac{M}{\mu} \times \frac{M}{\mu} = \frac{MM}{\mu\mu}$. β΄. ἐπεὶ πᾶν τετράγωνον παρασαθῆναι δύναται διὰ MM, ϗ πᾶν ἕτερον τετράγωνον διὰ μμ· ὁ λόγος ἄρα ὁ μεταξὺ δύω ὧν τινωνȣ͂ν τετραγώνων δύναται παραςαθῆναι διὰ τȣ͂ σεσημειωμένȣ πηλίκȣ $\frac{MM}{\mu\mu}$· ὁ ἄρα λόγος, ὁ μεταξὺ δύω ὧν τινωνδήποτε τετραγώνων, ἔσι σύνθετος ἐκ τῶν δύω ἴσων λόγων τῶν συνισαμένων ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰ ῥιζῶν, ϗ δὴ ἔσι διπλασίων λόγος τῶν κατ' αὐτὰ ῥιζῶν (290)· ἐντεῦθεν ȣ͂ν ῥηθήσεται ὅτι τετράγωνα δύω εἰσὶν ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν κατ' αὐτὰ ῥιζῶν.

309. Ἐὰν ἐπὶ τȣ͂ διπλασίονος λόγȣ $\frac{MM}{\mu\mu}$ ὑποτεθῇ

$M = 4\mu$, ὁ λόγος γενήσεται $\frac{16\mu\mu}{\mu\mu}$, ὅθεν προκύψει ἡ ἀναλογία: τὸ μεῖζον τετράγωνον 16μμ πρὸς τὸ ἔλαττον μμ λόγον ἔχει, ὃν ὁ 16 πηλίκον τοῦ ἀπὸ Μ τετραγώνου, διαιρεθέντος διὰ τοῦ ἀπὸ μ, πρὸς 1, εἴτ' οὖν 16μμ : μμ :: 16 : 1 (240)· καὶ ἐπειδὴ 16μμ ἐστιν ἴσον τῷ ΜΜ, ἄρα ΜΜ : μμ :: 16 : 1· καὶ ἐν γένει „δυοῖν τετραγώ-„νων ἀπὸ ῥιζῶν ἀνίσων γινομένων τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔ-„λασσον λόγον ἕξει, ὃν ἔχει τὸ πηλίκον τὸ διαιρέσει „τῆς μείζονος ῥίζης διὰ τῆς ἐλάσσονος προϊὸν, τετραγωνι-„σθὲν, πρὸς τὴν μονάδα.“

310. Ἐὰν ἄρα ποσότης τις διπλασία ᾖ τινὸς ἑτέρας, ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τοῦ πηλίκου, ὅ ἐστι 2, τετράγωνον ἐστιν $=4$, τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος ποσότητος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος λόγον ἕξει, ὃν 4 πρὸς 1, τουτέστι τετραπλάσιον ἔσαι τοῦδε τοῦ τετραγώνου.

311. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ συνθέτου λόγου $\frac{MN\Pi}{\mu\nu\pi}$ ὑποτεθῇ $M = N = \Pi$, καὶ $\mu = \nu = \pi$, γενήσεται $\frac{MMM}{\mu\mu\mu}$ συγκείμενος ἐπιδήλως ἐκ τῶν τριῶν λόγων $\frac{M}{\mu}, \frac{M}{\mu}, \frac{M}{\mu}$, εἴγε $\frac{M}{\mu} \times \frac{M}{\mu} \times \frac{M}{\mu} = \frac{MMM}{\mu\mu\mu}$· καὶ δὴ οὗτος ἔσεται λόγος τριπλασίων.

Ἐπεὶ δὲ δύο οἵτινες οὖν κύβοι ἀεὶ παρασαθῆναι δύνανται, ὁ μὲν διὰ ΜΜΜ, ἅτερος δὲ διὰ μμμ, ὁ λόγος, ἢ τὸ πηλίκον, τὸ μεταξὺ δύο τινῶν κύβων ἐπικρατοῦν, παρασαθείη ἂν διὰ $\frac{MMM}{\mu\mu\mu}$· ἄρα „ὁ μεταξὺ δύο ὡντινωνοῦν

„κύβων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν ἰσαλλήλων λόγων „τῶν συνισαμένων ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὲς ῥιζῶν, ἤτοι ἐςι τρι„πλασίων τῶν κατ' αὐτὲς ῥιζῶν· ἢ, ὅπερ ταυτὸν, δύω „κύβοι πρὸς ἀλλήλες εἰσὶν ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῶν κατ' αὐτὲς ῥιζῶν."

312. Ἐὰν ἐν τῷ τριπλασίονι λόγῳ $\frac{MMM}{\mu\mu\mu}$ ὑποτεθῇ $M = 5\mu$, γενήσεται ὁ λόγος $\frac{125\mu\mu\mu}{\mu\mu\mu}$· ὅθεν ἡ ἀναλογία $125\mu\mu\mu : \mu\mu\mu :: 125 : 1$· ἐκεῖν „δύω κύβων „ἐξ ἀνίσων ῥιζῶν γινομένων MMM, μμμ ὁ μείζων πρὸς „τὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ὃν ὁ κύβος ὁ ἀπὸ τε πηλί„κε τε διαιρέσει τῆς μείζονος ῥίζης διὰ τῆς ἐλάσσονος „προερχομένε πρὸς τὴν 1."

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Α'. ΤΟΜΟΥ.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ.

Τῶν ἐν τῷ Α΄ Τόμῳ περιεχομένων.

Σελ.

Ἔννοιαι προκαταρκτικὰι εἰς ἅπασαν ἐν γένει τὴν Μαθηματικὴν 1

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ Α΄.

Κεφάλαιον Α΄. Ἔννοιαι προκαταρκτικὰι τῆς Ἀριθμητικῆς 6
— — Β΄. Περὶ ἀριθμήσεως 10
— — Γ΄. Περὶ προσθέσεως 16
— — Δ΄. Περὶ ἀφαιρέσεως 18
— — Ε΄. Περὶ πολλαπλασιασμȣ̃ . . 24
— — ϛ΄. Περὶ διαιρέσεως 39

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ Β΄.

Κεφάλαιον Α΄. Τί ἐςι κλάσμα 55
— — Β΄. Περὶ ἀναγωγῆς τῶν κλασμάτων 58
— — Γ΄. Περὶ προσθέσεως τῶν κλασμάτων 78
— — Δ΄. Περὶ ἀφαιρέσεως τῶν κλασμάτων 80
— — Ε΄. Περὶ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν κλασμάτων 82
— — ϛ΄. Περὶ διαιρέσεως τῶν κλασμάτων 88
— — Ζ΄. Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως . . 91
— — Η΄. Περὶ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν 95
— — Θ΄. Περὶ διαιρέσεως τῶν συμ. ἀριθ. 112
— — Ι΄. Περὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων 116

Σελ.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ Γ'.

Κεφάλαιον Α'. Περὶ τῆς μεθόδȣ τῶν τριῶν . 129
— — Β'. Περὶ τῆς ἀντιςρόφȣ τῶν τριῶν μεθόδȣ. 133
— — Γ'. Περὶ τῆς συνθέτȣ μεθόδȣ τῶν τριῶν. 136
— — Δ'. Περὶ τῆς ἀντιςρόφȣ συνθέτȣ μεθόδȣ τῶν τριῶν 139
— — Ε'. Περὶ τῆς συνεζευγμένης μεθόδȣ 140
— — ς'. Περὶ τῆς μεθὸδȣ τῆς ἑταιρείας 142
— — Ζ'. Περὶ τῆς μεθόδȣ τῆς ψευδȣ̃ς ὑπὸ θέσεως. 143
— — Η'. Περὶ τῆς μεθόδȣ τῶν τόκων . 145
— — Θ'. Περὶ τȣ̃ λογισμȣ̃ τῆς ἁλύσεως 147
— — Ι'. Περὶ τῆς μεθόδȣ τῆς ὑφαιρέσεως 155
— — ΙΑ'. Περὶ τῆς μεθὸδȣ τȣ̃ κολλύβȣ . 156
— — ΙΒ'. Περὶ τῆς μεθόδȣ τῆς συγκράσεως 157

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΜΗΜΑ Α'.

Κεφάλαιον Α'. Ἐν ᾧ αἱ προηγηματικαὶ ἀρχαί 163
— — Β'. Περὶ ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων 172
— — Γ'. Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῶν γραμματικῶν ποσοτήτων . 173
— — Δ'. Περὶ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων . . . 176
— — Ε'. Περὶ διαιρέσεως τῶν συμβ. ποσ. 185
— — ς'. Περὶ συμβολικῶν κλασμάτων 196
— — Ζ'. Περὶ γενέσεως τῶν βαθμῶν. . 203
— — Η'. Περὶ ῥιζῶν ἐξαγωγῆς . . . 221
— — Θ'. Τύποι παντοῖοι βαθμῶν καὶ ῥιζῶν 242

Σελ.

— — Ι΄. Λογισμὸς τῶν βαθμῶν διὰ τῶν κατ᾽ αὐτὰς δεικτῶν. . . . 247
— — ΙΑ΄. Λογισμὸς τῶν ῥιζικῶν . . 252
— — ΙΒ΄. Περὶ ποσῶν ἐπιπλάσων . . . 256

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΜΗΜΑ Β΄,

Κεφάλαιον Α΄. Ἀναλογιῶν ὁρισμοί 262
— — Β΄. Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν ἀριθμητικῶν. 266
— — Γ΄. Περὶ τῆς ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν μεθόδου 269
— — Δ΄. Περὶ προόδου ἀριθμητικῆς . . 271
— — Ε. Περὶ λόγων γεωμετρικῶν . . 280
— — ς΄. Περὶ ἀναλογίας γεωμετρικῆς . 285
— — Ζ΄. Περὶ προόδου γεωμετρικῆς . . 297
— — Η΄. Περὶ λόγων συνθέτων . . . 309

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΤΩΝ ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ.

ΣΕΛΙΔΙ 6, ςίχῳ 21, *Διακεδαννῦναι*, *Γράφε*, *Διασκεδαννῦναι*. — Σελ. 21, ς. 4, *Κέωνταν*, *Γρ.* *Κέωνται*. — Σελ. 29, ς. 16, *Ἐπὶ τῇ κάτω*, *Γρ.* *Ἐπὶ τὰ κάτω*. — Σελ. 35, ς. 2, *Ὥςγε*, *Γρ.* *Πρόςγε*. — Σελ. 36, ς. 3, *Ἢ ἑκατέρα, ἢ καὶ ἀμφοῖν μηδενικὰ*, *Γρ.* *Ἢ ἑκατέρῳ, μηδενικά*. — Σελ. 48, ς. 16, $\frac{9}{150}$, *Γρ.* $\frac{9}{152}$. — Σελ. 53, ς. 24, *Ἢ δύω πολλαπλασιασθείσας*, *Γρ.* *Πολλαπλασιασθείσας*. — Σελ. 54, ς. 7, (120), *Γρ.* (130). — Σελ. 55, ς. 12, *Οὖν*, *Γρ.* *Οὗ*. — Σελ. 56, ς. 17, *Ἐν σχήματι*, *Γρ.* *Ἐν σχήματι κλάσματος*. — Σελ. 60, *Λέγα*, *Γρ.* *Λεύγη*, ὅτω κἀν τοῖς ἐφεξῆς· τὸ γὰρ τῶν Γαλατῶν lieue λεύγη τοῖς πάλαι ἐκαλεῖτο, ὡς ἔςιν ἰδεῖν παρὰ Ἡσυχίῳ. — Σελ. 64, ς. 9, *Δραχμὰς*· 400, *Γρ.* *Δραχμὰς* 400. — Σελ. 70, ς. 12, *Ὁ ἀριθμητής*... (168), *Γρ.* *Ὁ ἀριθμητὴς, ἀναχθεὶς ἐπ' εἶδος ἔλαττον (168) διῃρήσθω διὰ τοῦ παρονομαστοῦ*. — Σελ. 78, ς. 15, (87), *Γρ.* (88). — Σελ. 79, ς. 11, $\frac{69}{60}$, *Γρ.* $\frac{89}{60}$. — ς. 12, $\frac{9}{60}$, *Γρ.* $\frac{29}{60}$. — Σελ. 98, ς. 3, 700 λεπτ., *Γρ.* 7 σολ. — Σελ. 102, ς. 24, $\frac{28}{29}$, *Γρ.* $\frac{28}{36}$. — Σελ. 116, ς. 19, *Ἀναφύενται*, *Γρ.* *Ἀναφύονται*. — Σελ. 118, ς. 5, 3, 1, 4, 5, *Γρ.* 3, 145. — Σελ. 120, ς. 17, *Ἐπαύξουσι*, *Γρ.* *Τὰ ο ἐπαύξουσι*. — Σελ. 132, ς. 19, *Διὰ τοῦ τρίτου*, *Γρ.* *Διὰ τοῦ πρώτου*. — Σελ. 133, ς. 5, 35 $\frac{1}{4}$, *Γρ.* 25 $\frac{1}{4}$. — Σελ. 136, ς. 1, 1250, *Γρ.* 1230. — Σελ. 142, ς. 6, *Πάντων*, *Γρ.* *Πασῶν*. — Σελ. 145, ς. 9, 4$\frac{1}{4}$, *Γρ.* 4$\frac{1}{2}$. — Σελ. 146, ς. 23, *Προκτήσασθαι*, *Γρ.* *Προσκτήσασθαι*. — Σελ. 153, ς. 3, *αἱ*, *Γρ.* *Ἡ*. — Σελ. 155, ς. 16, 32, *Γρ.* 22. — Σελ. 158, ς. 22, 120, *Γρ.* 12. — ς. 23, 14 ἀνὰ 7, *Γρ.* 7 ἀνὰ 14. — ς. 24, 16 ἀνὰ 3, *Γρ.* 3 ἀνὰ 16. — Σελ. 165, ς. 30, *Ἴςως*, *Γρ.* *Ἴσως*. — Σελ. 170, ς. 3, *Ἔποι*, *Γρ.* *Εἴποι*. — Σελ. 172, ς. 6, *ἀποσβύναι*, *Γρ.* *ἀποσβῆναι*. — ς. 13, 14 *συναφθὲν τῷ* $2\alpha^2\beta$, *Γρ.* *Συναφθὲν τῷ* $4\alpha^2\beta$. — Σελ. 173, ς. 10.

Ἀπολελείφθωσαν, Γρ. Ἀπηλείφθωσαν. — ς. 12, Ἤλατ. Γρ. Ἥλατ. — Σελ. 181, ς. 17, ..β^4, Γρ. ..$\beta^4 + \beta^5$. — Σελ. 189, ς. 25, $\frac{2\alpha\xi}{\gamma}$, Γρ. $\frac{2\alpha\xi^2}{\gamma}$. — Σελ. 196, ς. 14, (59), Γρ. (57). — ς. 18, (60), Γρ. (58). — Σελ. 202, ς. 11, $\alpha\alpha - \beta$, Γρ. $\alpha\alpha - \beta\beta$. — Σελ. 214, ς. 24, $3\beta\gamma^2$, Γρ. $3\beta^2\gamma$. — Σελ. 215, ς. 22, $+ - \beta^1$, Γρ. $- \beta^1$. — Σελ. 223, ς. 26, $\frac{1}{3}$, Γρ. $\alpha\frac{1}{3}$. — Σελ. 239, ς. 18, Ἀναφθέντος, Γρ. Συναφθέντος. — Σελ. 243, ς. 6, (142), Γρ. (55). — Σελ. 244, ς. 11, $\frac{\alpha}{\beta}$, Γρ. $\frac{\beta}{\alpha}$, ὡσαύτως ϰ̓ τὰ λοιπὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὰ ἐν τῇ αὐτῇ σελ. — Σελ. 246, ς. 6, (133), Γρ. (113). — ς. 11, (149), Γρ. (148). — Σελ. 250, ς. 12, (11), Γρ. (40). — Σελ. 252, ς. 17, Ῥίζαν, Γρ. Ῥίζαν. — Σελ. 254, ς. 4, $\frac{\nu\delta}{\nu\xi}$, Γρ. $\frac{\delta^\nu}{\xi^\nu}$. — ς. 19, $\frac{\beta^{\frac{1}{\nu}} \mu^{\frac{1}{\nu}}}{\mu}$, Γρ. $\frac{\beta^{\frac{1}{\nu}} \mu^{\frac{\nu}{\nu}}}{\mu}$. — Σελ. 278, ς. 15, $- \delta +$, Γρ. $- \delta + \alpha$.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kumas, Kōnstantinos M.

Seiras stoicheioōdus tōn mathēmatikōn kai physikōn pragmateiōn

Bd.: T. 1

en Bienn ē tēs Austrias (1807)

Math.u. 91 m-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594034-3